

Organisation du calcul d'un coordonnées cartésiennes trir en coordonnées bidimension

On se rapportera à la lettre ouverte que m'a adressé M. André Fontaine[1]. On donne ci-après les algorithmes à utiliser pour réaliser ce qu'il a préconisé dans ses interventions. Les logiciels correspondants sont librement disponibles sur le site de l'AFT.

On veut calculer les coordonnées ellipsoïdales d'un point 2 inconnu en partant d'un point 1 connu. On a stationné les deux points simultanément avec deux récepteurs GPS ; on obtient directement, du calcul des observations GPS, un vecteur $V_{1 \rightarrow 2} = \Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ séparant les points 1 et 2, dans le système cartésien géocentrique.

On cherche à transformer ce vecteur en coordonnées azimutales, à savoir son azimuth $Az_{1 \rightarrow 2}$, sa longueur sur le géoïde ΔS , sa distance zénithale Z est aussi nécessaire, même si on doit ne travailler qu'en coordonnées bidimensionnelles sur une surface courbe. Les relations données dans [1] développées sont :

$$\Delta L_{12} = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2},$$

$$Az_{1 \rightarrow 2} = \text{Arctg}\left(\frac{\Delta Y \cdot \cos(\lambda) - \Delta X \cdot \sin(\lambda)}{\Delta Z \cdot \cos(\varphi) - \Delta Y \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\lambda) - \Delta X \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\lambda)}\right)$$

$$Z = \text{Arc cos}\left(\frac{\Delta X \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\lambda) + \Delta Y \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\lambda) + \Delta Z \cdot \sin(\varphi)}{\Delta L}\right)$$

Selon les notations habituelles φ et λ sont, respectivement, la latitude et la longitude, par hypothèse connues, du point 1. Dans ce qui suit ces valeurs sont considérées comme fixant la direction de la verticale au point connu 1, on sait évidemment que c'est aux "déviations de la verticale" près. On doit prendre des précautions de calcul, en effet l'azimut doit être défini sur 2π , on utilise pour cela, soit des fonctions informatiques qui ont été décrites dans ces pages, soit la fonction $\text{Arctan2}(Y, X)$ à deux paramètres qui existe dans certains langages informatiques (Pascal ou C++ notamment). Pour la distance zénithale Z , qui doit être définie de 0 à π , son arc cosinus est aussi ambigu, car $\cos(x) = \cos(-x)$; au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ la seule fonction continue utilisable est la cotangente, on transforme donc la formule plus haut pour la faire apparaître, puis faire

