

## Quelques réflexions sur la réfraction d'un rayon lumineux dans l'air

■ Robert VINCENT

*La Terre est entourée d'une atmosphère qui, comme tout milieu transparent, est caractérisée par un indice de réfraction.*

*Cet indice varie d'un point à un autre, suivant divers paramètres et, du fait de ce gradient, les rayons lumineux qui traversent l'atmosphère sont très légèrement courbés. La propagation rectiligne de la lumière n'est rigoureuse que dans un milieu d'indice constant, comme le vide. Les sciences, telles l'astronomie, la géodésie ou la topographie, tiennent compte nécessairement de ce phénomène, et nous allons en exposer ici quelques facettes.*

*En particulier, pour démontrer la courbure d'un rayon lumineux traversant un milieu transparent non homogène, et contrairement à de nombreuses théories qui s'appuient toutes sur la loi de la réfraction de Snell-Descartes, nous présentons ici un raisonnement qui part du principe de Fermat et qui nous semble original.*

### Indice de réfraction de l'air

L'indice de réfraction de l'air  $n$  est légèrement supérieur à 1. L'excédent à l'unité ( $n-1$ ), est proportionnel à la densité de l'air  $\Delta$  qui elle-même est fonction de la pression barométrique  $P$ , principalement tributaire de l'altitude, et de la température  $T$ , également tributaire de l'altitude mais qui varie aussi suivant la saison et l'heure dans la journée.

Une approche de la relation entre ces trois variables  $n$ ,  $P$  et  $T$ , est donnée par la loi de Mariotte sur la compressibilité des gaz, si tant est que l'on puisse assimiler l'air à un "gaz parfait" :

$$PV = RT$$

formule dans laquelle  $V$  est le volume occupé par une certaine quantité de gaz à la pression  $P$  et à la température  $T$  et où  $R$  est une constante.

L'excédent à l'unité ( $n-1$ ) de l'indice  $n$  de réfraction de l'air, est proportionnel à la densité de l'air, donc inversement proportionnel à  $V$

$$n-1 = P/kT$$

L'excédent à l'unité de l'indice de réfraction de l'air ( $n-1$ ), est proportionnel à la pression  $P$  et inversement proportionnel à la température absolue  $T$  ( $= t + 273^\circ$ , 15).

### Gradient vertical d'indice de réfraction

Dans l'atmosphère, la pression et la température varient avec l'altitude  $H$ . En un point, la pression et la température présentent un gradient généralement vertical :  $dP/dH$  et  $dT/dH$ .

Il s'ensuit qu'en ce point, l'indice de réfraction présente, lui aussi, un gradient vertical  $dn/dH$ .

Les dérivées logarithmiques des termes de la dernière formule donnent la relation :

$$dn/(n-1) = dP/P - dT/T$$

d'où :  $dn/dH = (n-1) (dP/dH/P - dT/dH/T)$

L'équation de l'équilibre barométrique donne d'autre part :

$dP/dH = g \Delta$  (masse volumique de l'air avec  $g$  accélération de la pesanteur)

### ■ mots clés

Indice de réfraction de l'air, gradient d'indice de réfraction de l'air, courbure d'un rayon lumineux dans l'atmosphère, Pierre de Fermat, réfraction atmosphérique et réfraction astronomique, le rayon vert.

d'où :  $dn/dH = (n-1) (-g \Delta/P - dT/dH/T)$   
d'où :  $dn/dH = - [(n-1)/T] (g \Delta T/P + dT/dH)$  (1)

Valeur numérique à la pression normale, au niveau de la mer et à la température  $0^\circ$  :

$g \Delta =$  masse volumique de l'air

$= 1,293 \text{ kg/m}^3$

$P = 10332 \text{ kg/m}^2$

$n = 1,000293$

$T = 273^\circ, 15$

$dn/dH = - 0,000001073 (34,18 + dT/dH)$  (2)

avec la constante 34,18 et  $dT/dH$  en  $^\circ/\text{km}$ . Le signe - indique que l'indice décroît généralement avec l'altitude.

