

La théorie de la loxodromie de Pedro Nunes (*Petrus Nonius*)

■ **Raymond D'HOLLANDER** Ingénieur général géographe honoraire

*En mai 2002, le Portugal a célébré le 500^e anniversaire de la naissance du grand cosmographe portugais Pedro Nunes, qui fut l'initiateur du concept de loxodromie (désigné par le mot "rumb" à son époque). Sa théorie de la loxodromie fut d'abord exposée en 1537 dans deux traités portugais, puis développée dans les *Petri nonii salaciensis opera* publiés à Bâle en 1566, où il fut le premier à exposer le principe d'établissement d'une table de rumb. Mais sa théorie fut jugée à tort fautive au début du XVII^e siècle par le Flamand Simon Stevin, dont nous expliquons dans ces pages la faute d'incompréhension. Celle-ci ne fut pas dénoncée durant près de trois siècles.*

1. Préambule

À l'occasion du 500^e anniversaire de la naissance de Pedro Nunes, les universités de Lisbonne et de Coimbre ont organisé une conférence scientifique internationale, qui s'est tenue dans les deux villes du 23 au 25 mai 2002. Le 23 mai, dans l'auditorium de la Bibliothèque nationale de Lisbonne, six conférenciers (deux Portugais, deux Espagnols, un Allemand et un Français) ont fait des communications concernant l'œuvre scientifique de P. Nunes. Suite à mon article sur l'histoire de la loxodromie, qui avait été publié en 1990 dans la revue portugaise *Mare liberum*, j'ai été invité à venir à Lisbonne exposer mes recherches concernant la théorie de la loxodromie de P. Nunes. Je donne ci-après pour les lecteurs de la revue XYZ un condensé de ma communication.

2. Introduction

Les études de Pedro Nunes concernant la loxodromie se trouvent dans deux de ses ouvrages. Le premier est le *Tratado da sphaera* publié à Lisbonne en 1537 ; il comporte trois parties

dont seule la deuxième nous intéresse avec deux *Tratados* (traités) :

- le *Tratado... certas duvidas da navigação*
- le *Tratado... da carta de marear*

Le deuxième est le *Petri nonii salaciensis opera...* que nous abrègerons en "*Opera*". L'ouvrage fut publié en latin en 1566 à Bâle.

3. Les deux *Tratados* de 1537

Dans ces deux traités P. Nunes est le premier à distinguer clairement, en navigation, pour parcourir la distance séparant deux points du globe terrestre supposé sphérique :

- le trajet loxodromique, consistant à naviguer à cap constant ; l'azimut⁽¹⁾ de la loxodromie que nous désignerons par V, appelé aussi angle de route, reste constant tout le long du trajet de la loxodromie,
- le trajet orthodromique, trajet le plus court par arc de grand cercle, mais nécessitant périodiquement le changement de l'angle de route.

On considère généralement le néerlandais Willebrord Snellius comme le créateur des mots loxodromie et orthodromie, qu'il utilisa dans son *Typhus Batavus* de 1624, mais en fait on trouve déjà ces deux désignations dans les *Wisconstige Ghedachtenissen* de 1605 du Flamand Simon Stevin, ouvrage ayant subi deux traductions : l'une en latin par W. Snellius en 1608, l'autre en français par Albert Girard en 1634. S. Stevin a formé à partir du grec les mots loxodrome et orthodrome, d'où l'on tira loxodromie et orthodromie.

Mais avant que ne soit généralisé le mot loxodromie ou trajet loxodromique, on utilisa le mot rumb ou rhumb ou romb pour désigner les trente-deux rayons du compas, deux rayons consécutifs faisant entre eux un angle de $360^\circ/32 = 11^\circ 15'$.

Pour étudier ces trente-deux rumb il suffit de considérer ceux du quadrant Nord-Est : le 8^e rumb correspondant à la direction ■■■

(1) L'azimut d'une direction est l'angle que fait en un point celle-ci avec le nord géographique, direction du méridien passant par le point.

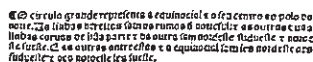


Figure 3 : Premiers tracés de rumb's par P. Nunes sur une carte en projection polaire.

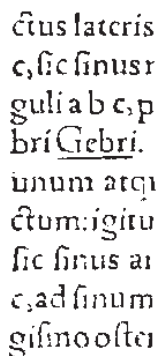


Figure 4 : cette figure est extraite du chapitre 23 du livre II des *Opera*. Le point a est le pôle terrestre, les points *b*, *c*, *e*, *g*, *i* sont les points du rumb.

■■■ du parallèle (azimut de 90°), il y a sept rums intermédiaires, dont voici les désignations et azimuts :

1 ^{er} rumb	Nord – quart de Nord-Est	V = 11° 15'
2 ^e rumb	Nord – Nord-Est	V = 22° 30'
3 ^e rumb	Nord-Est – quart de Nord	V = 33° 45'
4 ^e rumb	Nord-Est	V = 45°
5 ^e rumb	Nord-Est – quart de l'Est	V = 56° 15'
6 ^e rumb	Est – Nord-Est	V = 67° 30'
7 ^e rumb	Est – quart de Nord-Est	V = 78° 45'

On détermine ces sept rumb en les faisant partir chacun d'un point B_1 de l'équateur (figure 5) ; ils s'élèvent en latitude d'autant plus vite que leur azimut est plus petit et d'autant plus lentement que leur azimut est plus grand. Ils s'enroulent indéfiniment autour du pôle terrestre A, qui est un point asymptote, qu'aucun d'eux n'atteint jamais ; cette propriété a fait l'objet de controverses au XVI^e siècle.

Pour obtenir les rumb des trois autres quadrants, il suffit d'effectuer des symétries par rapport au méridien du point de départ et par rapport à l'équateur.

■ 3.1. Paradoxe de Martim Afonso de Sousa

Dans le *Tratado... certas duvidas da navegação*, publié en 1537, mais rédigé vraisemblablement fin 1533 ou début 1534, P. Nunes répond à quelques “doutes” que lui exprima, à son retour du Brésil, le navigateur Martim Afonso de Sousa, en particulier le suivant : *“Lorsque le soleil était à l'équateur, ... il se levait pour lui à l'est... Et il me demanda pour quelle raison, si nous nous dirigeons vers l'est... nous suivons un parallèle toujours à la même hauteur, sans jamais pouvoir atteindre l'équateur vers lequel nous dirigeons notre proue en même temps que vers l'est indiqué par la boussole.”*

Par : *“Lorsque le soleil était à l'équateur”*, il faut sous-entendre *“Lorsque le soleil était au zénith des points de l'équateur”*, circonstance qui se produit aux deux équinoxes ; à ces moments de l'année, le soleil se lève exactement à l'Est (direction du point cardinal Est), alors que les autres jours il se lève vers l'Est.

Pedro Nunes explique à son interlocuteur que, quand on vise le soleil à l'équinoxe, à son lever sur l'équateur, la visée se fait dans un plan qui coupe la sphère selon un arc de grand cercle, ayant l'azimut 90° au point d'observation, mais que lorsqu'on maintient un cap constant de 90° , on se déplace sur une loxodromie particulière d'azimut 90° : le parallèle, qui ne rencontre jamais l'équateur.

■ 3.2. Premiers tracés de rums par P. Nunes sur une carte en projection polaire

Dans le *Tratado... da carta de marear*, P. Nunes a dessiné sur une carte en projection équidistante² polaire de l'hémisphère Nord, sans les parallèles, avec seulement quatre méridiens, un réseau de deux rumb partant des quatre points de l'équateur, situés sur ces méridiens également distants de 90°. En

(2) Projection polaire dans laquelle les écartements des parallèles sur la sphère sont conservés en projection.

chaque point les azimuts des deux rumb sont $+45^\circ$ et $+67^\circ 30'$ pour le quadrant NE, -45° et $-67^\circ 30'$ pour le quadrant NO. Les rumb d'azimut $\pm 45^\circ$ sont dessinés jusqu'au pôle, P. Nunes croyant en 1537 qu'ils atteignaient ce point (figure 3).