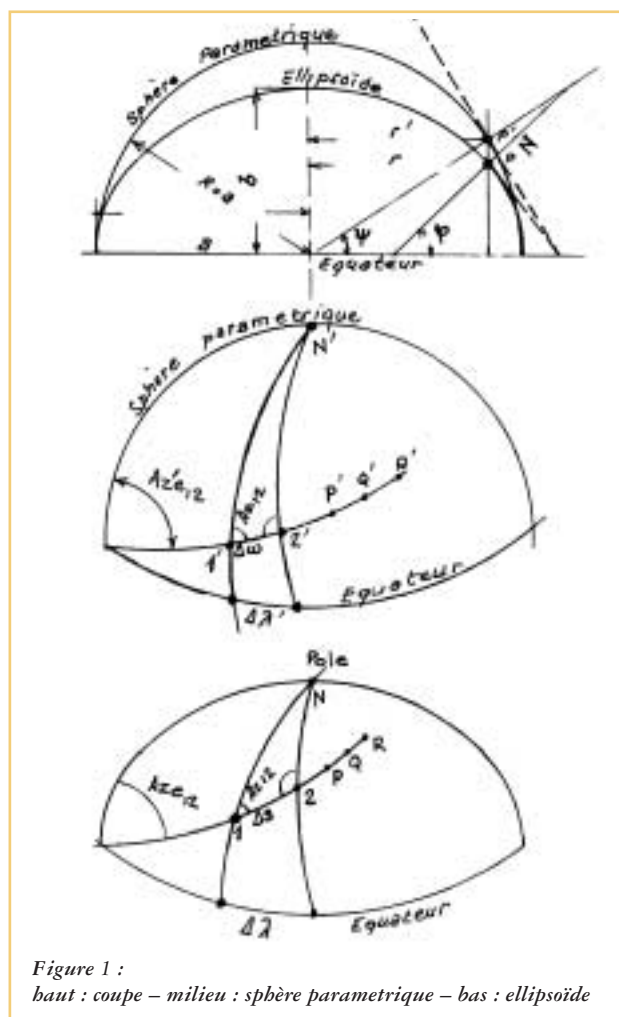


Figure 1 :
haut : coupe – milieu : sphère paramétrique – bas : ellipsoïde

$$Z = \text{Arctg}\left(\frac{\cos(Z)}{\sin(Z)}\right) - \frac{\pi}{2}$$

Transformation de la distance rectiligne en distance courbe le long du géoïde

Il convient, d'abord, de transformer la distance inclinée ΔL en distance développée ΔS sur le géoïde. Il semblerait qu'on se trouve tout simplement dans une situation clas-

vecteur GPS exprimé en ectangulaires géocentriques nelles sur le géoïde

Claude Million

sique, celle étudiée, notamment par Heiskanen et Moritz dans "Physical Geodesy" pour les mesures faites au distancemètre [3], ceci n'est pas exact, c'est pourquoi on prendra une solution différente, puisque la distance zénithale calculée n'est pas affectée par la réfraction comme le sont les mesures rasant le sol, et parce qu'on ne connaît ni le rayon exact R en 2, ni la hauteur au-dessus du géoïde h_2 , en ce même point. On adopte la relation :

$$\Delta S = R \cdot \text{Arc sin} \left(\frac{\Delta L \cdot \sin(Z)}{\sqrt{(R+h)^2 + \Delta L^2 + 2 \cdot (R+h) \cdot \Delta L \cdot \cos(Z)}} \right)$$

avec h altitude du point de départ 1. Mais l'arc sinus, lui aussi, est ambigu, mais pour les distances en cause cela serait sans conséquences, toutefois, pour dérouter les puristes le cas a été traité !

Ceci impose de calculer le rayon de courbure R en 1. Puisqu'on connaît l'azimut de la direction 1-2 soit Az , le moyen le plus précis nous a semblé être d'utiliser la formule d'Euler, toutefois, pour simplifier on pourrait tout aussi bien adopter la courbure moyenne ; on doit calculer, au préalable N , la grande normale et ρ , le rayon méridien de courbure de l'ellipsoïde.

On a établi un logiciel pour comparer les deux méthodes Le rayon de courbure moyen sera $R = \sqrt{N \cdot \rho}$ avec a demi-grand axe de l'ellipsoïde et b son petit demi-axe, majorés ou non (voir plus loin a' et b') :

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2(\varphi)}}, \text{ et } \rho = N^3 \cdot \frac{1 - e^2}{a^3}, N \cdot \rho = \frac{(1 - e^2) \cdot a^2}{(1 - e^2 \cdot \sin^2(\varphi))^2},$$

$$R = \frac{b}{1 - e^2 \cdot \sin^2(\varphi)}, \text{ ou } R_{1+2} = \frac{N}{\rho \cdot \cos^2(Az_{1+2}) + \sin^2(Az_{1+2})}$$

On a deux solutions, soit a est le grand axe de l'ellipsoïde et on "applique" la "mesure" sur l'ellipsoïde GRS80, soit on "ajoute" à a la hauteur du géoïde h_g selon les relations

$$a' = a + h_g \cdot \frac{(1 - e^2 \sin^2(\varphi))}{1 - e^2}, \quad b' = b + h_g \cdot (1 - e^2 \sin^2(\varphi)),$$