### Courbure du rayon lumineux dans l'atmosphère

Du fait de ce gradient vertical d'indice de réfraction de l'air, un rayon lumineux qui traverse l'atmosphère est cintré dans son plan vertical. Ceci est vrai même en un point où le rayon est horizontal, plus précisément tangent à une

surface équi-indice. C'est même dans ce cas, qu'il est le plus cintré. C'est assez subtil car, dans un milieu homogène d'indice constant, à gradient nul donc, le rayon ne rencontre là aussi, en tout point de son parcours, qu'un milieu de même indice, mais il est alors rectiligne !

Quelques auteurs admettent ce fait sans en aborder la démonstration. D'autres proposent l'étude d'un rayon lumineux oblique qui traverse des couches d'air d'indice décroissant avec l'altitude, pour en déduire une courbure à l'instar de la succession d'une infinité de petits dioptries. De plus, la courbure de Terre entre alors souvent dans le raisonnement, bien que la courbure du rayon lumineux dans l'atmosphère ne dépende pas de la courbure de l'atmosphère due à la courbure terrestre. La courbure du rayon lumineux serait en effet la même, pour peu que le gradient d'indice soit le même, que ce soit sur une "Terre plate" ou sur une Terre d'un diamètre quelconque. Ces méthodes ne sont pas entièrement satisfaisantes, car elles peuvent laisser penser que la courbure du rayon est liée à la traversée de couches d'indice croissant ou décroissant, alors qu'il n'en est rien comme le prouve l'existence d'une courbure en un point où le rayon est tangent à une surface équi-indice. De plus, elles ne montrent pas clairement qu'**en un point, la courbure d'un rayon lumineux n'est due qu'au gradient de l'indice de réfraction qui y règne.**

La démonstration qui va suivre, s'appuie sur le principe de Fermat.

**Pierre de FERMAT énonça au milieu du XVII<sup>e</sup> siècle, cette proposition remarquable : la lumière, pour aller d'un point à un autre, suit toujours le chemin qui correspond au temps le plus court, Dans un milieu à l'indice de réfraction variable, ceci ne veut pas dire le chemin le plus court !**

**James Clerk MAXWELL nous fit comprendre à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, que l'indice de réfraction d'un milieu n'est autre que le rapport entre les vitesses de la lumière dans le vide et dans ce milieu. La vitesse de propagation de la lumière est ainsi d'autant plus grande que l'indice est plus faible.**

**De ces deux propositions, on en déduit une troisième : un rayon lumineux, dans un milieu à l'indice de réfraction variable, présente une courbure égale à la composante du gradient d'indice, normale au rayon.**

Considérons le cas habituel où dans l'air, l'indice de réfraction diminue avec l'altitude. Entre deux points, la lumière pour aller de l'un à l'autre, ne suivra pas tout à fait la droite joignant les deux points. Elle mettra moins de temps en suivant un arc de cercle supérieur, certes très tendu, et dont le parcours est à peine plus long de la petite différence entre l'arc et la corde, mais qui lui permettra par contre, de traverser des couches d'indice plus faible, donc de parcours plus rapide. En fin de compte, elle mettra le minimum de temps pour joindre les deux points, en adoptant la courbure opti-

male autour de laquelle les variations des gains et pertes de temps dues respectivement à des variations de la vitesse et de la longueur du trajet, se compenseront exactement. C'est ce que nous allons montrer.

## ■ Disposition géométrique

Soit A et B deux points dans un espace où l'indice de réfraction de l'air  $n$  est variable. Soit M le milieu du segment de droite AB où l'indice varie suivant un gradient d'indice  $G$ , représenté par un vecteur normal à la surface équi-indice passant par M et orienté vers l'indice le plus élevé. On admettra que l'espace contenant les points A et B est suffisamment petit pour que ce gradient puisse être considéré comme constant.

Plaçons nous dans le plan contenant AMB et le vecteur  $G$  issu de M.

Soit un arc de cercle tendu entre ces deux points A et B, du côté où l'indice de réfraction  $n$  de l'air est plus faible, et dont la courbure est  $C$  (inverse du rayon  $R$ ). Soit N le milieu de l'arc, et soit  $m$  et  $n$  des points courants en vis-à-vis sur la droite et sur l'arc.

Soit enfin  $D$  la distance entre les points A et B, et  $\Omega$  le demi-arc AN ou NB et  $\omega$  l'arc Nn.