Les rumb d'azimut $\pm 67^\circ 30'$ ne font qu'un parcours de 270° en différence de longitude, parce que s'ils avaient été prolongés jusqu'au pôle, la figure 1 serait devenue illisible.

Nous avons extrait de la rosace complexe de la figure 3 le rumb issu du point le plus bas et d'azimut $V = 45^\circ$ (figure 1), représenté en traits pleins ; nous avons construit en tiretés la loxodromie exacte correspondante.

Nous avons fait de même pour le rumb issu du point le plus bas et d'azimut $V = 67^\circ 30'$ (figure 2).

On constate des écarts élevés pouvant atteindre une dizaine de degrés en latitude, après le méridien distant de 45° en longitude du point de départ.

En outre pour le rumb d'azimut $V = 67^\circ 30'$ on remarque sur le méridien, distant de 90° du point de départ, une brisure malencontreuse, qui sera lissée par la suite sur une publication de 1914 : la *Revista de Engenharia militare*.

4. La théorie de la loxodromie et l'établissement d'une table de rumb (*Opera* de P. Nunes)

La figure 4 est extraite du chapitre 23 du livre II des *Opera*. Le point *a* est le pôle terrestre les points *b, c, e, g, i* sont les points du rumb.

Le point *b* est sur l'équateur ($\widehat{ab} = 90^\circ$). Les arcs \widehat{ab} , \widehat{ac} , \widehat{ae} , \widehat{ag} , \widehat{ai} sont les méridiens. Les arcs de grand cercle élémentaires \widehat{bc} , \widehat{ce} , \widehat{eg} , \widehat{gi} , sont tels que les angles $\widehat{ecd} = \widehat{gef} = \widehat{kg h} = 1^\circ$.

Pedro Nunes décompose donc son rumb en arcs de grand cercle élémentaires, tels qu'entre les deux extrémités de chaque arc la variation d'azimut soit 1° ; la méthode de Nunes consiste essentiellement à résoudre les triangles sphériques *abc*, *ace*, *aeg*, *agi*, etc. En raison du grand nombre de triangles à résoudre nous n'avons pas pu conserver les notations de Nunes.

Les points *a, b, e, g, i* sont les homologues des points *A, B₁, B₂, B₃, B₄* de la figure 5. Ainsi le rumb d'azimut *V* est assimilé sur la figure 5 à une succession d'arcs de grands cercles élémentaires $\widehat{B_1B_2}$, $\widehat{B_2B_3}$, $\widehat{B_3B_4}$ etc. Le rumb est issu du point *B₁* de l'équateur avec l'azimut *V*. L'arc $\widehat{B_1B_2}$ a en *B₁* l'azimut *V* et se termine en *B₂*, où il a l'azimut $V + dV$. L'arc $\widehat{B_2B_3}$ a en *B₂* l'azimut *V* et se termine en *B₃*, où il a l'azimut $V + dV$.

L'arc $\widehat{B_3B_4}$ a en *B₃* l'azimut *V* et se termine en *B₄*, où il a l'azimut $V + dV$, etc. P. Nunes préconise d'adopter $dV = 1^\circ$.

Le point *A* est le pôle terrestre. Les arcs $\widehat{AB_1}$, $\widehat{AB_2}$, $\widehat{AB_3}$, $\widehat{AB_4}$, sont les méridiens de *B₁*, *B₂*, *B₃*, *B₄*. $\widehat{AB_1} = 90^\circ$.

Le point *H₁* est celui où le méridien de *B₂* rencontre l'équateur. L'angle $\widehat{H_1} = 90^\circ$. Le point *H₂* est celui où l'arc de grand cercle

issu de *A*, tracé perpendiculairement à l'arc $\widehat{B_1B_2}$, prolongé, rencontre cet arc. Pour la lisibilité de la figure 5 le point *H₂* n'a pas été représenté, mais il apparaît sur la figure 6.

Le point *H₃* est celui où l'arc de grand cercle, issu de *A*, tracé perpendiculairement à l'arc $\widehat{B_2B_3}$ prolongé, rencontre cet arc. Le point *H₄* est celui où l'arc de grand cercle, issu de *A*, tracé perpendiculairement à l'arc $\widehat{B_3B_4}$ prolongé, rencontre cet arc. *A₁*, *A₂*, *A₃*, *A₄* sont les différences de longitude successives entre *B₁*, *B₂*, *B₃*, *B₄*, de sorte que la longitude d'un point *B_i* par rapport à un point *B₁* est donnée par $\lambda_i = \sum A_i$.

Les différentes phases des calculs de la table de rumb de P. Nunes sont données ci-après pour le rumb considéré d'azimut *V*. Pedro Nunes indique qu'il utilise les formules de trigonométrie sphérique de Geber (nom latinisé de *Jabir ibn Aflah* XII^e siècle). Il s'agit du *De astronomia libri IX* de Geber, traduit en latin par Gérard de Crémone, publié par Pierre Apian à Nuremberg en 1534³.

(3) Geber y reprend la trigonométrie sphérique de l'Almageste de Ptolémée.

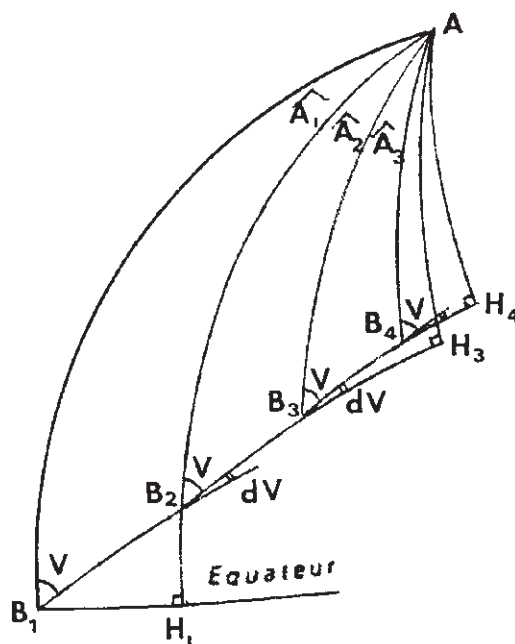


Figure 5 : le rumb d'azimut *V* est assimilé sur la figure 5 à une succession d'arcs de grands cercles élémentaires $\widehat{B_1B_2}$, $\widehat{B_2B_3}$, $\widehat{B_3B_4}$ etc.

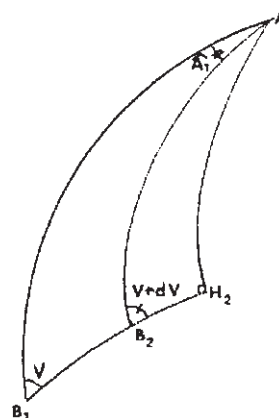


figure 6

4.1. Phase 1. Calcul des longueurs d'arc \widehat{AB}_2 , \widehat{AB}_3 , \widehat{AB}_4 , etc., colatitudes B_2 , B_3 , B_4 .

Considérons les différents triangles sphériques AB_1B_2 , AB_2B_3 , AB_3B_4 ... (figure 5). La relation des sinus permet d'écrire :

$$\frac{\sin \widehat{AB}_2}{\sin \widehat{AB}_1} = \frac{\sin \widehat{AB}_3}{\sin \widehat{AB}_2} = \frac{\sin \widehat{AB}_4}{\sin \widehat{AB}_3} = \dots = \frac{\sin V}{\sin(V+dV)}$$

Comme $\widehat{AB}_1 = 90^\circ$, $\sin \widehat{AB}_1 = 1$ on obtient :

$$\sin \widehat{AB}_2 = \sin V$$

$$\sin \widehat{AB}_3 = \sin \widehat{AB}_2 \frac{\sin(V+dV)}{\sin V}$$

etc.