et on la développe sur le géoïde, ou à très peu près. On est alors

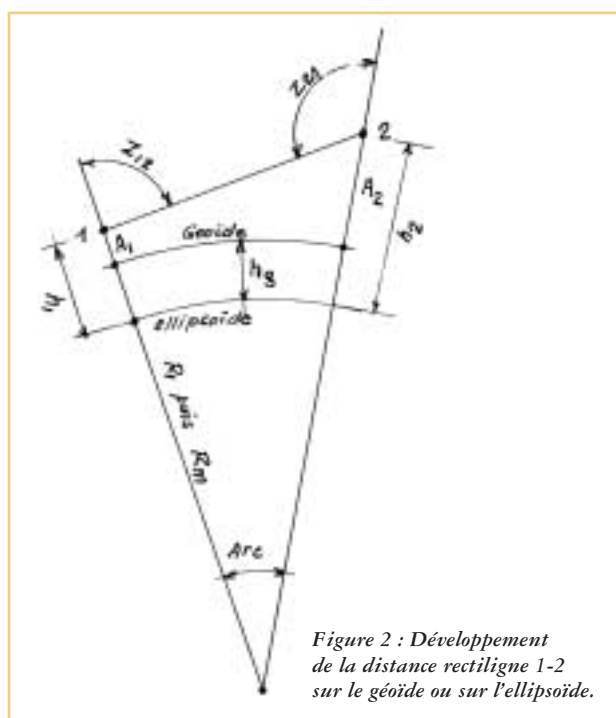


Figure 2 : Développement de la distance rectiligne 1-2 sur le géoïde ou sur l'ellipsoïde.

en rupture avec le référentiel officiel [2]. C'est ce qu'on a fait.

Pour affiner les résultats, qui sont au même degré de précision que le rayon R , on reprend le même calcul après avoir déterminé les coordonnées géographiques très approchées de 2. On calcule $R_{1 \rightarrow 2}$ (formule 3) puis on adopte un rayon moyen $R_m = \frac{R_{1 \rightarrow 1} + R_{1 \rightarrow 2}}{2}$ puis on ne reprend

qu'une seule fois le calcul des coordonnées de 2 (figure 2).

Passage du géoïde à la sphère paramétrique Calculs de ω_2

Pour passer du développement linéaire de l'arc ΔS à l'angle sphérique $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, on a bien sûr :

$$\Delta\omega = \frac{\Delta S}{b} - u^2 \cdot \Delta I_2 + u^4 \cdot \Delta I_4 - u^6 \cdot \Delta I_6 + u^8 \cdot \Delta I_8 + \dots$$

seulement $\Delta I_{2,i}$ est fonction de $\Delta\omega$, il faut donc procéder

par itérations à partir de :

$$\Delta \omega_0 = \frac{\Delta S}{b}$$

(Voir Annexe, éventuellement, pour les développements)

La latitude sphérique Ψ sur la sphère de Jacobi (sphère paramétrique) est donnée par :

$$\psi_1 = \text{Arctg}\left(\frac{b}{a} \cdot \text{tg}(\varphi_1)\right) = \text{Arctg}\left(\sqrt{1-e^2} \cdot \text{tg}(\varphi_1)\right).$$

soit $Az_{E1 \rightarrow 2}$ l'azimut de la géodésique à l'équateur (voir la figure 1) :

$$\sin(Az_{E1 \rightarrow 2}) = \frac{r}{a} \sin(Az_{1 \rightarrow 2}) = \cos(\psi) \sin(Az_{1 \rightarrow 2})$$

$$\sin(\omega_1) = \frac{\sin(\psi_1)}{\cos(Az_E)}, \quad \omega_2 = \omega_1 + \Delta \omega \quad (7).$$

Calculs sphériques

On utilise les formules suivantes plus précises, pour les calculs numériques, que les formules plus traditionnelles en cosinus :

$$\sin(\psi_2) = \sin(\psi_1) \cdot \cos(\omega_2 - \omega_1) + \cos(\psi_1) \cdot \sin(\omega_2 - \omega_1) \cdot \cos(Az_{1 \rightarrow 2})$$

$$\sin(Az_{2 \rightarrow 1}) = \frac{\cos(\psi_1)}{\cos(\psi_2)} \cdot \sin(Az_{1 \rightarrow 2})$$

$$\sin(\lambda'_2 - \lambda'_1) = \sin(\omega_2 - \omega_1) \cdot \frac{\sin(Az_{1 \rightarrow 2})}{\cos(\psi_2)}, \text{ d'où } \Delta \lambda'$$

Retour aux coordonnées ellipsoïdales

$$\varphi_2 = \text{Arctg}\left(\frac{a}{b} \cdot \text{tg}(\psi_2)\right) = \text{Arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \cdot \text{tg}(\psi_2)\right)$$

pour la latitude de 2.