Les quantités  $D/R$  ou  $DC$  sont des infiniment petits du premier ordre.

$\Omega = \text{arc sin } D/2R = \text{arc sin } DC/2$  et en se limitant aux deux premiers termes du développement de la fonction arc sin :  
 $\Omega = D C/2 + D^3 C^3/48$

la longueur de l'arc AB est :

$$2 R \Omega = 2 \Omega / C = D + D^3 C^2/24$$

**La longueur de l'arc AB est :**

$$D (1 + D^2 C^2/24)$$

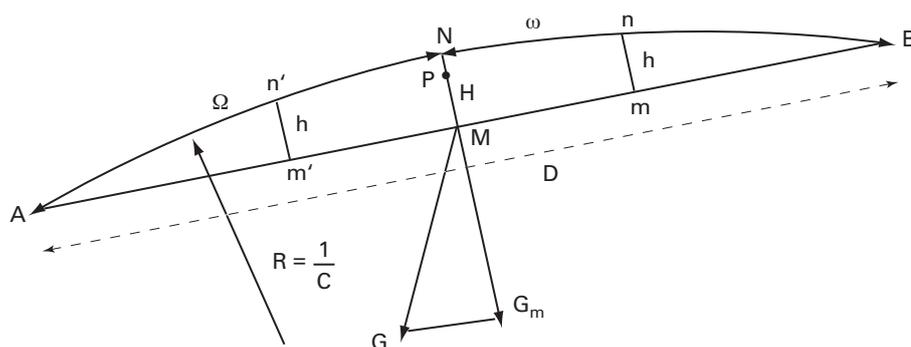
**La flèche MN de l'arc est  $H =$**

$$R - R \cos \Omega \approx R \Omega^2/2 = \Omega^2/2C = D^2 C/8$$

La distance mn entre la droite et l'arc, est  $h = H (1 - \omega^2/\Omega^2)$

## ■ Vitesse de la lumière dans l'espace autour du segment AB

Soit  $G_n = dn/dh$  la composante du gradient d'indice de l'air  $G$ , normale au segment AB, comptée négativement en allant du segment AB vers l'arc AB, puisque nous nous plaçons dans le cas d'un arc situé du côté de la corde AB où l'indice de réfraction  $n$  de l'air est plus faible.



Soit  $V_m$  et  $V_n$  la vitesse de la lumière respectivement aux points  $m$  et  $n$ . Suivant **Maxwell**, le rapport des vitesses  $V_n$  et  $V_m$ , est égal à l'inverse du rapport des indices aux points  $n$  et  $m$ . Il s'ensuit que sur le segment  $mn$ , la composante du gradient de la vitesse de la lumière :  
 $dv/dh = - dn/dh = - G_n$ .

Les vitesses  $V_n$  et  $V_m$  sont liées par la relation :

$$V_n = V_m [1 + (dv/dh) h]$$

$$d'où : V_n = V_m (1 - G_n h)$$

$$V_n = V_m [1 - G_n H (1 - \omega^2/\Omega^2)]$$

### ■ Temps de parcours de l'arc AB, à la vitesse de la lumière

Cherchons à exprimer le temps qu'il faut pour parcourir l'arc AB à la vitesse de la lumière  $V_n$ , variable en tous points de l'arc :

$$V_n = R d\omega/dt, d'où :$$

$$dt = R d\omega/V_n, d'où encore :$$

$$dt = R d\omega / (V_m [1 - G_n H (1 - \omega^2/\Omega^2)])$$

et enfin :

$$dt = (R/V_m) [1 + G_n H (1 - \omega^2/\Omega^2)] d\omega$$

On ne peut procéder à l'intégration de cette équation différentielle, en l'état, car, tout comme  $V_n$  est variable le long de l'arc AB,  $V_m$  est variable le long du segment AB, mais cette fois quasi linéairement en fonction de la composante longitudinale du gradient de l'indice de réfraction  $G_l$ . Aussi, à chaque couple de points  $mn$ , on peut faire correspondre un couple de points  $m'n'$ , symétriques par rapport à la flèche MN. Il vient :

$$dt' = (R/V_{m'}) [1 + G_n H (1 - \omega^2/\Omega^2)] d\omega$$

$$dt + dt' = [(R/V_m) + (R/V_{m'})] [1 + G_n H (1 - \omega^2/\Omega^2)] d\omega$$

