

Analyse mathématique des possibilités cartographiques du système SPOT_____

Résumé de la thèse de docteur-ingénieur présentée à l'Ecole Nationale des Sciences Géographiques
par M. Thierry TOUTIN, ingénieur ETP, MSc

1. Introduction

La conception générale du système SPOT fut élaborée par le CNES pour satisfaire de nombreux utilisateurs à l'aide des technologies spatiales existantes. Les missions du système touchent à l'étude de l'utilisation du sol et de l'évolution de l'environnement, à la prospection des ressources naturelles renouvelables, minérales et énergétiques. Un compromis dû être fait, en fonction de ces différents utilisateurs, pour définir les caractéristiques générales du satellite - cf. **figure 2.1**. Ainsi dans le domaine cartographique, il était utile de connaître la précision que l'on pouvait attendre des images SPOT. Le but de cette recherche a donc été de savoir dans quelle mesure SPOT est un outil adapté à la cartographie.

Utilisant certaines lois de la mécanique céleste qui régissent la trajectoire d'un satellite et sa position sur celle-ci, nous développons des modèles mathématiques distincts dans les cas :

- d'une image
- d'images juxtaposées formant un segment.

2. Traitement par scène

2.1. Principe du traitement

L'utilisation des paramètres internes de la géométrie des capteurs HRV (haute résolution visible), dont les caractéristiques sont données dans la **figure 2.1**, est insuffisante pour la rectification de haute précision. Les gyroscopes ne donnent que des mesures de vitesse de la dérive d'attitude avec une précision de 10^{-5} degrés par seconde. Par contre l'attitude, elle, reste inconnue.

Il est donc nécessaire d'utiliser des paramètres externes tels que des points d'appui, mais aussi les paramètres d'orbite que l'on détermine par modélisation en connaissant une orbite approchée.

Ainsi on doit considérer que les capteurs HRV ne constituent pas à eux seuls les instruments de prise de vues : c'est l'ensemble du capteur et de l'orbite qui constituent cet instrument. Le passage du système instrumental à un système de projection final s'obtient par une série de transformations — cf. **références 2 et 3** — qui aboutissent à deux

équations liant les coordonnées terrain aux coordonnées ligne et colonne de l'image brute. Le centre de scène M_0 est pris comme point de référence.

Cette loi de passage permet de connaître facilement et mathématiquement le nombre d'inconnues décorréelées et la précision finale. La connaissance d'un certain nombre de points d'appui permet le calcul de ces inconnues grâce à la méthode de résolution par moindres carrés.

2.2. Modélisation

2.2.1. Système de projection final

Modéliser revient à trouver un système de relations mathématiques entre les coordonnées image et les coordonnées terrain d'un point. Il apparaît naturel qu'un système de référence lié à un plan tangent à l'ellipsoïde donnera des relations plus simples que l'utilisation des coordonnées géographiques λ et φ .

