Des courbes et des lignes

Claude Million

On est passé très rapidement des moyens de dessin traditionnels aux moyens informatiques sans bien nous arrêter sur les progrès successifs réalisés, et sans en avoir bien conscience. On voudrait montrer que certains de ces progrès ne sont que de vieux trucs de tracé des ateliers ou des bureaux d'études mis au goût informatique et qui, en se généralisant, ont pris une importance et un intérêt qu'on ne pouvait, a priori, sous leur forme initiale, imaginer. Une fois ce premier objectif atteint on voudrait démystifier ces méthodes qui sont devenues tellement courantes que même les informaticiens qui créent les logiciels du commerces ne savent plus très bien ce qu'ils font, tellement tout est devenu standard et machinal, «encapsulé», comme cela se dit, dans des logiciels pour lesquels le coeur actif est inaccessible, pour des raisons commerciales, même et surtout aux professionnels. Enfin, on voudrait permettre au lecteur de «tripoter» ces méthodes pour se faire une opinion fondée.

Le sujet restant, par lui-même, tellement vaste, on se contentera de parler du tracé automatique des courbes quelconques.

On a limité au maximum les développements mathématiques en les renvoyant à des annexes qui, si elles ne peuvent pas être publiées fautes de place, pourront être trouvées sur le site de l'AFT ou sur celui de l'auteur, ou à l'AFT, ou chez l'auteur.

On a du renoncer à donner une bibliographie quelconque tellement le sujet a donné lieu à une profusion de publications pas toujours très claires ou même franchement absconses [1].

Le problème à résoudre

Il s'agit, généralement, de faire passer une courbe régulière sur un certain nombre de points. Dans certains cas cela est relativement facile, par trois points quelconques on peut faire passer un cercle et un seul, c'est-à-dire que toute personne, à qui seront donnés ces trois points, y ferait passer le même cercle, et c'est exactement le but poursuivi : que cette courbe soit la même sur le chantier et au bureau, et quelle que soit l'échelle de report et la précision attendue, le millimètre ou le mètre. Toutes les courbes connues (ellipses, paraboles, hyperboles, anses de panier etc..) étaient, dans le passé, décomposées en arcs de cercles, par de savants tracés, dont des catalogues ont été publiés, pour essentiellement être tracées sur les chantiers. Sur le terrain il était possible, plus que sur un coffrage de chantier de construction, d 'implanter, à l'horizontale, une courbe algébrique connue, qui ne soit pas décomposée en cercles. Mais, en dehors de ces figures, ou bien relativement simples, ou symétriques, ou répondant à une logique pas trop complexe, il restait le cas des courbes vraiment quelconques passant par un nombre de points également quelconque.

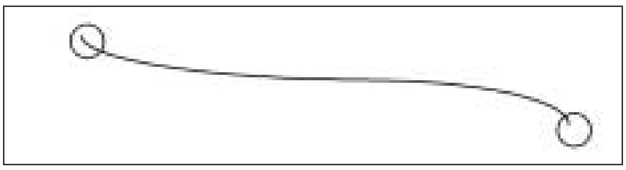
Il n'était pas question de décomposer tout ensemble de points par paquets de trois et d'y faire passer des cercles, un problème fondamental surgissait alors : celui des raccordements des cercles entre eux, en leur donnant une tangente commune, mais encore fallait-il définir laquelle ?... En outre, si on fixe la tangente à un cercle en un premier point, on n'a plus besoin que d'un seul autre point pour le définir. Il semble donc que ce problème de continuité soit facile à résoudre prenons les trois premiers points et faisons passer un cercle, traçons sa tangente au troisième point, nous pouvons définir un cercle passant par le quatrième point et ainsi de suite jusqu'au dernier point. On laissera le lecteur faire lui-même sa figure. Il remarquera que le tracé n'est pas satisfaisant à l'œil, il parait trop raide ; en outre, si on refait le même tracé en partant du dernier point pour revenir au premier on n'obtient pas le même, ce qui est, définitivement rédhibitoire, la condition de répétabilité dans tous les cas n'étant pas satisfaite. Répéter autant de fois que l'on veut le tracé, et le faire exécuter par des personnes différentes, en obtenant chaque fois le même unique résultat, est absolument indispensable.