Les arcs \widehat{AB}_2 , \widehat{AB}_3 , etc. ainsi obtenus représentent les colatitudes des points de rumb dont on déduit aisément les latitudes que nous désignerons par φ_N (N pour l'initiale de Nunes). Ce sont les latitudes φ_{B_2} , φ_{B_3} , φ_{B_4} , etc., des différents points de rumb.

4.2. Phase 2. Calcul des longueurs d'arc de grand cercle $\widehat{B_1B_2}$, $\widehat{B_2B_3}$, $\widehat{B_3B_4}$, etc.

4.2.1. Calcul de l'arc $\widehat{B_1B_2}$

On peut obtenir l'arc $\widehat{B_1B_2}$, de deux manières :

- en résolvant le triangle sphérique rectangle $\widehat{B_1B_2H_2}$ (figure 5) où $B_1 = 90^\circ - V$ et $H_1B_2 = 90^\circ - \widehat{AB}_2$;

On obtient :

$$\frac{\sin \widehat{B_1B_2}}{\sin 90^\circ} = \frac{\sin H_1B_2}{\sin(90^\circ - V)} \quad \text{d'où : } \sin \widehat{B_1B_2} = \frac{\cos \widehat{AB}_2}{\cos V}$$

\widehat{AB}_2 a été obtenu dans la phase 1, V est connu, d'où $\widehat{B_1B_2}$.

- en résolvant les deux triangles sphériques rectangles AB_1H_2 et AB_2H_2 (figure 6). On obtient ainsi $\widehat{B_1H_2}$ et $\widehat{B_2H_2}$ d'où $\widehat{B_1B_2} = \widehat{B_1H_2} - \widehat{B_2H_2}$

Cette méthode est appliquée en 4.2.2 pour l'arc $\widehat{B_2B_3}$.

4.2.2. Calcul de l'arc $\widehat{B_2B_3}$

Considérons les deux triangles sphériques rectangles AB_2H_3 et AB_3H_3 , (figure 7). On a $\widehat{B_2B_3} = \widehat{B_2H_3} - \widehat{B_3H_3}$

4.2.3. Calcul de l'arc $\widehat{B_2H_3}$ dans le triangle AB_2H_3 en deux temps :

$$\sin \widehat{AH_3} / \sin V = \sin \widehat{AB_2} / \sin 90^\circ$$

d'où $\sin \widehat{AH_3} = \sin V \sin \widehat{AB_2}$, V est connu, $\widehat{AB_2}$ a été connu dans la phase 1, d'où $\widehat{AH_3}$.

On a la relation $\cos \widehat{AB_2} = \cos \widehat{B_2H_3} \cos \widehat{AH_3}$ que l'on obtient actuellement par la règle mnémonique de Néper, mais P. Nunes se réfère à Geber.

De la relation précédente on tire : $\cos \widehat{B_2H_3} = \cos \widehat{AB_2} / \cos \widehat{AH_3}$; $\widehat{AB_2}$ est obtenu dans la phase 1, $\widehat{AH_3}$ a été calculé au premier alinéa du précédent paragraphe ; on en déduit $\widehat{B_2H_3}$.

4.2.4. Calcul de $\widehat{B_3H_3}$ dans le triangle sphérique

rectangle AB_3H_3 figure 7 en deux temps :

$$\text{On a : } \frac{\sin \widehat{AH_3}}{\sin(V+dV)} = \frac{\sin \widehat{AB_3}}{\sin 90^\circ}$$

$$\text{d'où : } \sin \widehat{AH_3} = \sin(V+dV) \sin \widehat{AB_3}$$

On connaît $V+dV$, $\widehat{AB_3}$ obtenu dans la phase 1, d'où on déduit $\widehat{AH_3}$.

On a aussi $\cos \widehat{B_3H_3} = \cos \widehat{AB_3} / \cos \widehat{AH_3}$, analogue à $\cos \widehat{B_2H_3} = \cos \widehat{AB_2} / \cos \widehat{AH_3}$ (voir ci-dessus en 4.2.3.)

$\widehat{AB_3}$ a été obtenu dans la phase 1, $\widehat{AH_3}$ a été obtenu précédemment, d'où $\widehat{B_3H_3}$.

4.2.5. Calcul de $\widehat{B_2B_3}$

On a $\widehat{B_2B_3} = \widehat{B_2H_3} - \widehat{B_3H_3}$ où $\widehat{B_2H_3}$ a été calculé en 4.2.3 et $\widehat{B_3H_3}$ en 4.2.4.

4.2.6. Calcul de $\widehat{B_3B_4}$

Considérons les deux triangles sphériques rectangles AB_3H_3 et AB_4H_4 (figure 8). En suivant la même voie qu'en 4.2.3 et 4.2.4, où nous avons calculé $\widehat{B_2H_3}$ et $\widehat{B_3H_3}$, on obtient : $\widehat{B_3H_4}$ et $\widehat{B_4H_4}$, d'où $\widehat{B_3B_4} = \widehat{B_3H_4} - \widehat{B_4H_4}$ et ainsi de suite pour $\widehat{B_4B_5}$, $\widehat{B_5B_6}$ etc., qui sont des éléments d'arcs de grand cercle en lesquels P. Nunes a décomposé le rumb.

4.3. Phase 3. Calcul des angles A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , etc.

Considérons le triangle sphérique AB_1B_2 (figure 6). La relation des sinus donne : $\sin A_1 = \frac{\sin \widehat{B_1B_2}}{\sin \widehat{AB_2}}$

$$\text{Sont connus } \widehat{B_1B_2} \text{ (voir 4.2.1), } V, \widehat{AB_2} \text{ (voir phase 1) ; on en déduit :}$$

$$\sin A_1 = \sin \widehat{B_1B_2} \sin V$$

$$\sin \widehat{AB_2}$$

$$\text{d'où } A_1. \text{ Dans le triangle sphérique } AB_2B_3 \text{ (figure 7) la relation des sinus donne : } \sin A_2 = \frac{\sin V}{\sin \widehat{B_2B_3}} \frac{\sin \widehat{AB_3}}{\sin \widehat{AB_2}}$$

$$\text{Sont connus } \widehat{B_2B_3} \text{ (voir 4.2.5), } V, \widehat{AB_3} \text{ (voir phase 1) ; on en déduit :}$$

$$\sin A_2 = \sin \widehat{B_2B_3} \sin V$$

$$\sin \widehat{AB_3}$$

d'où A_2 et ainsi de suite. A_3, A_4, \dots ; rappelons que la longitude

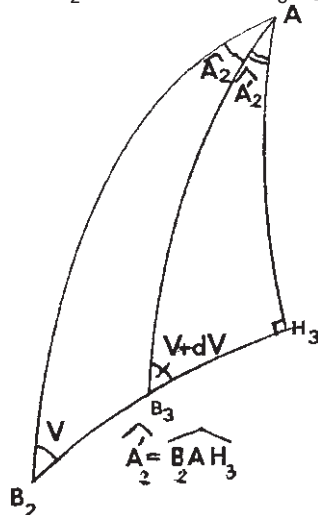


figure 7

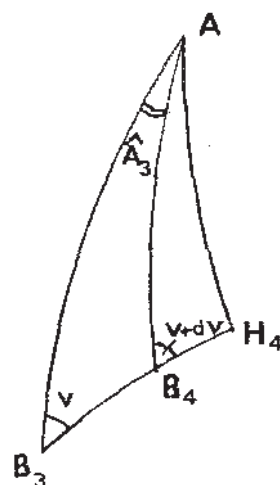


figure 8

d'un point B_i par rapport à un point B_1 est donné par $\lambda_i = \sum \widehat{A_i}$

La table de rumbes de P. Nunes doit comporter pour chacun des sept rumbes trois colonnes indiquant respectivement :

1. les longueurs des arcs de méridiens $\widehat{AB_2}, \widehat{AB_3}, \widehat{AB_4} \dots$ obtenues dans la phase 1,
2. les longueurs des arcs de grands cercles $\widehat{B_1B_2}, \widehat{B_2B_3}, \widehat{B_3B_4} \dots$ obtenues dans la phase 2,
3. les valeurs des angles $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$ obtenues dans la phase 3. Cela fait au total $3 \times 7 = 21$ colonnes.

