Nivellement direct en haute montagne : comment savoir, *a priori*, si la correction orthométrique est nécessaire ?

Thomas TOUZÉ

MOTS-CLÉS
Nivellement, correction orthométrique, géodésie physique.

Le topographe déduit les différences d'altitudes de la dénivelée géométrique en tant que somme des dénivelées mesurées au niveau. Or, la définition rigoureuse des altitudes à partir du potentiel de pesanteur requiert une pondération de ces dénivelées mesurées par l'accélération de la pesanteur. La difficulté réside dans le fait que le domaine d'exactitude de l'approche du topographe n'est pas défini, ce qui est problématique en haute montagne, face à de fortes dénivelées.
Ainsi, en nous basant sur une linéarisation de la pesanteur en fonction de l'altitude, nous proposons dans cet article une approximation locale de la correction orthométrique utilisable en altitudes normales. En nous appuyant sur un exemple dans les Alpes françaises, nous supposons que cette formule permettra au topographe, à l'échelle d'une vallée, d'estimer à partir de quelle dénivelée, selon l'exactitude qu'il doit atteindre, il devra prendre en compte la pesanteur dans ses cheminements.

Introduction

Le nivellement est un thème surprenant. Au premier abord, il fait appel à des concepts très simples, des mathématiques triviales et des instruments aisément manipulables. Mais en l'étudiant plus attentivement, la question de l'exactitude des déterminations altimétriques requiert de la physique et des mathématiques bien plus élaborées. Pour s'en convaincre, il suffit de demander à son entourage de définir ce qu'est l'altitude. Où se situeront leurs réponses parmi ces quelques exemples ?

- hauteur au-dessus de la mer ;
- hauteur au-dessus du niveau moyen des mers ;
- hauteur au-dessus du géoïde ;
- cote géopotentielle divisée par une valeur conventionnelle de la pesanteur.

Ces définitions de l'altitude de complexités croissantes et de plus en plus abstraites posent bien le problème : localement, une définition simple suffit pour déterminer de manière exacte les altitudes depuis une ou plusieurs références combinées à un nivellement. Mais suffit-elle quand l'incertitude du GNSS est trop élevée et que le chantier est trop grand avec éventuellement de la dénivelée ?

Évidemment, la proposition de définition la plus élaborée citée précédemment sert pour les réseaux nationaux de nivellement et implique un traitement particulier des dénivelées mesurées. Mais ce qui nous intéresse dans cet article, c'est la zone intermédiaire qui est encore aujourd'hui mal définie : quand je dois faire du nivellement de haute précision (par exemple inférieur en justesse et fidélité à 1 cm) sur plusieurs dizaines de kilomètres, voire moins, mais avec de très fortes dénivelées, ai-je besoin de tenir compte des variations du champ de pesanteur ?

Dit autrement, si je définis la dénivelée géométrique comme la somme de mes dénivelées élémentaires mesurées lors d'un nivellement direct, est-elle suffisamment exacte pour déterminer les altitudes selon mon besoin de précision ? Subséquemment, si je définis la correction orthométrique comme l'écart entre la différence d'altitudes (la dénivelée "vraie") et la dénivelée géométrique, comment savoir si cette correction orthométrique est négligeable ou pas ? Et si possible, puis-je le savoir avant même de faire les mesures ?

Dans cet article, nous allons tenter d'apporter un début de solution à ces questions en proposant quelques idées. Tout d'abord, nous poserons quelques définitions qui nous permettront de déduire une expression locale de la correction orthométrique. Cela fait, en nous appuyant sur les valeurs de pesanteur fournies sur les points du RBF, nous présenterons les résultats obtenus à proximité d'un barrage sur le Drac en Isère.