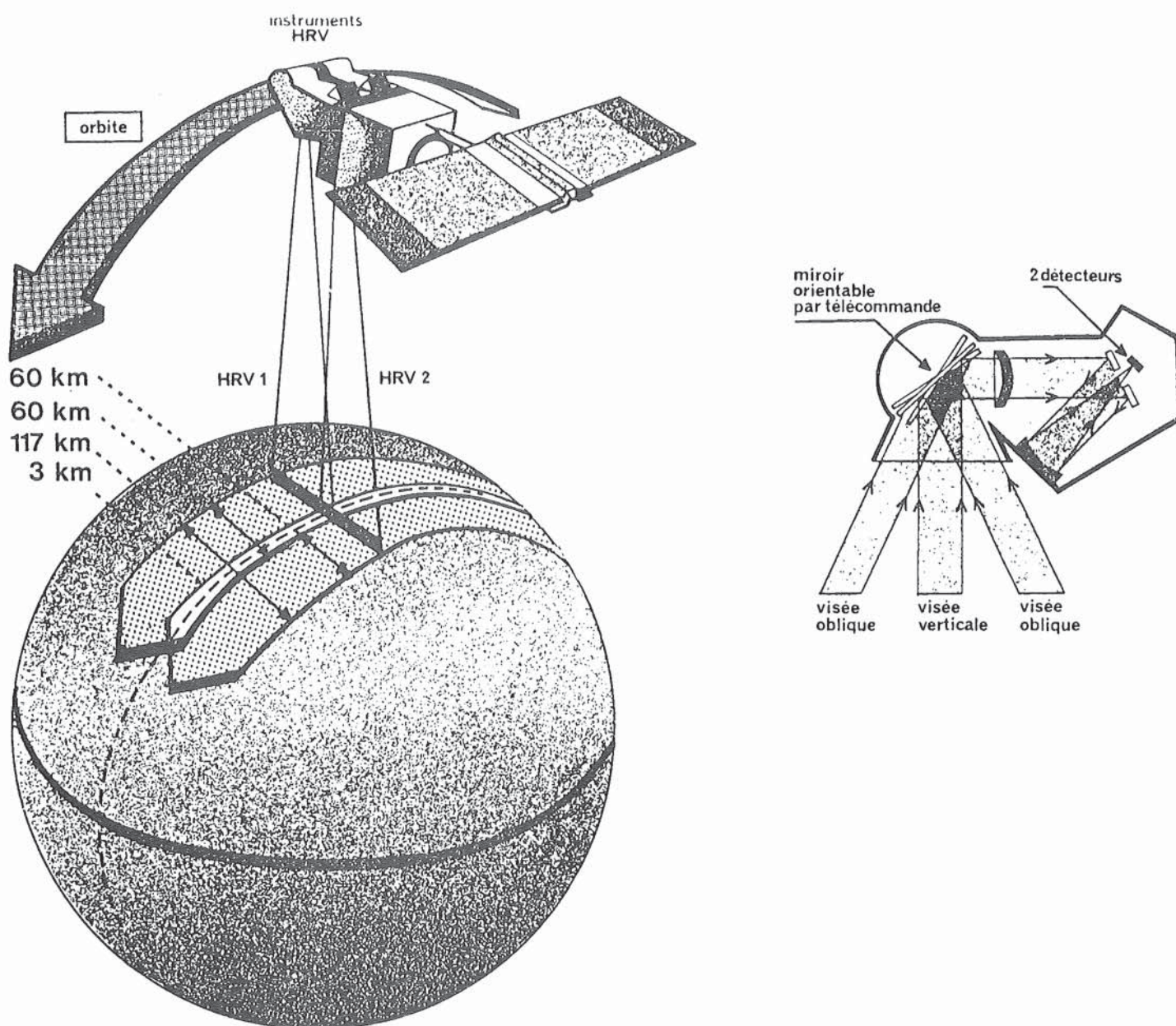
Ainsi le système de projection final utilisé pour une scène peut être caractérisé par les éléments ci-après :

- la projection est conforme, centrée sur M_0 , centre de la scène et d'échelle un en M_0 ,
- l'axe $M_0 x_p$ est tangent en M_0 à la trace du balayage à l'instant $t = 0$, projeté sur le plan tangent à l'ellipsoïde en M_0 . Cette projection de l'intersection ne diffère d'une droite que de deux mètres aux extrémités - cet écart provient du tangage systématique de $0,923 \cdot 10^{-2}$ radians résultant des impératifs de construction des barrettes HRV,
- l'axe $M_0 y_p$ est perpendiculaire à $M_0 x_p$ dans le sens de l'orbite croissante.

Dans la dimension d'une scène — $60 \text{ km} \times 60 \text{ km}$ —, toutes les projections ainsi définies ne diffèrent entre elles que de très peu ; l'échelle moyenne est égale à un dans toute la scène à un terme négligeable près.