Arrivé à fin du chapitre 23 du livre II des *Opera*, quelle n'est pas la surprise du lecteur de constater que P. Nunes propose à la page 172 une table de rumbes avec 21 colonnes, mais vides. À la page 171, précédant la table de rumbes vides, on trouve la phrase suivante : *"Suit la disposition de la table en sept parties distinctes ; les nombres à écrire de l'intérieur de cette table que des adolescents studieux les calculent selon les précédentes démonstrations et les prolongent autant qu'il leur plaira"*. Il s'agit d'aller au-delà des dix-neuf lignes de la table. Au chapitre 26, P. Nunes conseille de calculer les tables de rumbes jusqu'à la latitude 60° . Les sept parties évoquées par P. Nunes sont constituées de colonnes triples.

Je me suis substitué à l'un des adolescents studieux de P. Nunes en respectant scrupuleusement sa méthode et en adoptant $dV = 1^\circ$. J'ai obtenu le tableau 1. À droite j'ai reporté de deux en deux lignes les désignations littérales des arcs de colatitude et celles des longueurs des éléments de grands cercles. Les titres et les dispositions des colonnes sont celles de P. Nunes, mais la page 172 des *Opera* comporte des colonnes vides.

4.3.1. Contrôles des calculs

À titre de contrôle, on peut calculer directement les angles $A'_2 = \widehat{B_2AH_3}$ et $A''_2 = \widehat{B_3AH_3}$ (figure 7).

En appliquant la règle mnémorique de Neper, on a :

$$\cos \widehat{AB_2} = \cot V \cot A'_2, \text{ soit } \cot A'_2 = \cos \widehat{AB_2} \tan V \text{ d'où } A'_2,$$

$$\cos \widehat{AB_3} = \cot (V + dV) \cot A''_2, \text{ soit } \cot A''_2 = \cos \widehat{AB_3} \tan (V + dV), \text{ d'où } A''_2.$$

On en déduit $A_2 = A'_2 - A''_2$, que l'on compare à l'angle A_2 obtenu en phase 3. De façon plus générale,

$$\cot A'_i = \cos \widehat{AB_i} \tan V$$

$$\cot A''_i = \cos \widehat{AB_{i+1}} \tan (V + dV) \text{ d'où } : A_i = A'_i - A''_i$$

Le fait de trouver par cette méthode les mêmes angles A_i que dans la méthode de P. Nunes, qui passe par l'intermédiaire des arcs $\widehat{B_1B_2}, \widehat{B_2B_3}, \widehat{B_3B_4}$ etc. vérifie aussi l'exactitude des calculs de ces arcs.

Je viens de décrire en langage mathématique moderne la méthode de calcul de rumbes par P. Nunes, donc sa manière de définir les sept rumbes par les coordonnées géographiques (longitude et latitude) d'un certain nombre de leurs points, P. Nunes ayant eu, en outre, le souci de calculer les longueurs des arcs de grands cercles séparant ces différents points.

Le texte latin des *Opera* ne comporte aucune formule, mais de longues phrases exprimant les relations mathématiques uti-

lisées par P. Nunes. Ce manque total de symbolisation mathématique et des confusions dans les notations rendent le texte des *Opera* de P. Nunes difficile à comprendre pour un lecteur moderne ; peut-être l'était-il aussi pour un contemporain ou un successeur immédiat de P. Nunes (voir ci-après les commentaires erronés de Simon Stevin).

5. Étude de la précision de la table des rumbes de P. Nunes

Pour chaque longitude $\lambda_i = \sum \widehat{A_i}$ obtenue dans la table, j'ai calculé la latitude φ_L de la loxodromie exacte en utilisant l'équation rigoureuse de la loxodromie :

$$\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_L}{2} \right) = e^{\lambda \cot V}$$

J'ai comparé la latitude φ_N de la table de rumbes de P. Nunes à la latitude exacte φ_L correspondante, puis calculé les écarts $e = \varphi_N - \varphi_L$ pour les sept rumbes, mais je me contente de présenter, dans le tableau 2, les résultats concernant le deuxième rumb, d'azimut $V = 22^\circ 30'$.

Les écarts $\varphi_N - \varphi_L$ sont tous négatifs et atteignent pour le point B_{17} la valeur maximale $e_m = \varphi_N - \varphi_L = -0,83956^\circ$.

J'ai en outre comparé le rumb de P. Nunes d'azimut $\text{Est } V = 22^\circ 30'$ avec la loxodromie exacte correspondant à l'angle $V + \frac{dV}{2}$; en effet chaque arc élémentaire de grand cercle a un azimut moyen de l'ordre de grandeur de la moyenne arithmétique $\frac{V + V + dV}{2}$, V et $V + dV$ étant les azimuts aux extrémités de chaque arc élémentaire. Cette moyenne est bien $V + \frac{dV}{2}$; il est clair que la loxodromie d'azimut $V + \frac{dV}{2}$ est plus proche du rumb de P. Nunes d'azimut V que la loxodromie d'azimut V . J'ai donc calculé pour chacun des points du deuxième rumb de P. Nunes la latitude exacte φ'_L par :

$$\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'_L}{2} \right) = e^{\lambda \cot (V + \frac{dV}{2})} \text{ avec } V = 22^\circ 30' \text{ et } \frac{dV}{2} = 0,5^\circ$$

J'ai comparé la latitude obtenue selon la méthode de Nune- φ_N à φ'_L et inscrit dans la colonne 7 du tableau 2 les écarts $\varphi_N - \varphi'_L$. L'écart maximum descend à $e'_m = \varphi_N - \varphi'_L = 0,13322^\circ$.

Ainsi la table de rumb de Nunes aurait présenté – si elle avait été calculée en 1566 – une précision suffisante pour les besoins de la navigation à voile de l'époque.

Tableau 1 : Petri nonii salaciensis Opera

Longitudo	Prima quarta hinc quatuordecim gradibus a North							Tertia quarta hinc quatuordecim gradibus a North							Quarta quarta hinc quatuordecim gradibus a North							Quinta quarta hinc quatuordecim gradibus a North						
	Gr.	Al.	Gr.	Al.	Gr.	Al.	Gr.	Al.	Gr.	Al.	Gr.	Al.	Gr.	Al.	Gr.	Al.	Gr.	Al.	Gr.	Al.	Gr.	Al.	Gr.	Al.	Gr.	Al.	Gr.	Al.
1	16° 52'	18° 38'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'
2	16° 52'	18° 38'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'
3	16° 52'	18° 38'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'
4	16° 52'	18° 38'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'
5	16° 52'	18° 38'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'
6	16° 52'	18° 38'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'
7	16° 52'	18° 38'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'
8	16° 52'	18° 38'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'
9	16° 52'	18° 38'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'
10	16° 52'	18° 38'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'
11	16° 52'	18° 38'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'
12	16° 52'	18° 38'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'
13	16° 52'	18° 38'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'
14	16° 52'	18° 38'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'
15	16° 52'	18° 38'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'
16	16° 52'	18° 38'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'
17	16° 52'	18° 38'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'
18	16° 52'	18° 38'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'
19	16° 52'	18° 38'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'	1° 25'	21° 34'

Tableau 2 : Précision sur les latitudes du deuxième rumb $V = 22^\circ 30'$ et $dV = 1^\circ$. (Alors que P. Nunes a adopté $dV = 1^\circ$, on peut obtenir une plus grande précision en faisant par exemple $dV = 10'$)