Altitudes et dénivelées

La définition suivante peut être trouvée dans [1], chapitre 4 section 5 (avec quelques modifications de notations). *D'une manière générale, l'altitude d'un point M est son éloignement d'une surface de référence proche du géoïde. Elle est en pratique déterminée par des opérations de nivellement à partir d'un point fondamental O. Si on se contentait de cumuler les dénivelées mesurées au niveau, le résultat dépendrait du chemin suivi, car les surfaces équipotentielles du champ de pesanteur ne sont pas parallèles* [figure 1]. *On est donc conduit à adopter la définition générale suivante :*

$$H^*(M) = \frac{W(O) - W(M)}{\Gamma^*(M)}$$

Le symbole (*) distingue les différents types d'altitudes. $\Gamma^*(M)$ est une fonction du seul point M qui a la dimension d'une accélération. Comme la différence

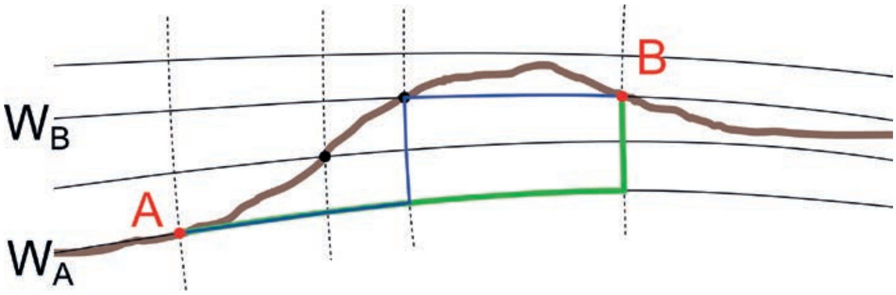

Figure 1. Cheminement de A à B selon un trajet aller en bleu qui diffère du retour en vert. Un tel nivellement traité de manière simple ne ferme pas à cause du non-parallélisme des surfaces équipotentielles de pesanteur W (lignes pleines noires). En effet, les distances curvilignes le long des lignes de champ (pointillés noirs), c'est-à-dire les dénivelées orthométriques, ne sont pas égales.

de potentiel ne dépend pas du chemin suivi, [cette formule] garantit une définition correcte du concept d'altitude. Le choix de la fonction Γ(M) détermine le type d'altitude. En particulier, si la valeur de Γ*(M) est proche de la valeur de la pesanteur entre M et le géoïde, H*(M) est proche de la hauteur de M au-dessus du géoïde.*

Nous n'allons pas détailler dans cette section les altitudes orthométriques ni les altitudes normales qui découlent de deux manières différentes de choisir Γ*(M) selon, respectivement, la pesanteur et la pesanteur normale. Nous retenons ici que l'altitude H(M) se déduit de la cote géopotentielle C(M) = W(0) – W(M) divisée par une fonction Γ(M) :

$$\exists \Gamma \text{ tel que } H = \frac{C}{\Gamma}$$

En termes de cheminement d'un point A à un point B, intéressons-nous aux variations de ces trois quantités H, C et Γ :

$$\begin{cases} \Delta H = H_B - H_A \\ \Delta C = C_B - C_A \\ \Delta\Gamma = \Gamma_B - \Gamma_A \end{cases}$$

La dénivelée vraie ΔH se définit ainsi comme la différence des altitudes. On peut aisément montrer, à partir des formules précédentes que :

$$\Delta H = \frac{\Delta C - \Delta\Gamma\, H_B}{\Gamma_A} = \frac{\Delta C - \Delta\Gamma\, H_A}{\Gamma_B}$$

Imaginons désormais un nivellement de A vers B. Tel que décrit en *figure 2*, on mesure les n dénivelées élémentaires h_i. Connaissant, pour chaque dénivelée h_i, la valeur locale de l'accélération de la pesanteur g_i, il est possible de déduire la différence de cote géopotentielle ΔC selon la formule suivante *(voir [1] chapitre 4 section 2.5)*.

$$\Delta C \approx \sum_{i=1}^{n} g_i\, h_i$$

En introduisant ce résultat dans l'expression de la dénivelée précédente, on obtiendrait un résultat exact et indépendant du cheminement, mais bien difficile à obtenir concrètement, car requérant la connaissance de la pesanteur le long du trajet.
En effet, le topographe, à l'issue de son cheminement, est habitué à calculer la dénivelée géométrique h comme la somme des n dénivelées élémentaires et à considérer qu'elle est égale à la dénivelée vraie ΔH.