Les solutions anciennes

La solution ancienne la plus banale, dans les bureaux d'étude Français, était l'usage d'un instrument appelé le «pistolet», une sorte de gabarit en bois ou en plastique sur lequel on pouvait trouver toutes les courbures possibles pour autant qu'on en ait un assez grand nombre, et les faire passer par les points connus en assurant la continuité des tangentes, en tout point. Cette solution n'apportait rien pour le chantier qui était obligé de relever des cotes graphiques et devait raccorder les points trop discontinus, à l'oeil, sur place. Pour les chantiers à implanter, des solutions anciennes, mais déjà très modernes (XVIII-XIX^{e} siècles), consistaient à trouver une courbe algébrique qui satisfasse la première condition de passer par tous les points, plus la condition de continuité, tout en laissant au tracé de la courbe un aspect agréable et souple, mathématiquement toutes les solutions proposées visaient à éviter d'avoir à résoudre un système linéaire complet, on utilisait des polynômes orthogonaux avec lesquels les systèmes à résoudre deviennent diagonaux, la solution est donc immédiate. On notera que ces solutions ne pouvaient pas être appliquées au bureaux d'études et demandaient des moyens de calcul importants, et pouvaient laisser les problèmes de contraintes aux limites non résolus. Elles ont été largement exploitées dès que l'informatique a permis d'en aborder les calculs, au demeurant assez simples, mais fastidieux à entreprendre et à réaliser à la main.

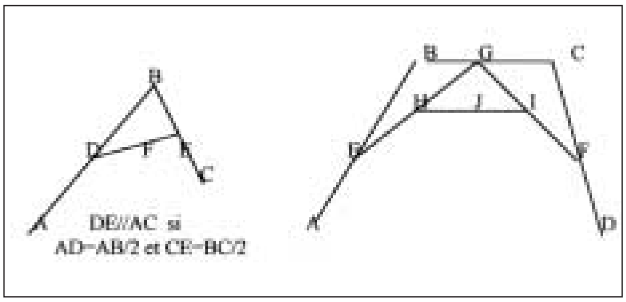
Des moyens plus raffinés que le pistolet étaient alors (1950-1960) en usage dans les bureaux d'études anglo-saxons, et sur tous les chantiers de construction navale : On utilisait une lame tenue par deux poids de dessin en fonte dont les fentes recevaient les extrémités de la lame flexible qui étaient déformée pour passer par les points choisis.

La courbe dessinait, souvent, un S, et, pour cela, s'appelait S/line (courbe en S). Des années plus tard, on a vu apparaître des courbes dessinées par ordinateur qui s'appelaient des splines. De là à penser que la barre de fraction «/» s'était transformée en «p» il n'y avait qu'un pas... d'autant que les splines pouvaient être d'un degré quelconque, mais qu'on s'arrêtait, prudemment, au degré trois, on verra plus loin pourquoi, et qu'alors la spline devenait un arc de cubique, exactement comme la courbe en S des Anglais. En effet, on démontre facilement que la déformée de la lame flexible contrainte par deux moments fléchissants à ses extrémités est soit une parabole carrée (moments de sens opposés) soit une cubique (moments égaux de même sens) .Ce même appareil de tracé, sous une taille beaucoup plus grande évidemment, était en usage dans les chantiers anglais de construction navale pour tracer régulièrement les couples des bateaux, il était, parait-il, utilisé en France sous le nom de tracé à la latte. Car tout ce qui était recherché dans cette opération était : la régularité et la reproductibilité du tracé, en passant par les mêmes points. Les premières courbes tracées par ordinateur ne visaient rien d'autre, avec, en plus, la numérisation du tracé pour l'introduire dans des machines à commande numérique.



