Passage d'un système géodésique à un autre

Réponse à Claude Million

André FONTAINE

Par son article "l'application d'un système de coordonnées dans un autre référentiel", présenté dans le numéro 90 de "xyz", Claude MILLION m'a ramené au début de ma carrière en géodésie (c'est loin!) où le principal problème était de calculer pour les militaires tous les points de la Nouvelle Triangulation Française dans le système géodésique Europe 50 en coordonnées U.T.M. Je profite donc de cet article pour faire un retour en arrière et évoquer les deux principales méthodes utilisées à l'IGN pour le passage d'un système géodésique à un autre ; j'en ajouterai une troisième imaginée par H.M. DUFOUR qui ne semble pas avoir eu le succès que sa simplicité aurait dû lui valoir.

Les polynômes complexes

Comme le rappelle Claude MILLION, ce fut la méthode la plus courante pendant des décennies. Par exemple, pour le passage du Lambert à l'U.T.M. , comme on dit improprement, il fallut calculer au moins 9 polynômes complexes, puisque les intersections des trois fuseaux U.T.M. et des trois zones Lambert découpaient la France en 9 régions. Michel DUPUY fut l'ingénieur géographe qui étudia le problème théorique ; il présenta une thèse en janvier 1955 , intitulée : "l'interpolation complexe et ses applications en géodésie et cartographie ".

H.M. DUFOUR fut chargé de la mise au point des calculs sur le premier calculateur électronique acheté par l'I.G.N. en 1954, le Gamma 3 Bull. Essayons de nous remettre dans les conditions de l'époque.

Le Gamma 3 fonctionnait bien, mais il n'avait que 5 mémoires et ne pouvait recevoir que 48 ordres élémentaires ; il était relié à des machines à cartes perforées (perforatrice et tabulatrice). Les problèmes devaient être très simples ou saucissonnés en tranches avec tous les aléas de perforation et de lecture de résultats partiels. Le tableau des ordres était confectionné manuellement à l'aide de fiches colorées pour éviter les fautes grossières, la mise au point s'effectuait en visualisant sur un oscillateur cathodique les trains d'impulsions électriques qui circulaient dans les mémoires et représentaient les nombres.

Pour un polynôme complexe, le programme se bornait à l'algorithme z(A+B) dans lequel les trois variables sont des nombres complexes ; ces nombres étaient introduit par des cartes et, pour un polynôme du troisième degré, il fallait 5 cartes la première portant z et les quatre autres, chacun des quatre coefficients du polynôme. Les cartes ayant été au préalable interclassées, le calcul lui-même s'effectuait au rythme de 24 points à la minute. Lorsque on disposa de moyens informatiques supplémentaires, par nécessité de continuité, on en resta à cette méthode et en huit ans plus de 300 000 transformations furent traitées.

La méthode tridimensionnelle

Avec l'engouement pour la géodésie tridimensionnelle, on abandonna les projections pour se situer dans un espace cartésien. Le raisonnement est simple : on connait la position planimétrique du point sur l'éllipsoïde de référence, le long de la verticale on se déplace d'une longueur égale à la hauteur au dessus de l'ellipsoïde et on arrive ainsi à sa position sur la surface topographique. Comme cette surface est unique, quel que soit le système géodésique, on arrive au même point qui, dans un même trièdre de référence, devrait avoir les mêmes coordonnées cartésiennes. Il faut donc tenir compte de la position des ellipsoïdes de référence les uns par rapport aux autres, mais on sait que théoriquement leurs axes principaux sont parallèles et donc une simple translation suffit. En raison des processus de calcul et surtout des observations différentes, par prudence, on ajoute le plus souvent une rotation et une homothétie pour aboutir à ce qu'on appelle un peu pompeusement la transformation de Helmert.

Si je reviens sur cette méthode, c'est pour montrer qu'elle est fausse. Le raisonnement sur un point paraît sans faille, mais supposons qu'on fasse de même pour un point voisin qui a été calculé à partir du premier. On part de l'ellipsoïde, on remonte au géoïde en se déplaçant sur la verticale d'une longueur égale à la hauteur du géoïde au dessus de l'ellipsoïde et on poursuit son ascension d'une longueur égale à l'altitude.

Avec l'engouement pour la géodésie tridimensionnelle, on abandonna les projections pour se situer dans un espace cartésien. Le raisonnement est simple : on connait la position planimétrique du point sur l'ellipsoïde de référence, le long de la verticale on se déplace d'une longueur égale à la hauteur au dessus de l'ellipsoïde et on arrive ainsi à sa position sur la surface topographique. Comme cette surface est unique, quel que soit le système géodésique, on arrive au même point qui, dans un même trièdre de référence, devrait avoir les mêmes coordonnées cartésiennes. Il faut donc tenir compte de la position des ellipsoïdes de référence les uns par rapport aux autres, mais on sait que théoriquement leurs axes principaux sont parallèles et donc une simple translation suffit. En raison des processus de calcul et surtout des observations différentes, par prudence, on ajoute le plus souvent une rotation et une homothétie pour aboutir à ce qu'on appelle un peu pompeusement la transformation de Helmert.