$$h = \sum_{i=1}^{n} h_i$$

et

$$\Delta H \approx h$$

L'hypothèse d'égalité entre la dénivelée géométrique h et la différence d'altitudes ΔH est tout à fait raisonnable dans l'immense majorité des nivellements. *A contrario,* sur de longues distances ou en cas de très forte dénivelée, cette hypothèse n'est plus satisfaisante. La difficulté, selon nous, est qu'il n'est pas connu à partir de quelle distance ni quelle dénivelée cette approximation n'est plus applicable.

Pour tenter de résoudre partiellement cette difficulté, nous proposons la définition suivante de la correction orthométrique Ω.

La correction orthométrique d'un cheminement en nivellement est la quantité Ω à ajouter à la dénivelée géométrique h – la somme des dénivelées élémentaires mesurées au niveau – pour obtenir la dénivelée vraie ΔH, correspondant à la différence d'altitudes. La dénivelée géométrique et la correction orthométrique dépendent du cheminement suivi, contrairement à la dénivelée vraie.

ΔH = h + Ω

Approximation locale de la correction orthométrique

Dans cet article, nous allons nous concentrer sur une simplification locale, qui ne saurait tenir sur plusieurs dizaines de kilomètres. En effet, nous faisons l'hypothèse forte H_0 que, localement, l'accélération de la pesanteur varie linéairement selon l'altitude.

$(\mathcal{H}_0)$

$$g(M) = g_A + g'_A\,(H - H_A) + o_{M\to A}\left(\|\overrightarrow{AM}\|^2\right)$$

$$\text{avec } g'_A = \frac{dg_A}{dH}$$

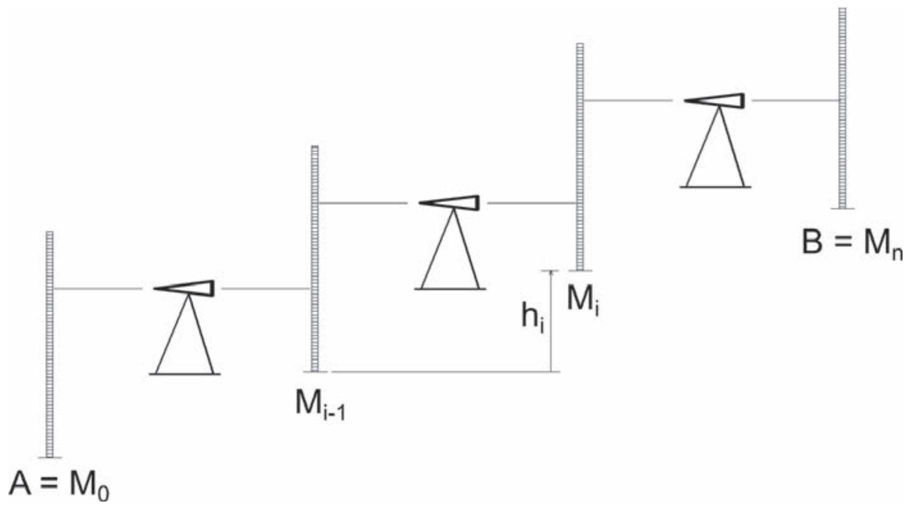

Figure 2. Nivellement de A à B par la mesure au niveau de n dénivelées élémentaires h_i [1].