Entre les indices de réfraction en  $m$ ,  $m'$  et  $M$ , on a :  $n_m + n_{m'} = 2 n_M$ , d'où, si  $V_M$  est la vitesse de la lumière en  $M$  :

$$1/V_m + 1/V_{m'} = 2/V_M$$

$$dt + dt' = (2R/V_M) [1 + G_n H (1 - \omega^2/\Omega^2)] d\omega$$

et en intégrant maintenant,  $\omega$  allant de 0 à  $\Omega$  :

$$t + t' = (2R/V_M) [\Omega + G_n H (\Omega - \Omega^3/3\Omega^2)]$$

Or  $t + t' = T_c$  temps de parcours de l'arc à la vitesse de la lumière

$$T_c = (2R \Omega/V_M) (1 + G_n 2H/3)$$

On remarque que l'arc, de longueur  $2R \Omega$  est parcouru à la vitesse moyenne  $V_p$  vitesse de la lumière régnant au point  $P$ , point situé sur la flèche MN, au 2/3 de M

vers  $N$ . En effet,  $V_p = V_M (1 - G_n 2H/3)$   
 On a établi ci-dessus que :  
 $2R \Omega = D (1 + D^2 C^2/24)$  et  $H = D^2 C/8$   
 $T_c = D [(1 + D^2 C^2/24)/V_M] (1 + G_n D^2 C/12)$   
 $T_c = (D/V_M) (1 + D^2 C^2/24) (1 + G_n D^2 C/12)$   
 **$T_c = (D/V_M) (1 + D^2 C^2/24 + G_n D^2 C/12)$**

On remarque que le temps de parcours est  $T_c = D/V_M$  pour  $C = 0$  (courbure nulle = segment AB) mais aussi pour une courbure  $C = -2 G_n$

### ■ Trajet suivi par la lumière

Selon **Pierre de Fermat**, la lumière va suivre l'arc dont la courbure  $C_L$  rend minimum la durée du trajet  $T_c$ . La valeur de  $C_L$  est donc celle qui annule la dérivée  $dT_c/dC$  :

$$dT_c/dC = (D/V_M) (2 D^2 C/24 + G_n D^2/12)$$

$$dT_c/dC = (D^3/12 V_M) (C + G_n)$$

### La lumière suit la ligne de courbure $C_L = -G_n$ (3)

Son temps de parcours est  $T_{co} = (D/V_M) [1 - (D^2 C^2/24)]$ . Le gain de temps, en passant par l'arc au lieu de la ligne droite, est  $D^3 C^2/24 V_M$ . Or,  $D^3 C^2/24$  est l'excédent de longueur de l'arc sur la corde. En suivant l'arc, la lumière gagne le temps qu'elle aurait perdu si elle avait eu la même vitesse que sur la droite.

**On retiendra qu'un rayon lumineux, en un point d'un milieu d'indice de réfraction non homogène caractérisé en ce point par un gradient d'indice, est courbé dans un plan parallèle à ce vecteur gradient d'indice, avec une courbure égale à la composante de ce vecteur, normale au rayon, et que la concavité de la courbe est tournée vers l'indice le plus élevé.**

On retrouve bien le résultat obtenu par les démonstrations qui s'appuient sur les lois de la réfraction de Snell-Descartes, ce qui montre l'équivalence de ces lois avec le principe de Fermat.

## Réfraction atmosphérique

Dans l'atmosphère terrestre, le gradient d'indice de réfraction est généralement vertical. Un rayon horizontal présente alors dans son plan vertical, une courbure  $C_o$  égale au gradient  $dn/dH$  :

$$C_o = - dn/dH$$

Sur un rayon oblique AB d'angle zénithal  $z$ , la courbure est  $C = C_o \sin z$  et la distance horizontale entre ces 2 points est  $D_o = D \sin z$ . L'angle des tangentes au rayon en ces deux points (angle de contingence) est  $CD = C_o D_o$ , ce qui montre que cet angle ne dépend pas de l'angle zénithal. Il s'ensuit que **l'angle de réfraction d'une visée AB, ne dépend pas de sa pente, mais de la longueur de sa projection horizontale.**

Le rayon de courbure du rayon horizontal  $R_o$ , est l'inverse de la courbure  $C_o$ .