Rumb de Nunes $dV = 1^\circ$		Loxodromie d'azimut $V = 22,5^\circ$		Loxodromie d'azimut $V + dV/2$ soit $22,5^\circ + 0,5 = 23^\circ$		
1	2	3	4	5	6	7
N° des points	Longitudes de Nunes $\lambda = \sum A_i$	Latitudes de Nunes $\varphi_N = 90^\circ - \widehat{AB}_i$	Latitude φ_L	Différence $\varphi_N - \varphi_L$	Latitude φ'_L	Différence $\varphi_N - \varphi'_L$
B ₂	6,96582°	16,31946°	16,58060°	-0,26114°	16,19057°	+0,12889°
B ₃	9,93840°	22,92094°	23,32141°	-0,40047°	22,78772°	+0,13322°
B ₄	12,26730°	27,87935°	28,37886°	-0,49951°	27,74710°	+0,13225°
B ₅	14,27042°	31,97055°	32,54572°	-0,57518°	31,84094°	+0,12961°
B ₆	16,07017°	35,49744°	36,13230°	-0,63487°	35,37118°	+0,12626°
B ₇	17,72893°	38,61660°	39,29928°	-0,68268°	38,49402°	+0,12258°
B ₈	19,28351°	41,42180°	42,14300°	-0,72120°	41,30304°	+0,11876°
B ₉	20,75773°	43,97461°	44,72683°	-0,75222°	43,85973°	+0,11488°
B ₁₀	22,16801°	46,31819°	47,09523°	-0,77704°	46,20717°	+0,11102°
B ₁₁	23,52623°	48,48421°	49,28085°	-0,79664°	48,37701°	+0,10720°
B ₁₂	24,84127°	50,49682°	51,30862°	-0,81180°	50,39337°	+0,10345°
B ₁₃	26,12000°	52,37494°	53,19810°	-0,82316°	52,27515°	+0,09979°
B ₁₄	27,36781°	54,13376°	54,96498°	-0,83121°	54,03755°	+0,09621°
B ₁₅	28,58904°	55,78574°	56,62214°	-0,83646°	55,69300°	+0,09274°
B ₁₆	29,78725°	57,34124°	57,18032°	-0,83908°	57,25187°	+0,08937°
B ₁₇	30,96535°	58,80901°	58,64857°	-0,83956°	58,72290°	+0,08661°
B ₁₈	32,12581°	60,19652°	61,03646°	-0,83812°	60,11358°	+0,08294°
B ₁₉	33,27071°	61,51026°	62,34523°	-0,83497°	61,43037°	+0,07989°
B ₂₀	34,40181°	62,75586°	63,58620°	-0,83034°	62,67983°	+0,07693°
B ₂₁	35,52064°	63,93830°	64,76268°	-0,82438°	63,86422°	+0,07408°
B ₂₂	36,62851°	65,06197°	65,87925°	-0,81728°	64,99065°	+0,07132°
B ₂₃	37,72652°	66,13080°	66,93997°	-0,80917°	66,06215°	+0,06865°
B ₂₄	38,81580°	67,14834°	67,94850°	-0,80016°	67,08226°	+0,06608°
B ₂₅	39,89712°	68,11776°	68,90814°	-0,79038°	68,05416°	+0,06360°
B ₂₆	40,97127°	69,04197°	69,82189°	-0,77992°	69,98075°	+0,06122°
B ₂₇	42,03987°	69,92360°	70,69247°	-0,76887°	69,86468°	+0,05592°
B ₂₈	43,10081°	70,76507°	71,52239°	-0,75732°	70,70837°	+0,05670°
B ₂₉	44,15735°	71,56860°	72,31394°	-0,74534°	71,51403°	+0,05457°
B ₃₀	45,20907°	72,33623°	73,06924°	-0,73301°	72,28373°	+0,05250°
B ₃₁	46,25641°	73,06987°	73,79023°	-0,72036°	73,01935°	+0,05052°

■ ■ ■ Mais on peut faire plus précis en prenant par exemple $dV = 10'$. pour le rumb de Nunes $V = 22^\circ 30'$, avec $dV = 10'$, on obtient pour les points B₂ à B₁₀ des écarts $\varphi_N - \varphi'_L$ compris entre -0,018° et -0,067°, soit entre -1'1 et -4'0.

Le tableau 3 résume pour les sept rumb les valeurs des écarts maximums $e'_m = \varphi_N - \varphi'_L$, les valeurs de la longitude λ_m et de la latitude φ_m correspondant à chaque écart maximum. La dernière ligne du tableau 3 indique le nombre de triangles qu'il a fallu résoudre pour atteindre chaque maximum.

Pour le septième rumb d'azimut $V = 78^\circ 45'$, qui s'élève très lentement en latitude, il a fallu résoudre 178 triangles, l'écart maximum, avec $dV = 1^\circ$, atteint -1,719°, ce qui constitue un *maximum maximorum*, mais en comparant le rumb de Nunes à la loxodromie d'azimut $V + \frac{dV}{2}$, soit $78^\circ 45' + 0^\circ 30' = 78^\circ 75'$, on obtient un écart maximum e'_m nettement moins élevé.

Tableau 3 : Écart maximum e_m pour les sept rumb ($dV = 1^\circ$).

	1 ^{er} rumb	2 ^e rumb	3 ^e rumb	4 ^e rumb	5 ^e rumb	6 ^e rumb	7 ^e rumb
A_z	11,25°	22,50°	33,75°	45,00°	56,25°	67,50°	78,75°
e_m	-1,466°	-0,840°	-0,660°	-0,621°	-0,683°	-0,907°	-1,719°
λ_m	15,309°	30,965°	48,932°	72,726°	107,294°	172,166°	360,272°
φ_m	60,746°	59,649°	55,869°	58,607°	58,063°	57,863°	58,048°
n	8	16	25	37	55	86	178

■ 5.1. Précision sur les longueurs d'arc entre les points B₁, B₂, B₃, B₄, ..., cas où $dV = 1^\circ$

Désignons par Δ_{sN} la longueur de chaque élément d'arc $\widehat{B_1B_2}$, $\widehat{B_2B_3}$, $\widehat{B_3B_4}$, ..., assimilé par P. Nunes à un arc de grand cercle, dont nous avons étudié le mode de calcul en 4.2 (phase 2).

La cinquième colonne du tableau 1 (deuxième colonne du rumb $V = 22^\circ 30'$) donne les valeurs de Δ_{sN} arrondies à la minute sexagésimale. J'ai porté dans la deuxième colonne du tableau 4 les valeurs de Δ_{sN} exprimées en degrés décimaux, avec quatre décimales, pour les neufs premiers arcs de ce rumb.

Dans la colonne 3 du tableau 4, j'ai reporté les différences de latitude $\Delta_{\varphi L}$ exprimées en degrés décimaux entre les points successifs de la loxodromie exacte, ces différences étant facilement tirées des valeurs de la colonne 4 du tableau 2.

Or la longueur Δ_{sL} de l'arc de la loxodromie exacte est donnée par :

$$\Delta_{sL} = \frac{\Delta_{\varphi L}}{\sin(90^\circ - V)}$$

ou (voir figure 9) :

$$\Delta_{sL} = \frac{\Delta_{\varphi L}}{\cos V}$$

Tableau 4 : Précision sur les latitudes du deuxième rumb
 $V = 22^\circ 30'$ et $dV = 1^\circ$. Δ_{sN} représente la longueur des arcs $\widehat{B_1B_2}$, $\widehat{B_2B_3}$ calculés par la méthode de P. Nunes, Δ_{ϕ_L} les différences de la latitude de la colonne 4 sur le tableau 3 ; Δ_{sL} s'obtient par $\Delta_{sL} = \Delta_{\phi_L} / \cos V$.