Ainsi, pour notre cheminement de A à B, nous supposons connues l'accélération de la pesanteur g_A en A ainsi que sa dérivée $g_{A'}$. Nous aborderons cette question dans la section suivante. En négligeant les variations de g entre les lectures avant et arrières, nous pouvons alors exprimer les n valeurs g_i de la manière suivante.

$$g_i = g_A + g'_A\,(H_i - H_A) \approx g_A + g'_A \sum_{j=1}^{i} h_j$$

La variation de cote géopotentielle devient alors :

$$\Delta C \approx g_A\,h + g'_A \sum_{j\leq i} h_j\,h_i$$

Et par propriété des doubles sommations, nous avons :

$$\sum_{j\leq i} h_j\,h_i = \frac{1}{2}\left(\left(\sum h_i\right)^2 + \sum h_i^2\right) = \frac{h^2}{2} + \frac{\sum h_i^2}{2}$$

De plus, pour nous débarrasser de la somme des carrés des dénivelées, nous pouvons introduire l'écart-type σ_h des n dénivelées h_i. Attention, il ne s'agit pas de l'incertitude des mesures, mais simplement l'écart-type des valeurs mesurées. D'une certaine manière, cet écart-type traduit la rugosité du terrain. On a alors :

$$\sum h_i^2 = (n-1)\,\sigma_h^2 + \frac{h^2}{n}$$

En assemblant ces résultats, on obtient une expression simplifiée de la variation de cote géopotentielle ΔC en fonction de la dénivelée géométrique h et ne nécessitant plus que la connaissance de l'accélération de la pesanteur en A :

$$\Delta C \approx g_A\,h + \frac{g'_A\,h^2}{2}\left(\frac{n+1}{n} + (n-1)\frac{\sigma_h^2}{h^2}\right)$$

La dénivelée vraie ΔH devient alors :

$$\Delta H \approx \frac{g_A}{\Gamma_A}\,h + \frac{g'_A\,h^2}{2\,\Gamma_A}\left(\frac{n+1}{n} + (n-1)\frac{\sigma_h^2}{h^2}\right) - \frac{\Delta\Gamma\,H_B}{\Gamma_A}$$

En remarquant enfin que l'altitude H_B de B est proche de H_A+h, la correction orthométrique Ω, telle que définie dans cet article, s'obtient selon la formule suivante :

$$\Omega \approx \frac{g_A - \Gamma_B}{\Gamma_A}\,h + \frac{g'_A\,h^2}{2\,\Gamma_A}\left(\frac{n+1}{n} + (n-1)\frac{\sigma_h^2}{h^2}\right) + \frac{\Gamma_A - \Gamma_B}{\Gamma_A}\,H_A$$

Du fait de la linéarisation de g en fonction de l'altitude, cette approximation de la correction orthométrique est indépendante du cheminement, ce qui n'est pas tout à fait correct. Cependant, notre objectif ici est uniquement d'en estimer l'ordre de grandeur sur un chantier relativement peu étendu. Dans la section suivante, nous allons proposer un cas concret d'utilisation se basant sur un nivellement dans les Alpes, des points du réseau de base français et la manière de calculer Γ en altitudes normales.

Application sur le barrage de Saint-Pierre-Cognet

En 2019, DTG a créé de nouveaux points de référence sur les barrages du Drac, dont celui de Saint-Pierre-Cognet *(figure 3)*. En plus d'observations GNSS pendant une nuit sur plusieurs points, un nivellement a été réalisé reliant plusieurs repères NGF à proximité.
La présence de tensions centimétriques entre le GNSS et les repères NGF nous avait contraints à explorer la piste de la correction orthométrique en plus

Figure 3. Berges du lac de Saint-Pierre-Cognet.

Tableau 1. Dénivelée géométrique mesurée entre deux repères de nivellement à proximité du barrage. Nous rappelons que l'écart-type affiché ici n'est pas la précision des mesures des dénivelées, mais l'écart-type des n valeurs de dénivelées qui traduit, d'une certaine manière, la rugosité du cheminement.