Pour la longitude on calcule une petite correction, de 3/1000 environ, à apporter à $\Delta \lambda'$:

$$\frac{\varepsilon}{\sin(Az_E)} = E_0 \cdot \Delta \omega - E_2 \cdot u^2 \cdot \Delta I_2 + E_4 \cdot u^4 \cdot \Delta I_4 - E_6 \cdot u^6 \cdot \Delta I_6 + \dots$$

mais cette fois on connaît les $\Delta I_{2,i}$ déjà calculés plus haut (formule 4 et annexes), on fait ensuite :

$$\Delta \lambda = \Delta \lambda' - \varepsilon, \text{ d'où la longitude de 2 : } \lambda_2 = \lambda_1 + \Delta \lambda$$

Calcul de R en 2 et de l'altitude du point 2

On calcule aisément la distance du point 2 au centre de courbure en 2 par la formule de trigonométrie :

$$(R_2 + h_2)^2 = (R_1 + h_1)^2 + \Delta L^2 + 2 \cdot (R_1 + h_1) \cdot \Delta L \cdot \cos(Z)$$

On calcule, ensuite, le rayon de courbure

$$R_2 = \frac{b}{(1 - e^2 \cdot \sin^2(\varphi_2))}, \text{ ou } R_{2+1}$$

voir (3) d'où h_2 seulement si on en a besoin. Si on suit un cheminement la somme $(R_2 + h_2)$ servira à calculer le côté du triangle suivant en prenant la place du terme $(R_1 + h_1)$ des relations précédentes, et ainsi de suite jusqu'à la fin. Par souci de précision, et pour faire obstacle aux tentatives de mettre le logiciel en défaut sur de longues distances, on itère comme indiqué plus haut en calculant un rayon moyen entre 1 et 2 soit

$$R_m = \frac{R_{1+2} + R_{2+1}}{2}$$

Logiciel

La partie informatique ne comporte aucune difficulté, on programme les relations (1) à (10) et le programme se déroule linéairement, en repartant en tête à chaque nouveau côté en cas de cheminement. La figure 3 montre la fiche de travail. Si on ne possède pas de jeu d'essai réel on appuie sur "Valeurs par défaut", puis sur le bouton "Entrer des données", les données changent de couleur pour bien montrer qu'elles sont enregistrées, on "clique" ensuite sur "Calculs préliminaires". On obtient sur le bas de la colonne de gauche la longueur ΔS développée sur l'ellipsoïde (hauteur du géoïde à zéro) ou sur un ellipsoïde concentrique de GRS80 plus proche du géoïde (hauteur du géoïde renseignée), l'azimut Az et la distance zénithale Z du vecteur en grades. Avant de poursuivre on a intérêt à vérifier que ces valeurs sont plausibles. On appuie ensuite sur "Calculs définitifs" et les résultats λ et φ s'affichent sur la colonne de droite. En appuyant sur le bouton "Cheminement" on transfère les résultats en données de latitude de longitude et altitude comme origine du vecteur suivant. Le logiciel n'a pas pu être testé avec des valeurs réelles au-delà de quatre côtés.

Le logiciel avait été, initialement, compliqué en introduisant la possibilité de faire les mêmes calculs sur l'ellipsoïde de Clarke 1880, mais cela entraînait des risques de



Figure 3 : Fontaine

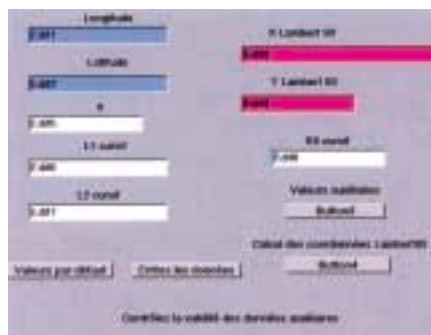


Figure 4 : PL93

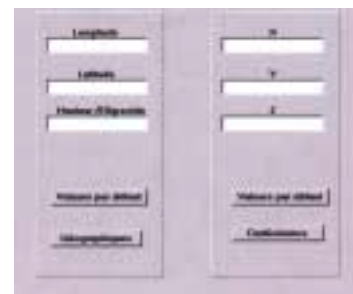


Figure 5 : Transfo