1	2	3	4	5	6
Arcs	Δ_{sN}	Δ_{ϕ_L}	Δ_{sL}	$\Delta_{sN} - \Delta_{sL}$	$(\Delta_{sN} - \Delta_{sL}) / \Delta_{sN}$
B ₁ B ₂	17,7067°	16,5806°	17,9467°	-0,2400°	-1,35/100
B ₂ B ₃	7,1699°	6,7408°	7,2962°	-0,1263°	-1,76/100
B ₃ B ₄	5,3858°	5,0575°	5,4741°	-0,0883°	-1,63/100
B ₄ B ₅	4,4440°	4,1669°	4,5102°	-0,0662°	-1,49/100
B ₅ B ₆	3,8311°	3,5866°	3,8821°	-0,0512°	-1,34/100
B ₆ B ₇	3,3883°	3,1670°	3,4279°	-0,0396°	-1,17/100
B ₇ B ₈	3,0472°	2,8437°	3,0780°	-0,0308°	-1,01/100
B ₈ B ₉	2,7731°	2,5838°	2,7967°	-0,0236°	-0,85/100
B ₉ B ₁₀	2,5458°	2,3684°	2,5635°	-0,0177°	-0,69/100

J'ai reporté dans la colonne 4 du tableau 4 les valeurs de Δ_{sL} pour $V = 22^\circ 30'$. À la colonne 5, j'ai effectué les différences $\Delta_{sN} - \Delta_{sL}$, qui sont les écarts entre les arcs de la table de rumb de P. Nunes et les longueurs d'arc de loxodromie exacte. Ces écarts sont tous négatifs, les éléments d'arc de grand cercle étant – comme il fallait s'y attendre – toujours plus courts que les arcs de loxodromie exacte. Pour les deux premiers arcs de forte amplitude, près de 18° pour $\widehat{B_1B_2}$ et plus de 7° pour $\widehat{B_2B_3}$, les différences atteignent respectivement $-0,2400^\circ$ et $-0,1253^\circ$, mais pour les autres arcs les différences sont comprises entre les chiffres arrondis $-0,09$ et $-0,02^\circ$, soit entre $-5',4$ et $1',2$.

À la colonne 6, j'ai reporté les valeurs des erreurs relatives, quotients des erreurs absolues $\Delta_{sN} - \Delta_{sL}$ par la valeur de l'arc Δ_{sN} . Ces erreurs relatives ne dépassent pas $-1,76\%$.

Le loc'h, qui permet la mesure de la vitesse du navire ainsi que la longueur d'un trajet parcouru en mer lorsqu'on mesure le temps de parcours, n'a été découvert qu'à l'époque de P. Nunes. En effet la première mention du loc'h et sa description figurent dans le manuel de navigation *A regiment for the sea*, de William Bourne, publié en 1577, soit onze ans après la parution des *Opera* de P. Nunes. Les erreurs relatives obtenues en utilisant le loc'h devraient être supérieures à celles concernant les erreurs $\frac{\Delta_{sN} - \Delta_{sL}}{\Delta_{sN}}$ obtenues par la méthode de P. Nunes.

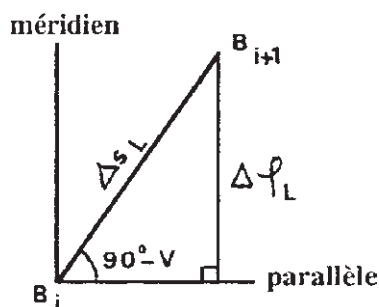


figure 9

En ce qui concerne la table de rumb de P. Nunes proprement dite et la précision de celle-ci, les algorithmes de calcul sont faciles à établir, parce que la plupart des résultats sont exprimés par des multiplications. J'ai effectué tous ces calculs en 1987 au moyen d'une calculatrice de poche programmable.

6. Le tracé des rumb sur un globe terrestre dans les *Opera* de P. Nunes

La matérialisation de rumb sur un globe terrestre constitua une opération très répandue au XVI^e et au début du XVII^e siècle, mise en œuvre par des cosmographes, des navigateurs et des cartographes.

C'est la construction de rumb sur un globe terrestre par Mercator (1512-1594) qui fut à l'origine de la célèbre projection cylindrique conforme de Mercator, utilisée pour la première fois dans la carte *Ad usum navigantium*, éditée à Duisbourg en 1569, donc trois ans après la publication des *Opera* de P. Nunes.

Au chapitre 26 du livre II des *Opera*, P. Nunes décrit deux méthodes de tracé des rumb sur un globe terrestre.

■ 6.1. Première méthode

Elle se déduit aisément de la méthode mathématique et utilise la table de rumb de P. Nunes (voir tableau 1). Soit à déterminer sur le globe le point B₂ et le point B₃ du 2^e rumb d'azimut $V = 22^\circ 30'$ issu du point B₁, sur l'équateur (figure 10). Il y a deux variantes.

6.1.1 Utilisation de l'armille graduée (zéro au pôle) mobile autour de l'axe des pôles

D'après la table de rumb, B₂ a pour longitude $\lambda_2 = A_1$ pris dans la colonne 3 du tableau 1 et pour colatitude la mesure de l'arc $\widehat{AB_2}$ pris dans la colonne 1 de la table.

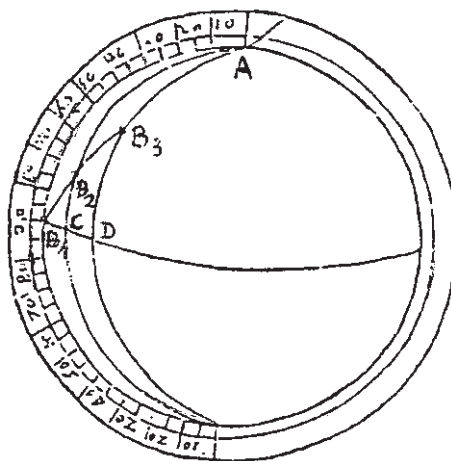


figure 10

- ■ ■ P. Nunes fait passer l'armille par le point C de l'équateur de longitude $\lambda_2 = A_1$ et marque sur le globe le point B_2 en face de la graduation en degrés correspondant à la valeur de l'arc $\widehat{AB_2}$. Il opère de même pour le point B_3 de longitude : $\lambda_2 = A_1 + A_2$ et de colatitude $\widehat{AB_3}$ (armille passant par le point D de l'équateur, de longitude λ_2) et ainsi de suite...

6.1.2. Sans armille

P. Nunes trace deux arcs de cercle ; l'un de centre A et de rayon sphérique⁴ $\widehat{AB_2}$ l'autre de rayon sphérique $\widehat{B_1B_2}$. On obtient deux points d'intersection ; celui qui est situé sur le méridien de C est le point B_2 cherché.

On opère de même pour le point B_3 qui est l'un des points d'intersection des deux cercles, le premier de centre A et de rayon sphérique $\widehat{AB_3}$ et le second de centre B_2 et de rayon sphérique $\widehat{B_2B_3}$ et ainsi de suite.

6.2. Deuxième méthode

Elle repose sur un procédé mécanique permettant une grande rapidité, au détriment de la précision selon P. Nunes. Il n'est plus nécessaire de calculer la table de rumb et P. Nunes réalise un quadrant sphérique (figure 11) en métal léger dont les côtés ml et mk sont perpendiculaires et sur lequel ont été matérialisés par des fentes les sept rumb intermédiaires.

Sur la figure 12, seul le rumb intermédiaire d'azimut $V = 45^\circ$ a été représenté selon la direction $\widehat{m_1q_1}$ et selon la direction $\widehat{m_2q_2}$.

J'utilise sur la figure 12 celle des *Opera* de P. Nunes et l'exemple qu'il donne pour le tracé du quatrième rumb d'azimut 45° , mais avec des notations plus rationnelles.

Il place l'origine m_1 du quadrant sphérique au point b (notre point B_1) sur l'équateur. Il tourne le quadrant jusqu'à ce que la direction $\widehat{m_1q_1}$ coïncide avec le méridien de b et il trace l'élément de rumb $\widehat{bl_1}$ le long du côté droit du quadrant.