Point A	Point B	Dénivelée géométrique compensée A/R [m]	nombre de dénivelées	Ecart-type dénivelées mesurées [m]
X'.C.K3-256	X'.C.K3-250	112.3169	64	1.2236

d'autres hypothèses (tensions dans la grille RAF18, repères NGF ayant bougé, fautes de mesure, etc.).
Plus particulièrement, nous avions fait un nivellement aller et retour depuis le barrage et passant par quatre repères NGF dont aucune altitude ne coïncidait avec le GNSS ni même entre eux dans le nivellement. Les deux moins mauvais étaient aux extrémités du cheminement, les X'.C.K3-256 et X'.C.K3-250. La différence de leurs altitudes donnait une dénivelée théorique de 112,336 m contre une dénivelée géométrique mesurée (après compensation de l'écart de fermeture de 2,2 mm) de 112,317 m *(tableau 1)*, soit un écart de 19 mm. Vu la longueur du cheminement aller supérieure à 2 km, l'environnement montagneux et la dénivelée, nous ne savions pas si cet écart pouvait s'expliquer par la géodésie physique ou pas. C'est dans ce contexte que nous avons réfléchi à la question de la correction orthométrique.

Pour appliquer notre formule, nous avons besoin de l'accélération de la pesanteur et de son gradient au niveau du départ du cheminement. Pour ce faire, nous nous sommes appuyés sur les mesures de pesanteur fournies dans les fiches géodésiques des points du réseau de base français (RBF). Autour de notre barrage, nous avons trouvé sept points à moins de 36 km, dont un à 4 km.

Nous avons alors fait une régression linéaire des valeurs de g en fonction de l'altitude en pondérant les mesures selon l'inverse des carrés des distances au repère de nivellement, dans le but de donner plus d'importance aux points du RBF les plus proches. Nous obtenons les résultats visibles en *figure 4*.

Au niveau du repère de nivellement X'.C.K3-256, nous obtenons :

$$g_A = 9.80409 \pm 0.00008 \text{ m/s}^2$$
$$g_{A'} = -2.5\ 10\text{-}6 \pm 3\ 10\text{-}7 \text{ s}^{-2}$$

Pour pouvoir appliquer notre estimation de la correction orthométrique sur les repères de nivellement à proximité du barrage de Saint-Pierre-Cognet, il reste à calculer les termes Γ_A et Γ_B qui correspondent, dans le cas d'altitudes normales telles qu'en NGF-IGN69, à la pesanteur normale moyenne de l'ellipsoïde jusqu'à la surface sphéropotentielle *(voir [1] chapitre 4 section 5.2.1 p. 23 et 24)*. Toujours dans [1] à la même section, la formule (75), basée sur celle de Somigliana (35 du même chapitre), permet de déduire nos deux valeurs de Γ. Nous obtenons :

$$\Gamma_A = 9.805106 \text{ m/s}^2$$
$$\Gamma_B = 9.804929 \text{ m/s}^2$$

En appliquant notre formule approchée de Ω, nous obtenons, pour le cheminement de X'.C.K3-256 à X'.C.K3-250, une correction orthométrique négligeable à + 0,2 mm. Au-delà de ce résultat, notre modèle permet de prédire l'ordre de grandeur de la correction orthométrique pour de plus longs cheminements, avec des dénivelées plus prononcées. Ainsi, en considérant des cheminements imaginaires partant du même point, avec des dénivelées élémentaires similaires, en augmentant linéairement le nombre de dénivelées mesurées, nous pouvons estimer la correction orthométrique en fonction de la dénivelée