Ce procédé de la lame flexible avait des développements inattendus, on utilisait, couramment, un câble de bicyclette pour régulariser le tracé théorique à pente constante, des routes de montagne, fait au compas à ouverture constante le long de courbes de niveau équidistantes. Ce procédé était amélioré en gainant le câble de caoutchouc, pour qu'après déformation il reste stable. On ne peut décrire tous les procédés de dessin découlant de ce principe, tant ils étaient nombreux. Alors, lorsque les splines cubiques sont sorties des ordinateurs au début de la CAO, nombre de dessinateurs se sont gratté la tête pour savoir, en dehors de l'avantage d'avoir des courbes calculées de formulation connue, où était la nouveauté !

Dans les bureaux d'études on rencontrait aussi un problème pour raccorder deux droites par un cercle si les distances des points de tangence au sommet n'étaient pas équidistantes on ne pouvait pas tracer un cercle pour les raccorder. On divisait les deux tangentes en parties proportionnelles puis on joignait les points homologues (1/10 sur AB avec 1/10 sur CB le point de la courbe était sur la droite joignant ces deux point au 1/10 de DE, sur la figure le point F correspond à la division $^1/_2$) La courbe tracée par point est, dans ce cas, un arc de parabole, elle joint A à C en restant tangente à AB et BC.



On a indiqué, à côté, une méthode de raccordement de A et de D en respectant les tangentes AB et DC non concourantes, le point J correspond au sommet de la courbe (t=1/2) qui est une cubique.

Là encore, quand on vit apparaître les courbes de Bézier, beaucoup on cru reconnaître quelque chose qu'ils avaient déjà vu ! Ce n'est pas minimiser le mérite des auteurs qui est grand, même Pierre Bézier Ingénieur de chez Renault reconnaît tout ce qu'il doit aux travaux de de Castelnau qui faisait le même travail pour Citroën, dans des conditions plus difficiles, aux Etats-Unis des recherches semblables étaient entreprises chez General Motors. Il faut dire que lorsque les machines d'usinage à commande numériques sont apparues il fallu bien alimenter leurs commandes en nombres venus des bureaux d'étude, le passage du dessin à la pièce devait se faire sans qu'un manque de définition des formes à réaliser vienne s'ajouter aux tolérances d'usinage. Il fallut bien en venir à transmettre des nombres identiques pour les mêmes pièces, interpolables à volonté, si on avait besoin de nouveaux points. Souvent une pièce était conçue par des stylistes qui réalisaient une maquette en pâte à modeler ou en résine. Pour le bureau d'étude ce modèle était découpé selon un plan de symétrie généralement longitudinal, puis en des plans parallèles à cette symétrie, chaque tranche représentait une courbe fermée qu'il fallait lisser et reproduire avec précision, puis la maquette était découpée par des plans perpendiculaires au plan de symétrie pour obtenir des «couples», ces couples devaient être définis avec la même précision. Ceci acquis, on n'était pas au bout de ses peines les espaces compris au milieu de ces mailles devaient, eux aussi, être définis mathématiquement avec la contrainte générale que tout point reçoive, numériquement, et sans l'«à peu près» du passé, la même définition sur un couple et sur une coupe longitudinale, quel que soit le «pas» de la définition de la surface. Le choix de définitions mathématiques des courbes s'imposait, la CAO était née.

Les problèmes propres à la profession

Pour revenir à la profession, il existe plusieurs sortes de problèmes qui peuvent être traités par le tracé informatique des courbes. En ne cherchant pas à être exhaustif, on citera : Le tracé des courbes de niveau interpolées au milieu de points altimétriques connus, le tracé des courbes des détails planimétriques dans le but de numériser un plan, le tracé des courbes de raccordement des voies, etc...

Pour le tracé des courbes de niveau, on s'est vite rendu compte que la fausse bonne idée qui consistait à faire passer sur N+1 points connus pour être à la même altitude, par tout moyen d'interpolation, une courbe de degré N, ne donnait rien qui puisse correspondre à la réalité, sauf quand celle-ci s'échappe, comme sur les terrains très plats.