2.2.2. Analyse des transformations

L'analyse complète des transformations avec son développement mathématique, peut être trouvée dans les **références 2 et 3**. Donnons simplement l'explication des passages entre les repères successifs.



Caractéristiques de l'instrument HRV	Mode multibande	Mode panchromatique
Bandes spectrales	0,50-0,59 μm 0,61-0,68 μm 0,79-0,89 μm	0,51-0,73 μm
Champ de l'instrument	4,13 degrés	4,13 degrés
Dimension du pixel en visée verticale	20 m \times 20 m	10 m \times 10 m
Nombre de pixels sur une ligne	3 000	6 000
Longueur d'une ligne balayée au sol, en visée verticale	60 km	60 km
Codage du pixel	3 \times 8 bits	6 bits DPCM (1)
Débit d'information	25 M bits/sec.	25 M bits/sec.

(1) DPCM est un mode de compression de données qui permet de conserver 256 niveaux de gris.

Fig. 2.1. : (d'après le CNES). Caractéristiques de l'instrument HRV et couverture complète du globe en visée verticale.

Ces équations constituent les équations de passage du système instrumental ligne-colonne (p, q) au système de projection final (x_p, y_p, h). Elles ne dépendent que de huit paramètres visibles :

$$P, \delta\gamma, \tau, a, b, c, \theta, Q$$

auxquels il faut ajouter trois inconnues "invisibles" : deux translations x_o, y_o et une rotation γ_o dans le plan.

- x_o et y_o sont les coordonnées du centre de projection M_o dans un système connu, que l'on prend évidemment le plus proche possible de M_o .

- $\gamma_o = \gamma + \Delta\gamma$ est l'orientation du système (x_p, y_p) par rapport à un système dirigé vers le nord.

On a ainsi :

$$x_p = (x - x_o) \cos \gamma_o - (y - y_o) \sin \gamma_o \quad (2.5)$$

$$y_p = (x - x_o) \sin \gamma_o + (y - y_o) \cos \gamma_o$$

On se rend bien compte que :

- les inconnues des deux équations (2.3) et (2.4) sont un mélange des différentes variables — leurs expressions littérales peuvent être trouvées dans la **référence 3** —,

- la connaissance des paramètres et/ou du centre de scène ne suffit pas à la détermination de ces inconnues.

Ces différentes variables sont :

- les paramètres de l'orbite (éléments osculateurs),
- les paramètres de la visée ($\beta_o, R, T, L, m_o, s_o$),
- la position géographique de la scène (λ_o, θ_o, r).

Certains de ces coefficients sont suffisamment bien déterminés, alors que d'autres le sont en fonction de la connaissance de l'orbite. On peut consi-

dérer que sur les onze inconnues, huit sont à déterminer de façon plus précise : quatre points d'appui en (x, y, h) seraient donc suffisants pour la résolution.

2.2.4. Equations complémentaires

D'une manière générale on a tout intérêt à conserver toutes les inconnues et à résoudre par moindres carrés le système en entier. Pour un certain nombre d'inconnues, on pourra intégrer au système de résolution des équations complémentaires. Ces dernières sont pondérées en fonction de la précision de l'estimation initiale : pour une inconnue "u" on a l'équation complémentaire :

$$\text{poids} \times \Delta u = 0 \quad (2.6)$$

Remarque : Le poids d'une équation d'observation dépend aussi de l'erreur de pointé ϵ_p , qui est elle-même fonction :

- des limites de l'attitude et de ses variations eu égard aux spécifications du satellite,
- de la valeur géodésique des points,
- de la précision du pointé.