Lorsqu'on a fait le calcul géodésique du deuxième point, on a pris les deux points de la surface topographique et on a calculé grâce aux altitudes la distance sur le géoïde qu'on a reportée sur l'ellipsoïde. Quand on calcule les coordonnées tridimensionnelles des deux points, avant de continuer jusqu'à la surface topographique grâce à l'altitude, on est remonté de l'ellipsoïde sur le géoïde. On a apporté alors à la distance sur l'ellipsoïde une petite homothétie due à la hauteur du géoïde au dessus de l'ellipsoïde et on ne retrouve pas sur le géoïde la distance des deux points de la surface topographique ramenée au géoïde.

Il n'y a pas réciprocité entre le calcul des coordonnées géodésiques des points de la surface topographique et le calcul tridimensionnel de la surface topographique à partir des coordonnées géodésiques. Dans le deuxième processus, on ne construit pas la surface topographique elle-même, mais son image légèrement déformée par des homothéties variables en chaque point. Elles sont petites mais pas totalement négligeables.

Il faut bien le comprendre les coordonnées géodésiques ne sont pas géométriques ; même si elles sont proches, il n'y a pas de méthode rigoureuse pour passer des unes aux autres et réciproquement. Pour l'exploitation pétrolière, Bruno Ravanas nous apprend dans "xyz" n°91 qu'une base à la disposition des usagers comprend 303 référentiels géodésiques et 785 jeux de paramètres de transformation . Cette base, sans doute d'une précision suffisante pour les recherches sur le terrain, n'est pas exacte, car pour la constitution des données de départ, les coordonnées tridimensionnelles des points des systèmes géodésiques, on introduit des distorsions parfois non négligeables qu'on ne peut estimer.

La méthode Dufour

Elle s'applique à deux systèmes de coordonnées géodésiques sans passer par des coordonnées géométriques, ce qui évite les petits défauts signalés ci-dessus.

Soient deux points P et Q dont on connait les coordonnées géodésiques dans deux systèmes différents : M_1, L_1 et M_2, L_2 dans le premier, M'_1, L'_1 , M'_2, L'_2 dans le deuxième. On définit sur chacun des deux ellipsoïdes de référence une même projection Lambert dont le centre est le point de coordonnées M_1, L_1 et on projette chacun des deux systèmes dans la projection correspondant à son ellipsoïde de référence. Que devient le coté PQ?

Soients

pq le coté en projection 1, G son gisement, d sa longueur

p'q' le coté en projection 2 , G' son gisement, d' sa longueur.

En projection 1 , le gisement G est égal à l'azimut géodésique A, puisqu'on est au point central de la projection. En projection 2, le gisement G' est égal à l'azimut géodésique A' diminué de la convergence des méridiens

$G' = A' - (M'_1-M_1) \sin L_1$

suivant la formule bien connue de la convergence des méridiens dans une projection Lambert dont le point central a pour coordonnées M_1, L_1 .

Sur le terrain au point P, les deux azimuts géodésiques sont relatifs à un même azimut astronomique calculé suivant deux verticales différentes M_1, L_1 et M'_1, L'_1, on a donc

$A' = A + (M'_1-M_1) \sin L_1$

(formule de Laplace)

et on voit immédiatement que $G' = G$

Si on examine les distances, on sait que $d = m\,D$ et $d' = m'\,D'$

m et m' module de réduction des distances dans chacune des projections et D et D' distances sur les deux ellipsoïdes.

Par définition de la géodésie, les deux distances D et D' sont égales, puisque égales à la distance sur le géoïde. Le module m est égal à 1 (on est au point central de la projection), le module m' est donné par la formule

$m' = 1 + 2\,tg^2((L'_1-L_1)/2) + ...$

Pour deux systèmes géodésiques relatifs à un même réseau de points de ■■■

référence, les coordonnées dans chacun des deux systèmes sont relativement proches et ne dépassent pas quelques centaines de mètres. On voit que, par exemple,
si $(L'_1-L_1)/2 < 1/100\ 000$
(différence de latitude de 200m)
on a $m' \# 1 + 2/\ 10\ 000\ 000\ 000$
(différence négligeable par rapport à m).

En conséquence, le passage dans une même projection Lambert de leurs ellipsoïdes respectifs donne pour les deux systèmes géodésiques deux cotés pq et p'q' équipollents. Ils se déduisent l'un de l'autre par une simple translation.