Le quadrant étant sous l'armille, il déplace d'un mouvement lent à la fois l'armille et le quadrant, le côté $\widehat{m_1l_1}$ de celui-ci restant en coïncidence avec l'élément de rumb $\widehat{bl_1}$ déjà tracé, il arrête les deux mouvements en un point x tel qu'en celui-ci la direction $\widehat{m_2q_2}$ du quadrant fasse avec l'armille méridienne un angle de 1° . Ce point est bien l'extrémité du premier arc de rumb, puisque en ce point l'azimut du rumb est de $45^\circ + 1^\circ$. Le centre du quadrant sphérique étant maintenu en x , homologue de notre point B_2 , il tourne le quadrant de façon à faire coïncider $\widehat{m_2q_2}$ avec la direction $\widehat{m_2q}$ de l'armille et, le long du côté droit du quadrant, il trace la direction $\widehat{xh_2}$, qui correspond de nouveau à un arc de rumb d'azimut $V = 45^\circ$ en $x(B_2)$. Il déplace à nouveau armille et quadrant comme il l'a fait pour le premier arc et il obtient le point y , homologue de notre point B_3 , non représenté sur la figure et ainsi de suite. En fait, si le procédé mécanique de P. Nunes paraît satisfaisant sur le plan théorique, puisqu'il est la réplique exacte du mode de calcul de sa table de rumb, il nous semble qu'il devait être difficile à être mis pratiquement en œuvre et il se différencie

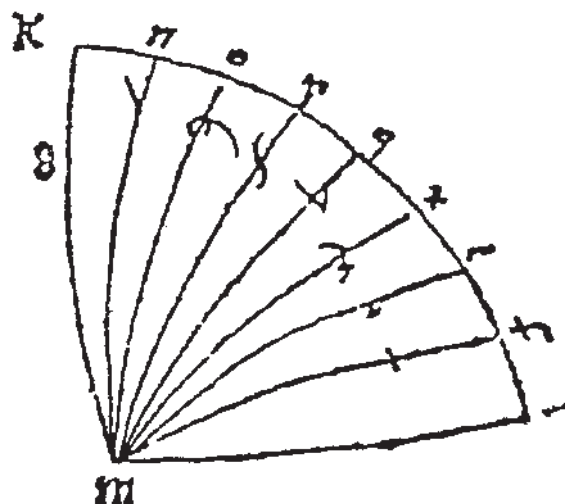


figure 11

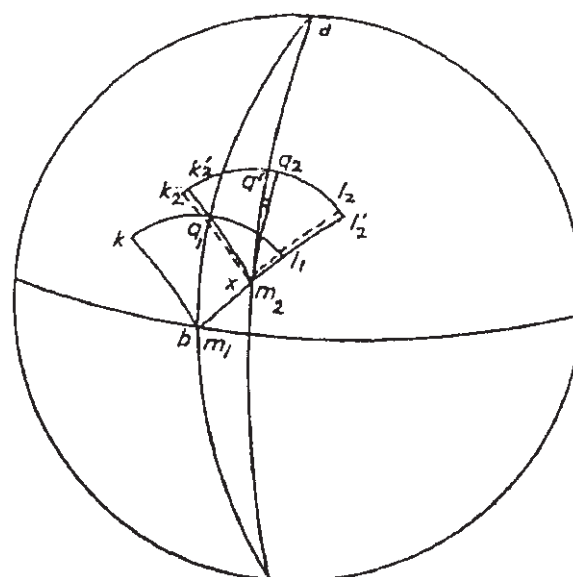


figure 12

nettement des procédés beaucoup plus simples qui ont été utilisés par Stevin et aussi par Mercator, bien que celui-ci n'ait pas décrit la méthode qu'il a employée.

7. La critique injustifiée de la théorie de la loxodromie de Pedro Nunes. Conclusion

En 1605, après la publication des *Opera*, paraît l'édition en flamand de *Wisconstige Ghedachtenissen* (Mémoires de mathématiques) de l'ingénieur et mathématicien flamand Simon Stevin (1548-1620). Celui-ci est surtout célèbre par ses travaux d'hydrostatique et par l'introduction des fractions décimales. L'ouvrage en question contient un jugement tout à fait fallacieux de la méthode de P. Nunes. L'ouvrage flamand est traduit en latin entre 1605 et 1608 par Willebrord Snell van Royen (1580-1620) et est publié à Lyon en 1608 sous le titre *Hypomnemata mathematica*. L'astronome et mathématicien

(4) Le cercle de rayon sphérique $\widehat{AB_2}$ a pour rayon linéaire la corde de l'arc.

W. Snell, plus connu sous le nom de W. Snellius, est célèbre pour avoir introduit en géodésie la méthode de la triangulation et pour avoir – avant Descartes – découvert les lois de la réfraction. W. Snellius fit éditer en outre en 1624 son *Tiphus Batavus*. En 1634 paraît à Leyde (Pays-Bas) une édition en français des *Wisconstige Ghedachtenissen* de S. Stevin ; il s'agit d'une traduction par Albert Girard, mathématicien flamand, contenant notamment le quatrième livre *De l'histiodromie ou cours des navires*. "L'appendice des rombs" de ce livre comporte un chapitre intitulé "Des fautes es nombres des rombs faits par Petrus Nonius". S. Stevin base tout son raisonnement sur la figure 13, où l'ensemble des points RYABZ sont considérés comme étant ceux de la théorie de P. Nunes pour $V = 45^\circ$, mais écartés en longitude régulièrement de 1° (il écrit $\widehat{MRC} = \dots = \widehat{BMZ} = 1^\circ$), alors que cet angle est relatif à la différence d'azimuts entre les deux extrémités des arcs élémentaires de grand cercle en lesquels est décomposée la loxodromie ; cette condition impose des différences de longitude irrégulières entre les points successifs. Cette incompréhension grossière suffit à réduire à néant le jugement de Stevin. En outre celui-ci commet une faute de calcul dans la poursuite de son raisonnement. Or, par ses deux traductions, l'ouvrage de Stevin eut une certaine diffusion en Europe au début du XVII^e siècle et le jugement fallacieux de Stevin, qui n'avait aucun fondement, perdura longtemps.

Dans un article de 1915 intitulé "Gerhard Mercator und die ersten loxodromen auf Karten" in *Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie* (Berlin 1915) l'auteur Hermann Wagner, historien des sciences allemand, reprend le jugement fallacieux de Stevin sur la théorie de la loxodromie de P. Nunes, sans chercher à savoir s'il est fondé. Cet article fut à l'origine d'une polémique avec le portugais Joaquim Bensaúde auteur d'un ouvrage : *Histoire de la science nautique portugaise* (Genève 1917). Cette polémique se poursuivit par la publication en 1918 d'un autre article de H. Wagner

intitulé : "Die loxodromische Kurve bei G. Mercator, eine Abwehr gegenüber Joaquim Bensaúde" in *Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaft zu Göttingen* (Berlin 1918). H. Wagner y reconnaît la priorité de la découverte de la loxodromie par P. Nunes et le fait qu'il fut le premier à dessiner des rumb sur une projection équidistante polaire, mais qu'il le fit avec des fautes. Par contre Mercator, qui ne précise pas comment il a tracé des rumb sur un globe, le fit correctement en 1541, alors que Nunes indiquait sa méthode de tracé des rumb sur un globe seulement dans ses *Opera* de 1566. En ce qui concerne la théorie de la loxodromie, Joaquim Bensaúde ne sut pas démontrer à son interlocuteur que S. Stevin avait eu totalement tort dans sa critique de P. Nunes.

Plus récemment, en 1991, parut dans *Scholies* n°13 un article de Bernard Leclerc intitulé "Histoire de la loxodromie au XVII^e siècle", rédigé avant que l'auteur n'ait eu connaissance de mes deux publications (la première à Paris en 1989, la seconde à Lisbonne en 1990) concernant l'historique de la loxodromie.