On s'est vite aperçus, dans toutes les professions, qu'il était très dangereux d'élever le degré des polynômes représentatifs au-delà du troisième, sauf cas très particuliers (Les positions des satellites G P S données tous les quart d'heure par la organismes de post-traitement notamment, doivent être interpolés au degré 8 ou 12 pour conserver la précision de la détermination !). Dès lors, dans la majorité des logiciels, les courbes de niveau sont des arcs de cubiques se raccordant entre elles, en respectant les conditions de continuité.

Le cas de la numérisation des courbes sur les plans est particulièrement intéressant. On veut éviter d'avoir à stocker beaucoup de nombres pour définir une courbe naturelle, c'est-à-dire celle dont on ne connaît pas la définition géométrique ou analytique. La ligne à tracer est généralement définie par quelques points de passage qu'on veut relier par une courbe qui permette à différents opérateurs d'obtenir des résultats identiques et aussi précis, mais pas forcément exacts, qu'ils le désirent : Le problème est de savoir si des opérateurs différents, utilisant des logiciels différents, sur des machines différentes, obtiendraient des résultats identiques en partant de données de base identiques, c'est-à-dire les mêmes points de passage. C'est parce qu'on n'en était pas très sûr qu'on a entrepris ce travail.

Le tracé des arcs de cubiques

Faire passer un arc de cubique sur quatre points connus n'est pas très difficile : pourvu qu'on choisisse un des points comme origine des coordonnées, il suffit de résoudre trois équations linéaires à trois inconnues, on a donné des relations qui évitent de résoudre le système de relations linéaires, elles sont très rapides à programmer [Annexe I]. Si on veut que certains termes s'annulent on peut aussi choisir le centre de gravité des points connus. La courbe suivra très fidèlement les points donnés, seulement elle ne se raccordera pas à ses voisines, si elle en a, elle marquera une cassure au point commun. On peut, également appliquer la méthode d'interpolation de Legendre, en développant les polynômes de Legendre de degré trois, les résultats sont quasiment identiques, avec le même défaut, ou le même avantage si on veut marquer une discontinuité aux deux extrémités [Annexe II].

On doit bien noter que les procédés d'interpolation antérieurs à l'avènement de l'ordinateur, Legendre, Lagrange, Newton, Stirling, Gauss, visaient , surtout, à éviter d'avoir en cours de calcul, à résoudre un système linéaire un peu compliqué, c'est pourquoi ils utilisaient des polynômes orthogonaux, de plus ils négligeaient totalement les nécessités industrielles, résolues, à l'époque, par «l'art du trait», c'est-à-dire les constructions graphiques. Cette nécessité d'éviter de résoudre des systèmes linéaires n'existe, plus c'est pourquoi on a vu apparaître de nouvelles méthodes d'interpolation plus adaptées aux besoins de l'industrie et éventuellement imposant de résoudre un système linéaire de coefficients.

Si on a des courbes comportant très peu de points cette méthode est la plus sûre, car il y a une solution et une seule. Ceci peut s'appliquer à des limites de parcelles cadastrales par exemple, pour le calcul des courbes plus compliquées ce n'est pas suffisant.

On notera surtout que, pas plus que pour les courbes suivantes, il n'est possible de dessiner une courbe fermée avec une seule cubique. Certaines cubiques particulières peuvent définir de courbes fermées, mais justement elles sont trop particulières : Folium (qui a une définition paramétrique) et ovale de Descartes.

Le tracé des splines cubiques

Une sous-spline est une courbe découpée dans laquelle chaque segment peut être interpolé par un polynôme de degré n qui est donc n-1 fois continûment dérivable.

Une spline cubique est un ensemble de polynôme de degré trois qui passe par deux noeud d'interpolation consécutifs j et j+1 leurs dérivées premières et secondes étant continues en chaque point. Un polynôme de degré trois est parfaitement défini par les valeurs de la fonction en deux points et par leurs dérivées premières en ces deux points, au début et à la fin, car on a quatre équations pour résoudre les quatre inconnues de la cubique. On a établit un logiciel permettant de tracer ces courbes passant sur un ensemble de points qu'on a limité à 12, car il fallait bien se limiter. En outre, chaque courbe peut être interpolée en 100 points. La définition des points de passage obligé dit, parfois improprement, en franglais, «points de contrôle», est faite en donnant tout simplement leurs deux coordonnées xj et yj = f(xj), xj+1 et yj+1 = f(xj+1). Le calcul des dérivées en ces points est extrêmement subtil [Annexe III].