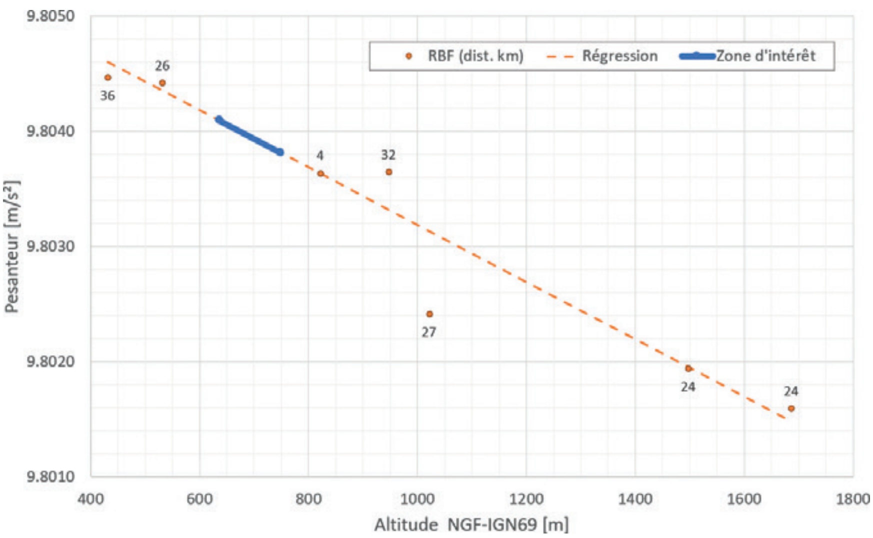

Figure 4. Régression linéaire de la pesanteur en fonction de l'altitude, pondérée selon l'inverse du carré des distances. Les résidus sont de l'ordre de 10-4 m/s^2. Les étiquettes correspondent aux distances des points du RBF.

Tableau 2. Informations des points du RBF pour la modélisation locale de la pesanteur autour de X'.C.K3-256.

Points	E [m]	N [m]	H [m IGN69]	g [m/s²]	d [km]	g régr. [m/s²]	Résidus [m/s²]
Molières-Glandaz 2	889 889.87	6 405 745.76	430.97	9.80446930	36	9.80460	0.00013
Monchaboud 1	918 301.56	6 449 279.45	531.55	9.80441755	26	9.80435	-0.00007
Saint-Jean-d'Hérans 2	918 155.94	6 421 251.02	821.47	9.80363946	4	9.80363	-0.00001
La-Chapelle-en-Vercors 4	890 782.88	6 433 042.71	946.75	9.80364556	32	9.80332	-0.00033
Villar-Loubière A	948 021.10	6 419 012.60	1021.06	9.80241355	27	9.80314	0.00072
Saint-Etienne-en-Devoluy B	931 898.05	6 402 068.34	1496.97	9.80194056	24	9.80195	0.00001
Villard-Reymond 3	937 680.00	6 441 857.08	1686.13	9.80159394	24	9.80148	-0.00011
X'.C.K3-256	921 270	6 423 830	637.22	/	0	9.80409	

Tableau 3. Extrapolation de la correction orthométrique, à proximité du barrage de Saint-Pierre-Cognet, pour des dénivelées allant jusqu'à 1 000 m.

Dénivelée géométrique h [m]	Γ_B [m/s²]	Nombre de dénivelées n	Ecart-type dénivelées mesurées [m]	Correction ortho. Ω [mm]
100	9.80495	57	1.2236	0.2
112	9.80493	64	1.2236	0.2
200	9.80479	114	1.2236	0.8
300	9.80464	171	1.2236	1.9
400	9.80449	228	1.2236	3.7
500	9.80433	285	1.2236	6.2
600	9.80418	342	1.2236	9.2
700	9.80402	399	1.2236	12.8
800	9.80387	456	1.2236	17.1
900	9.80371	513	1.2236	21.9
1000	9.80356	570	1.2236	27.4