Nous avons vu que  $dn/dH = -0,000001073 (34,18 + dT/dH)$   
 Dans ces conditions,  $R_o$  est en km :

$$R_o = 27300/[1 + (dT/dH)/34,18] \quad (4)$$

Dans les basses couches de l'atmosphère, près du sol, on admet pour valeur moyenne expérimentale du gradient de température,  $-11^\circ$  par km (rayon de courbure 40 000 km env.). Plus haut, si on se trouve dans un air en équilibre adiabatique (sans échange de chaleur), le gradient de température est à peu près constant jusqu'à 11 000 mètres d'altitude et vaut  $-6^\circ, 5$  par km (rayon de courbure 33 700 km env.). En pratique, le gradient est trouvé expérimentalement de l'ordre de  $-4^\circ, 5$  à  $-5^\circ$  par km (rayon de courbure 31 400 à 32 000 km)

La courbure du rayon devient nulle (rayon rectiligne) pour un gradient de  $-34^\circ$  par km. Au delà, et c'est le cas d'un rayon qui rase un sol surchauffé, le rayon est à nouveau cintré parfois fortement, mais alors vers le haut. C'est le phénomène du mirage. Il est dû à une inversion locale du gradient vertical d'indice, due elle-même à une inversion du gradient de densité de l'air, l'air près du sol étant plus léger que l'air des couches supérieures, car beaucoup plus chaud.

Ces mirages traditionnels sont aussi appelés mirages inférieurs, par opposition aux mirages supérieurs qui se produisent beaucoup plus rarement, quand le gradient de température dépasse les  $+110^\circ$  par km. Ce peut être le cas au petit matin, d'une couche d'air anormalement très froide près du sol, sous une couche supérieure plus chaude. Le rayon lumineux est alors fortement cintré dans le même sens et bien plus que la courbure de Terre, ce qui permet de voir "en l'air" des "oasis" normalement invisibles !

## ■ Niveau apparent

Dans les basses couches de l'atmosphère, le rayon de courbure d'un rayon lumineux horizontal est, dans les conditions normales, de 40 000 km environ et dans le même sens que la courbure terrestre, soit un peu plus de six fois le rayon de courbure terrestre. Du fait de la seule courbure terrestre, un point situé à la même altitude qu'un observateur, lui apparaît en dessous de son plan horizontal. La réfraction atmosphérique va atténuer cet effet d'un peu moins du sixième de sa valeur en faisant apparaître les objets terrestres plus hauts qu'ils seraient vus sans atmosphère. Cette réfraction, combinée avec la courbure terrestre est bien connue en topographie sous le terme de correction de niveau apparent  $N_a$ . D'une façon approchée, un objet terrestre est vu trop bas d'une quantité  $N_a = K^2/15,2$  avec  $N_a$  en mètres et  $K$  éloignement horizontal de l'objet en kilomètres. Il s'agit bien, **quelque soit l'inclinaison de la visée**, de l'éloignement horizontal qui détermine comme dit ci-dessus, l'angle de réfraction.

Dans cette pseudo formule, la courbure de Terre intervient pour  $K^2/12,75$  (ce coefficient étant égal au double du rayon de courbure terrestre moyen en milliers de km) et la réfraction, de sens et de signe contraires, pour  $-K^2/80$  (ce coefficient étant égal au double du rayon de courbure d'un rayon lumineux horizontal en milliers de km).

C'est avec cette formule que l'on peut savoir à quelle distance, un phare dont on connaît l'altitude, peut être vu en mer.

## Réfraction astronomique

La réfraction fait aussi apparaître les objets célestes plus hauts qu'ils ne sont en réalité, et cela d'autant plus qu'ils sont plus près de l'horizon où l'angle dit de réfraction astronomique croît rapidement pour atteindre 34' à l'horizon.