On rempli deux critères le premier f0 ''= 0 ou toute autre valeur définie par l'utilisateur en x(0) et en x(n), c'est-à-dire au début et en fin de tracé. Le second critère vise à rendre minimales les sommes des courbures exactement comme pour la lame flexible c'est ce qui empêche la courbe de divaguer comme pour les autres polynômes de haut degré $\int(f''\hat{}2).dt$ = minimal.

On considère que pour qu'elles soient continues en chaque noeud et pour satisfaire au second critère elles doivent respecter la relation :

(x(j)-x(j-1)).f ''(j-1)+ 2.(x(j+1)-x(j-1)).f''(j) + (x(j+1)-x(j)).f''(j+1) = 6.[((f(j+1)-f(j))/(x(j+1)-x(j))+((f(j)-f(j-1))/(x(j)-x(j-1))]. les inconnues sont les dérivées secondes c'est-à-dire les courbures aux points de passage elles forment une matrice tridiagonale assez facile à résoudre par l'algorithme de Thomas :

```
0 1 2 3 4 5 6 7....n
z x x
  x x x
    x x x
      x x x
        x x x
          x x x
              x x z
```

Sur le schéma ci-dessus les termes significatifs sont marqués par un x, tous les autres sont nuls, les lettres z qui représentent des inconnues en dehors de la matrice correspondent aux dérivées secondes de la fonction au premier et au dernier point.

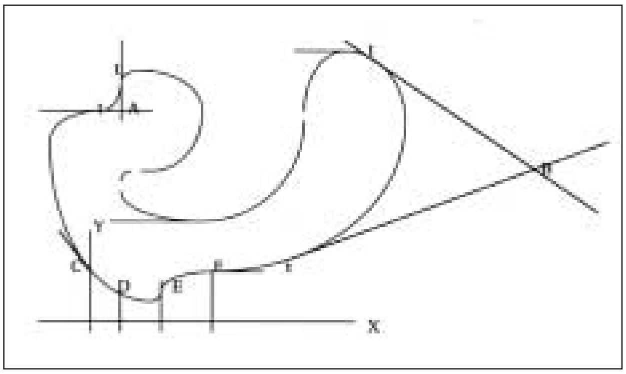
Voir [annexe III] pour une explication détaillée de cette relation qui est exactement celle utilisées pour le calcul des poutres continues en résistance des matériaux.

Les principaux défauts de tels tracés c'est qu'ils supposent d'abord que x0<x1<x2....<xn, c'est une contrainte extrêmement pénalisante, car elle dépend du système d'axes et cela interdit, évidemment, aussi les courbes fermées ! En outre, comme on le remarquera sur la figure le pas découpe sur la courbe des arcs inégaux qui ne permettent pas de la définir uniformément, comme on le désirerait : si on suppose qu'une partie de la courbe est très étendue en Y et peu étendue en X on ne pourra pas interpoler suffisamment de points, si on admet que le pas d'interpolation est fixe sur l'ensemble des points de contrôle. Dans ce cas, il faut, impérativement, utiliser un pas variable, fonction de l'allure de la courbe qu'on calcule, c'est possible sur les courbes peu «chahutées» en calculant sa dérivée qui est la tangente au point i de l'angle de la direction de la courbe avec l'axe des x : f'(x(i))= tg(α), pour avoir des points uniformément répartis, le long de la courbe selon un écart ds on adopte un pas variable x(i+1) - x(i) = ds. cos(α), si (est grand le pas réduira, mais on ne connaîtra pas exactement à l'avance le nombre n de points à interpoler, habituellement on prend un pas fixe x(k+1) - x(k) = pas (k est le numéro des points fixes, i est le numéro des points à interpoler dans un intervalle de k à k+1). Les courbes fermées devront être tracées en plusieurs fois en imposant des conditions de continuité entre les différents tracés. C'est sur ce point qu'on peut douter que tous les logiciels du commerce soient équivalents : comment sera tronçonnée une courbe fermée, comment seront fixées les courbures sur ces raccordements ; même si des modes opératoires uniformes étaient standardisés, les différents opérateurs les respecteraient-ils ou les comprendraient-ils ?