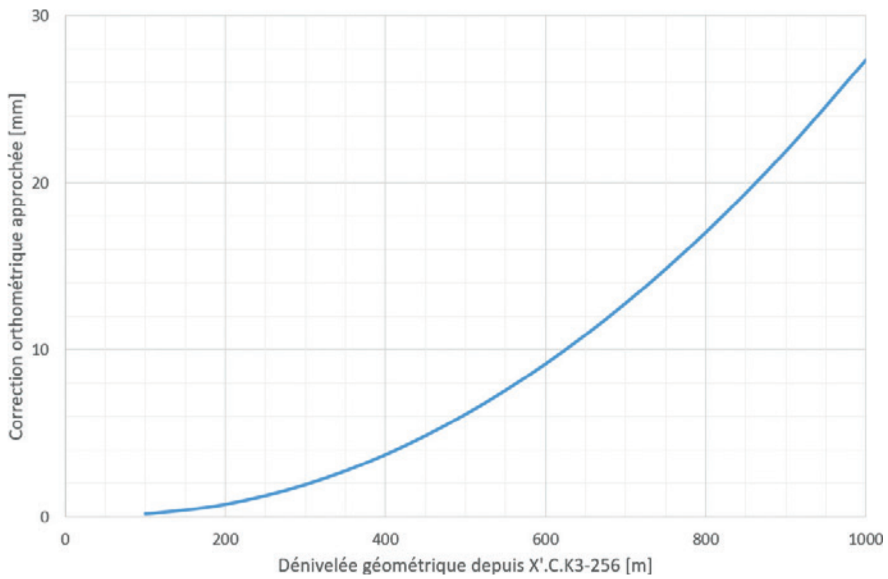

Figure 5. Extrapolation de la correction orthométrique, dans les mêmes conditions à proximité de Saint-Pierre-Cognet, pour des dénivelées allant jusqu'à 1 000 m.

géométrique. Nous obtenons les résultats en *figure 5* et le *tableau 3.*

De ces calculs, nous pouvons désormais prédire l'ordre de grandeur de la correction orthométrique. Pour une exactitude de 2 mm, il est inutile de corriger les dénivelées géométriques inférieures à 300 m. Nous constatons que pour une exactitude de 1 cm sur la dénivelée, il serait nécessaire de corriger les cheminements dont la dénivelée géométrique dépasse 650 m. Nous remarquons également que la correction orthométrique ne varie pas linéairement, mais plutôt de manière quadratique.

Conclusion

Pour faire le lien entre les dénivelées géométriques mesurées et les différences d'altitudes, nous sommes parvenus à établir une formule approchée de la correction orthométrique basée sur une linéarisation locale de l'accélération de la pesanteur en fonction de l'altitude. Dans le cas d'altitudes normales, telles que celles dans la NGF-IGN69, la relative facilité de calcul de la pesanteur normale (pour la détermination des coefficients Γ) permet alors l'utilisation concrète de cette formule. Il s'agit certes d'un modèle simplifié, valable localement, mais il permet vraisemblablement d'estimer correctement l'ordre de grandeur des effets de géodésie physique sur les nivellements en haute montagne. En France, nous disposons de mesures de pesanteur accessibles un peu partout sur le territoire par les points du RBF. De telles données étant indispensables à cette estimation de la correction orthométrique, des alternatives à l'utilisation du RBF pourraient consister en une campagne de mesures gravimétriques ou à accéder partiellement à la grille de pesanteur établie pour la détermination du quasi-géoïde français.

Il serait intéressant de fiabiliser ce travail par des mesures gravimétriques le long d'un cheminement à dénivelée significative afin d'évaluer l'exactitude de notre approximation de la correction orthométrique. Cela pourrait apporter une aide aux topographes de haute montagne pour plus d'exactitudes dans leurs résultats et pour expliquer, peut-être, pourquoi malgré de bonnes mesures, certains cheminements ne ferment pas. ●

Contact

Thomas Touzé, EDF / DTG,
thomas.touze@edf.fr

Référence

[1] *Cours de géodésie, chapitre 4,* **Françoise Duquenne et Henri Duquenne,** ESGT, 2003.

Ce document est téléchargeable gratuitement sur le site de l'AFT à https://www.aftopo.org/categorie-produit/ouvrages/

ABSTRACT

The land surveyor deduces the differences in altitude from the sum of the height differences measured with a level. However, the rigorous definition of altitudes from the gravitational requires a weighting of the leveled differences in height by the acceleration of gravity. The difficulty lies in the fact that the field of accuracy of the land surveyor's approach is not defined, which is problematic in high mountains, when faced with steep gradients.
Thus, based on a linearization of gravity as a function of altitude, we propose in this article a local approximation of the orthometric correction usable with normal altitudes. Based on an example in the French Alps, we assume that this formula will allow the land surveyor, on the scale of a valley, to estimate from what height difference, according to the accuracy he must achieve, he will have to take gravity into account in its surveys.