Cet angle de réfraction horizontale de 34' est non négligeable puisqu'il représente plus que le diamètre du Soleil ou de la Lune (32'). Ainsi, quand on observe un coucher de Soleil, on remarque que l'astre n'apparaît plus comme un disque bien rond d'un diamètre de 32' mais très

hauteur sur horiz	angle zénithal apparent	réfraction astronomique	angle zénithal vrai
90°	0°	0	0°
45°	45°	1'	45° 1'
26°	64°	2'	64° 2'
18°	72°	3'	72° 3'
13°	77°	4'	77° 4'
11°	79°	5'	79° 5'
9°	81°	6'	81° 6'
5°	85°	10'	85° 10'
4°	86°	12'	86° 12'
3°	87°	15'	87° 15'
2°	88°	19'	88° 19'
1°	89°	25'	89° 25'
0°30'	89°30'	28'	89°58'
0°	90°	34'	90°34'

nettement en forme d'un ovale. L'aplatissement est très sensible puisqu'il est de 20%. En effet, quand le bord inférieur apparaît tangent à l'horizon, c'est qu'il est relevé de 34' alors qu'au même instant, le bord supérieur situé 32' plus haut, n'est relevé que de 28'. Le "diamètre vertical" apparent n'est plus que de 26', alors que le diamètre horizontal est toujours 32'.

## ■ Le coucher des sept Soleils et le rayon vert

On sait que lumière qui nous vient du Soleil n'est pas monochromatique et le spectre du visible est traditionnellement décomposé en 7 couleurs : violet, indigo, bleu, vert, jaune, orangé, rouge, correspondant à des plages de longueurs d'onde allant croissant de 390 à 700 nanomètres. Or, l'indice de réfraction de l'air, comme de tout autre corps transparent, décroît quand la longueur d'onde augmente. Dans l'atmosphère, comme dans le prisme qui décompose la lumière solaire avec une déviation d'autant plus faible que la longueur d'onde est plus grande, les rayons rouges sont moins déviés que les rayons vert et bleu.

Si l'on veut bien considérer que le Soleil nous apparaît dans la journée comme étant la superposition quasi parfaite de 7 disques, un par couleur du spectre, il n'en est plus tout à fait de même au coucher du Soleil. Si, du fait de la réfraction, tous les disques sont vus plus hauts qu'ils ne le sont en réalité, le disque rouge est le moins relevé des sept, car ses rayons sont les moins réfractés, les moins cintrés dans l'atmosphère. Il est vu plus bas que les autres et se couche

le premier. Puis, en une seconde, le disque orangé et ensuite le jaune, le plus intense, disparaissent à leur tour. Tous les rayons de plus de 560 nanomètres de longueur d'onde sont alors éliminés. Un court instant, restent au-dessus de l'horizon le bord supérieur des quatre autres disques. Le bleu et le violet sont très atténués car diffusés dans l'atmosphère, et on les retrouve dans le bleu du ciel. La couleur verte domine car elle est la plus lumineuse. C'est le fameux **rayon vert**.

L'observation du phénomène nécessite toutefois la réunion de plusieurs conditions : observatoire surélevé, temps calme, atmosphère sèche, coucher du Soleil derrière une arête vive éloignée. Un soir, j'ai eu la chance de bénéficier de ces circonstances, au Sahara algérien, en bordure du Grand Erg occidental. Le Soleil s'est couché derrière l'arête vive d'une grande dune située à 40 km. Le rayon vert intense dura une bonne seconde et finit même en tirant sur le bleu ! ●

## Robert VINCENT

Président honoraire de l'Association Française de Topographie

## ABSTRACT

*The Earth is surrounded with the atmosphere which, as any transparent medium, is characterized by its refractive index. This index varies from one point to another, according to various factors and, due to this gradient, the luminous rays which cross the atmosphere are slightly curved. The propagation of light on a straight line is only to be found in an invariable index medium, such as vacuum. Sciences, among which astronomy, geodesy or topography, cannot avoid taking this phenomenon into account, and some of its aspects are set forth hereafter.*

*In particular, in order to establish the bending of a luminous ray crossing a non homogeneous transparent medium, and in opposition to many theories which all lie upon Snell-Descartes's law of refraction, we introduce here a demonstration which is based on Fermat's principle and which we consider as innovating.*