Il est, par exemple, possible de dire que les raccordements devront se faire sur des tronçons dont la courbure est faible et fixer f'' = 0 en ce point. Mais tout le monde fera-t-il de même ?

Les courbes de Bezier

En dehors des raccordements routiers, et encore, on ne voit pas l'utilité des courbes de Bézier dans la profession, pas plus d'ailleurs que des courbes qui sont dérivées des courbes de Bézier, les Basic splines (B-Splines) et les N U R B S (Non Uniform Rational Basic Splines), en raison de leur définition, qui se fait par des sortes de tracés directeurs, point d'ancrage et points de direction qui n'ont aucune matérialité sur un plan topographique. Elles ont pourtant le grand mérite de donner des expressions paramétriques des courbes, c'est-à-dire que les points interpolés sont calculés en X, Y et éventuellement Z, à partir d'un paramètre indépendant des coordonné est avec 0< t <1, et d'une fonction unique pour toutes les coordonnées, on obtient des tracés plus réguliers qu'avec les splines, on peut même dire sans reproches, c'est ce qui a fait leur succès international. Si on reprend le dessin du tracé graphique qui a, sans nul doute, inspiré l'auteur de ces courbes on verra que si on note A le vecteur {X,Y, Z... } de la position du point A, on a pour tout paramètre t = $\prod${0..1} : E = A.t + B.(1-t), F = D.t + C.(1-t), G = B .t + C.(1-t), H = E.t + G.(1-t), I = F.t + G.(1-t), J = H.t + I.(1-t). En faisant les produits on découvre les polynômes de Bernstein. L'intérêt est d'obtenir une relation paramétrique identique pour toutes les coordonnées. Pour quatre points on obtient un arc de cubique plane ou gauche paramètré par t. Comme le dit [2] Pierre Bézier lui-même : dans une automobile toutes les courbes sont gauches ! On pourrait ajouter une liste impressionnante de produits industriels qui sont dans le même cas. On peut imaginer définir les courbes naturelles par deux points de passage et deux tangentes en ces points on pourrait ainsi utiliser des arcs de paraboles se raccordant les uns aux autres, mais c'est une mauvaise idée. Imaginons les rivages d'un lac :



Malheureusement, on ne voit pas comment les courbes de Bézier, qui sont beaucoup plus pratiques que les splines, pourraient être utilisées par les géomètres-topographes pour numériser des détails naturels. La courbe pourrait être définie en relevant ses points de tangence t et ses sommets A et B. Toutefois, s'il s'agit d'un lac ou d'un bois, si le sommet B est accessible, le sommet A ne l'est pas, en revanche on peut définir une spline en relevant quatre points courants C, D, E, F, toutefois il faudra assurer la continuité des tangentes en C et en F, pour poursuivre la courbe complètement, ce qui n'est pas très facile en pratique et est même trop souvent négligé.

Conclusions

Depuis la vulgarisation du tracé informatique des courbes par la société Américaine Adobe on s'imagine, à tort, que le problème est résolu. Or, les solutions proposées sont loin de représenter une panacée, une part importante d'appréciation est laissée à ceux qui utilisent ces courbes, encore faudrait-il qu'ils sachent exactement les conséquences de leurs décisions sur la fiabilité du dessin réalisé, et, à tout le moins, ce qu'ils dessinent ! Personnellement, on maîtrise mal les petites aides graphiques qui accompagnent un traitement de texte, notamment la direction de la concavité des courbes, qui sont apparemment des arcs de paraboles carrées (degré 2), ce n'est pas très grave pour faire quelques illustrations, que serait ce s'il s'agissait de représenter des limites de parcelles !