On généralise et on prend maintenant une projection Lambert de point central M, L. Les formules ci-dessus deviennent
$m= 1 +2\ tg^2((L_1-L)/2) + ...$
$m'= 1 + 2\ tg^2((L'_1-L)/2) + ...$

Soit
$m'-\ m\ \#\ 4\ tg((L_1-L)/2)\ tg((L'_1-L_1)/2)(1+tg^2((L_1-L)/2))$ en confondant dans leur somme ou leur produit $tg((L_1-L)/2)$ et $tg((L'_1-L)/2)$;
soit encore
$m'- m \#\ k\ (L'_1-L_1)\ tg\ (L_1-L)$
avec $k = 1 - tg^4((L_1-L)/2))$
k restant toujours très près et inférieur à 1
$m'- m \# (L'_1-L_1)\ tg\ (L_1-L)$
Cette formule permet d'apprécier les limites de validité de l'hypothèse.

Si $(L'_1-L_1)/2 < 1/100\ 000$
et $(L_1-L) < 2/100$ (c'est à dire pour une zone de 400 km) l'écart entre les deux modules de réduction des distances restent négligeables.

Pour le gisement, la différence des deux convergences des méridiens est toujours égale à $(M'_1-M_1) \sin L_1$, tandis que la différence des corrections de Laplace devient $(M'_1-M_1) \sin L$ On peut écrire
$\sin L \# (L_1-L) \cos L_1$
et $G'- G \# (M'_1-M_1)\ (L_1-L) \cos L_1$

Cette formule donne les limites de validité de l'hypothèse, suivant les coordonnées du point P dans les deux systèmes.

Il me semble me souvenir que H.M. DUFOUR a fait l'expérience sur le passage du Lambert à l'U.T.M. sur toute la France pour trouver que la translation sur une aussi grande surface varie d'un peu plus de 1 m, ce qui est remarquable étant donné les différences dans le calcul de la N.T.F et du réseau Europe 50. Il m'avait dit alors *"rends-toi compte, si on avait pensé à cette méthode en 1950, toutes les difficultés qu'on aurait évitées"*. Effectivement. Il a dit "on" par modestie, il aurait pu dire "je".
Cette méthode est particulièrement intéressante car il suffit de connaître les coordonnées d'un seul point commun dans les deux systèmes géodésiques à comparer, pour en déduire immédiatement l'extension de la zone de validité que couvrira la projection Lambert définie au centre de cette zone et la valeur de la translation recherchée. Elle présente aussi un autre avantage par rapport au passage par les coordonnées tridimensionnelles : la connaissance des hauteurs du géoïde par rapport à l'ellipsoïde de référence est inutile, or ce n'est pas toujours une sinécure de les déterminer pour des réseaux locaux.

Il ne faut pas oublier que la méthode suppose que les distances sur les ellipsoïdes géodésiques soient égales aux distances sur le géoïde. elle ne s'applique donc pas aux systèmes géométriques, ni au passage d'un système géodésique à un système géométrique. En revanche pour le passage d'un système géodésique à un autre système géodésique, cette méthode est la plus simple et , qui plus est, de précision calculable.

Pour la petite histoire, je dois dire que c'est le jour où H.M. DUFOUR m'a expliqué sa méthode que j'ai alors compris le véritable fondement de la géodésie et sa différence avec la projection de la surface topographique sur un ellipsoïde. Auparavant, comme un imbécile, j'ai utilisé les coordonnées géodésiques tridimensionnelles pour le passage d'un système géodésique à un autre, sans m'apercevoir des fautes de cette méthode.

Dois-je me réjouir de ce jour où mes yeux se sont ouverts ? Sans doute, suis-je content d'avoir amélioré ma compréhension des choses, mais cela m'a valu une telle somme d'efforts pour essayer de convaincre de nombreux responsables des vertus de la géodésie par rapport à la simple géométrie, que peut-être eût-il mieux valu que je reste dans l'ignorance. J'écris convaincre, car, après tant d'années, j'ai l'impression qu'il s'agit d'une question de foi et non pas d'un simple problème scientifique facile à appréhender. Espérons que le temps finira par avoir raison des incroyants ; la prédication se poursuit. ●

Dois-je me réjouir de ce jour où mes yeux se sont ouverts ? Sans doute, suis-je content d'avoir amélioré ma compréhension des choses, mais cela m'a valu une telle somme d'efforts pour essayer de convaincre de nombreux responsables des vertus de la géodésie par rapport à la simple géométrie, que peut-être eût-il mieux valu que je reste dans l'ignorance. J'écris convaincre, car, après tant d'années, j'ai l'impression qu'il s'agit d'une question de foi et non pas d'un simple problème scientifique facile à appréhender. Espérons que le temps finira par avoir raison des incroyants ; la prédication se poursuit.