Comme dans son article Bernard Leclerc avait repris le jugement erroné de Stevin sur P. Nunes, il m'écrivit en 1994 : "Je regrette de n'avoir pu disposer d'une telle source d'information lors de la rédaction de mon travail en 1990-1991. Cela m'aurait évité entre autres de perpétuer le commentaire erroné de S. Stevin en reprenant à mon compte ses critiques injustifiées de Nunes."

Ainsi, à notre connaissance, personne avant 1915, ni entre 1918 et 1989-1990, n'avait approfondi la théorie de P. Nunes sur la loxodromie et sa méthode d'établissement de sa table de rumb. Personne non plus n'avait été établi que le jugement de Stevin sur la théorie de P. Nunes était fallacieux. Les scientifiques portugais me sont reconnaissants de l'avoir fait.

DE L'HISTIODROMIE

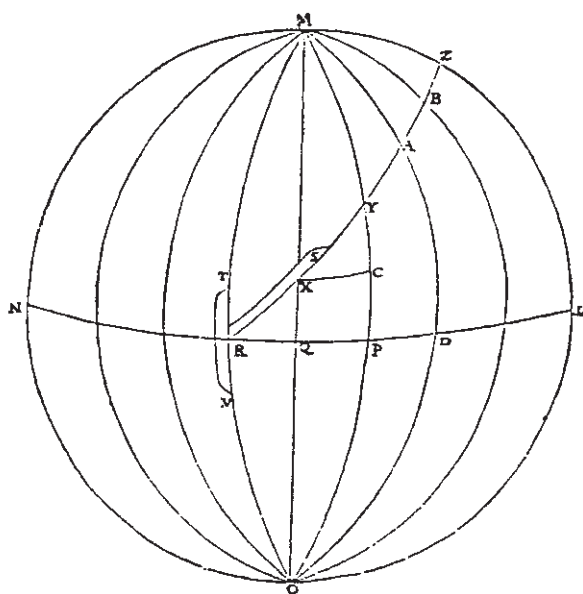


figure 13

8. Que conclure de notre étude ?

Pedro Nunes était un remarquable théoricien, en avance sur son temps. Sa théorie de la loxodromie et le mode de calcul de sa table de rumb préfigurent les méthodes de géométrie infinitésimale et de calcul différentiel, qui verront le jour en 1675 avec Leibniz, donc 110 ans après la publication des *Opera*. P. Nunes n'a pas été compris par ses contemporains ou successeurs immédiats, comme le montre le jugement erroné de S. Stevin.

Les calculs de sa table de rumb n'intéressaient pas P. Nunes : il était conscient de l'énormité des calculs que nécessitait sa méthode, avec les faibles moyens de l'époque, sans pouvoir recourir aux logarithmes. C'est la raison pour laquelle il publia sa table de rumb avec les colonnes vides. En tant que concepteur, il estimait avoir mieux à faire que d'exécuter lui-même des calculs de nature assez répétitive.

La table de rumb de P. Nunes avait deux inconvénients :

- elle nécessitait de longs calculs,
- elle présentait des intervalles irréguliers en longitude entre les différents points de chaque rumb. Par contre, les tables

- ■ ■ de rumb d'Edward Wright, qui suivront, comportent des différences de longitude égales uniformément à 1° ou à $10'$ entre les différents points du rumb.

On peut opposer les deux grands esprits de la Renaissance que sont le théoricien mathématicien P. Nunes et le praticien, cartographe et calligraphe G. Mercator. En raison des liens qui existaient entre l'université de Coimbre et celle de Louvain au temps de Charles Quint, Mercator fut vite au courant du contenu du premier traité en portugais de Pedro Nunes de 1537, innovant le concept de loxodromie et il eut l'idée de tracer des loxodromies sur son globe de 1541 ; de ces tracés il déduisit le canevas en "latitude croissante" de son célèbre planisphère de 1569 *Ad usum navigantium*, qui permettait de résoudre graphiquement et correctement les problèmes de la navigation loxodromique : sur ce planisphère les loxodromies sont rigoureusement représentées par des droites, alors que l'utilisation des précédentes cartes, plates, portulans et cartes dites à rumb (il s'agit en fait de pseudo-rumb) entraînaient des erreurs parfois considérables. P. Nunes était, comme Mercator, parfaitement conscient des insuffisances de ces cartes, mais il n'eut pas le génie de Mercator d'imaginer le concept de latitudes croissantes, alors qu'il était l'initiateur du concept de loxodromie et que le tracé sur un globe terrestre des sept loxodromies du premier quadrant a servi de base à Mercator pour établir son canevas.

Ma communication à Lisbonne continuait par la démonstration de la loi d'écartement des parallèles en projection de Mercator : $\Delta y = \frac{\Delta \varphi}{\cos \varphi}$, mise en évidence pour la première fois par Edward Wright dès 1589. Celui-ci trace son canevas de latitudes croissantes en utilisant la notion de "sécantes cumulées" 5 (On rappelle que $\sec \varphi = (\cos \varphi)^{-1}$).

$$W = \sum \frac{\Delta \varphi}{\cos \varphi}$$

Si $\Delta \varphi = 1^\circ$, on a $W = 1^\circ (\sec 1^\circ + \sec 2^\circ + \dots + \sec n^\circ)$. Edward Wright est le premier réalisateur de tables de rumb, non virtuelles comme l'étaient celles de P. Nunes.

Ma communication passait ensuite en revue les contributions de Stevin, de Snellius, de Gregory, de Barrow, de Wallis, de Bernoulli, ce dernier ayant découvert l'équation de la spirale logarithmique. En 1695 seulement l'astronome Edmund Halley, qui découvrit la comète qui porte son nom, établit l'équation rigoureuse de la loxodromie, à partir de celle de la spirale logarithmique, qui est sa projection stéréographique polaire. Cette équation comporte celle de la latitude croissante :

$$y = L = \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$$

Ainsi entre la naissance du concept de loxodromie en 1537, dû à P. Nunes, et la formulation de son équation rigoureuse par E. Halley en 1695, il s'est écoulé 158 ans. Or la démonstration de la formule de la latitude croissante et de celle de la loxodromie prend actuellement moins d'une page dans un traité de navigation ou un traité de cartographie mathématique.

Mais il a fallu attendre la découverte des logarithmes népériens en 1614, celle de la géométrie infinitésimale et du calcul différentiel par Leibniz en 1676 pour arriver à formuler la loi rigoureuse de la latitude croissante et l'équation de la loxodromie. ●

Remerciements

Dans le n° 98 de mars 2004 de XYZ, nous avons rendu compte de la publication des Actes de la conférence internationale, tenu à Lisbonne et à Coimbre, en mai 2002, pour commémorer le 500^e anniversaire de la naissance du grand cosmographe portugais Pedro Nunes. Dans ces actes figure le texte complet de la communication présentée par notre collègue Raymond D'Hollander, intitulé : "La théorie de la loxodromie de Pedro Nunes". L'article ci-dessus du même auteur a paru dans le volume 52 n° 205 de la Revue "Navigation" de janvier 2004.

Nous remercions l'Administrateur général des Affaires Maritimes J. L. Guibert, directeur de la Revue "Navigation" de l'Institut français de navigation, d'avoir bien voulu autoriser la publication de cet article dans XYZ. L'article présente un exposé complet de la théorie de la loxodromie de Pedro Nunes, mais il est écourté en ce qui concerne les contributions d'auteurs postérieurs à Pedro Nunes ayant traité de la loxodromie.

ABSTRACT

On March 2002, Portugal celebrated the 500th anniversary of the birth of the great Portuguese cosmographer Pedro Nunes who created the loxodrome concept (called rhumb line at that time). His loxodromics theory was first expounded in two Portuguese treatises, and then developed in Petri Nonii Salaciensis Opera. In this book published in Basle in 1566, Nunes was the first who set out the way to establish a rhumb table. However, at the beginning of the 17th century, his theory was wrongly considered as untrue by the Flemish Simon Stevin whose lack of understanding is explained in this article. This error was not denounced for almost three centuries.