C'est bien là le grand problème, la numérisation des plans impose ou imposera que les courbes qui doivent passe sur n points soient définies avec le minimum de nombres, par exemple les coordonnées des n points d'une spline cubique : 2.n nombres qui sont les coordonnées planes de ces points, et les quatre paramètres a0, a1, a2, a3, de définition de la courbe dans chaque intervalle, soit en tout 6.n-4 nombres avec lesquels, n'importe qui, avec n'importe quelle machine, et n'importe quel logiciel, devrait restituer une courbe unique, définie au millimètre ou au dixième de millimètre près, si cela a de l'intérêt pour lui, ou pour son travail. Les meilleurs logiciels seront ceux qui imposeront de ne stocker que le plus petit nombre de paramètres possible, et qui reproduiront la même courbe, quel que soit l'opérateur, le logiciel, le système d'exploitation et la machine employés. Il n'empêche que la spline cubique sera toujours incapable de tracer un cercle ou une ellipse, on doit utiliser une spline «carrée» (degré 2).

On recherche une nouvelle solution au problème général déjà très ancien, de tracé des courbes naturelles, jusqu'ici on n'a trouvé que la clothoïde [3] qui puisse concurrencer une spline cubique. On doit noter qu'à l'origine 0 les deux courbes sont confondues, le tracé de la clothoïde proposé en [4] découpe des arcs égaux sur elle-même, ce qui permet de la «rectifier», c'est-à-dire de déterminer sa longueur, une donnée qu'il peut être très intéressante de connaître. ●

Références

[1]Patrick Chenin, Michel Cosnard, Yvon Gardan, François Robert, Patrick Witomski : **Mathématiques et CAO - Méthodes de base** *édité par Hermès 1985-1986*

[2] Jean Cassagne : **Un inconnu célèbre : Pierre Bézier** *propos de Pierre Bézier recueillis par l'auteur in S V M n°69- Février 1990*

[3] José F.Zélaco : **Clothoïde unique de raccordement entre deux cercles** *in XYZ n° 16 -1986*

[4] Claude Million : **Mieux que la clothoïde la spirale adoucie** *in XYZ n°77 1998-4*

ANNEXES

Annexe I : tracé d'une cubique passant par quatre points

Une cubique peut être, le plus généralement possible, représentée par la relation suivante: y = a.x3 + b.x2 + c.x + d.

Il faut, au minimum, quatre points connus dans leurs deux coordonnées x et y pour définir une telle courbe soit (x_1, y_1 ; x_2, y_2 ; x_3, y_3 ; x_4, y_4) pour faciliter le calcul on pose $x_1 = y_6 = 0$ d'où on tire

$$x_2 \leftarrow (x_2 - x_1),\quad y_2 \leftarrow (y_2 - y_1)$$
$$x_3 \leftarrow (x_3 - x_1),\quad y_3 \leftarrow (y_3 - y_1)$$
$$x_4 \leftarrow (x_4 - x_1),\quad y_4 \leftarrow (y_4 - y_1)$$

ce qui évite en tout premier lieu, de prendre en compte des nombres très grands, on va avoir des cœfficients en x^6, mais ce qui simplifie aussi l'équation car, alors : $y_1 = 0$ =d, ce qui réduit le nombre des inconnues (a, b, c, d) à trois.

On a alors une relation linéaire:

$$\begin{matrix} x_2^3 & x_2^2 & x_2 \\ x_3^3 & x_3^2 & x_3 \\ x_4^3 & x_4^2 & x_4 \end{matrix} \; . \; \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \quad \begin{matrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{matrix}$$

dont la résolution est, si on le veut, directe. On pose et on calcule les paramètres suivants :

$$m = \sum_{i=2}^{4} (x_i^3)^2 ;\; p = \sum_{i=2}^{4} (x_i^3).(x_i^2) ;\; q = \sum_{i=2}^{4} x_i^4 ;$$

$$r = \sum_{i=2}^{4} (x_i^2)^2 ,\; s = \sum_{i=2}^{4} (x_i^2).(x_i) ;\; t = \sum_{i=2}^{4} x_i^2$$

$$u = \sum_{i=2}^{4} y_i.(x_i^3) ,\; v = \sum_{i=2}^{4} (y_i.(x_i^2)) ;\; w = \sum_{i=2}^{4} y_i.x_i .$$

$$q = r$$

On remarque que le déterminant de la matrice est :
det = m.r.t + 2.p.q.s + m.s² + t.p² et les solutions sont :

$$a = \frac{u.(r.t - s^2) + v.(q.s - p.t) + w.(p.s - q.r)}{\det}$$

$$b = \frac{u.(s.q - p.t) + v.(m - q^2) + w.(p.q - m.s)}{\det}$$

$$c = \frac{u.(p.s - r.q) + v.(p.q - m.s) + w.(m.r - p^2)}{\det}$$

il est très facile de programmer directement ces formules dont l=exécution est plus rapide qu=une résolution traditionnelle.

Annexe II : l'interpolation de Legendre

La relation d'interpolation de Legendre est la suivante: $y = y_1.L_1 + y_2.L_2 + y_3.L_3 + y_4.L_4$ Si on pose, comme précédemment : $x_1 = y_1 = 0$, en fixant l'origine des coordonnées au point 1, on aura : $y = y_2.L_2 + y_3.L_3 + y_4.L_4$ avec

$$L_i = \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^{4} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$ soit en développant :

$$L_2 = \frac{x.(x - x_3).(x - x_4)}{x_2.(x_2 - x_3).(x_2 - x_4)} = \frac{x^3 - (x_3 + x_4).x^2 + x_3.x_4.x}{x_2.(x_2 - x_3).(x_2 - x_4)};$$

$$L_3 = \frac{x.(x - x_2).(x - x_4)}{x_3.(x_3 - x_2).(x_3 - x_4)} = \frac{x^3 - (x_2 + x_4).x^2 + x_2.x_4.x}{x_3.(x_3 - x_2).(x_3 - x_4)};$$

$$L_4 = \frac{x.(x - x_3).(x - x_2)}{x_4.(x_4 - x_3).(x_4 - x_2)}; \frac{x^3 - (x_3 + x_2).x^2 + x_3.x_2.x}{x_4.(x_4 - x_3).(x_4 - x_2)};$$

Annexe III : splines cubiques

La fonction spline cubique est définie par les relations:
$s_j(x) = a_0 + a_1.(x - x_j) + a_2 + a_1.(x - x_j)^2 + a_3 + a_1.(x - x_j)^3$

$s'_j(x_j) = s'_{j-1}(x_j)$; $s''_j(x_j) = s''_{j-1}(x_j)$

Les constantes a sont fixées par les valeurs de la fonction en J et j+1 et par leurs dérivées premières en ces deux points.

En développant les relations on a:
$s_j(x_j) = (a_0 - a_1.x_j + a_2.x^2_j - a_3.x^3_j) + (a_1 - a_2.2.x_j - a_3.x^2_j).(x - x_j) + (a_2 + a_3.x_j).(x - x_j)^2 + a_3.(x - x_j)^2$

Et pour les dérivées
$s_j(x_j) = (a_1 - 2.a_2.x_j - 3.a_3.x^2_j) + 2.(a_2 + a_3.x_j).(x - x_j) + 3.a_3.(x - x_j)^2$

$s''_j(x) = (-2.a_2 + 3.a_3.x_j) + 6.a_2.(x - x_j)$ Il devient évident que

$a_0 = f(x_j)$; $a_1 = f'(x_j)$; $a_3 = s_j'''(x_j) / 6$

On doit noter que les dérivées secondes à l'origine et à l'extrèmité du tracé sont "libres".

- On peut poser : $s''(x_0) = 0$, $s''(x_n) = 0$, on dit alors que la courbe a des conditions aux limites "naturelles".
- On encore peut poser : $s''(x_0) = \alpha$, $s''(x_n) = \beta$, on dit alors que la courbe a des conditions aux limites "naturelles".
- On peut poser :$s''(x_0) = \alpha$, $s''(x_n) = \alpha$, on dit alors que la courbe a des conditions aux limites "naturelles".