3. Traitement par segment

3.1. Principe du traitement

Après le traitement d'une scène il est apparu normal de savoir dans quelles conditions on pourrait associer plusieurs images pour un traitement simultané. La première question était de voir dans quel sens ces images pourraient s'assembler. Il est apparu naturel, comme en photogrammétrie où l'on crée une bande de photographies dans le sens de vol de l'avion, de créer un segment avec des scènes provenant de la même orbite, ayant donc une "géométrie allongée" dans le sens nord-sud. Sens le plus logique puisque c'est celui de la trace du satellite. Cela ne fera donc intervenir qu'une seule

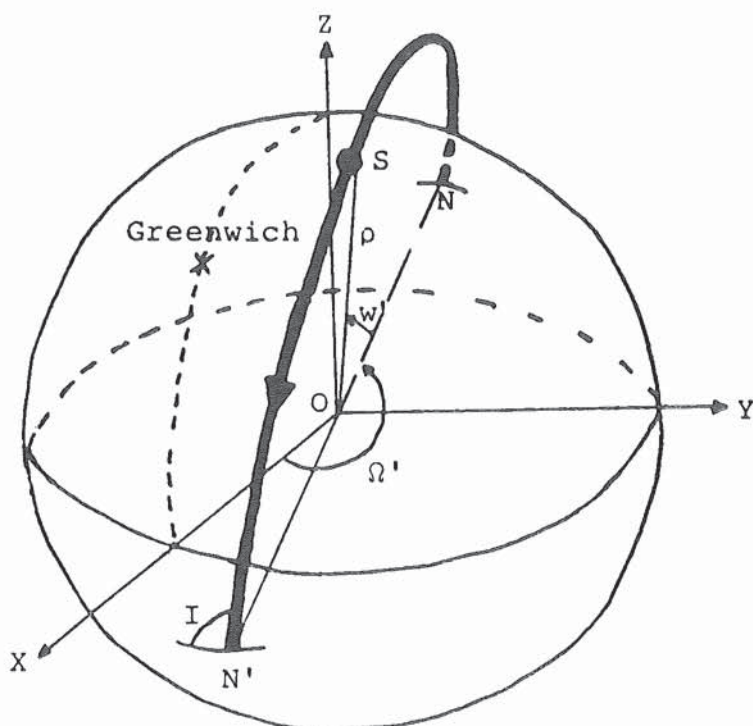


Figure 3.1. Orbite descendante.

Paramètres d'orbite

$$\rho = \overline{OS}$$

$$w' = (\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OS})$$

$$\Omega' = (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{ON})$$

$$= \Omega + vt$$

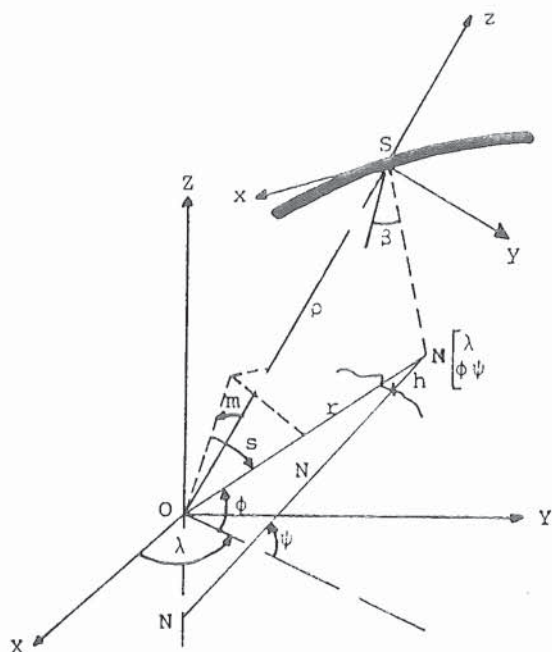
$$I = \text{inclinaison}$$

$$e \Rightarrow \eta_x = e \cos(w - w')$$

$$\omega \Rightarrow \eta_y = e \sin(w - w')$$

Pour SPOT l'inclinaison moyenne est :

$$I_n = 98,717$$



$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \psi &= \left[1 - \frac{e^2}{1 + \frac{h}{a}} \right] \operatorname{tg} \phi \\ r^2 &= (N+h)^2 \cos^2 \phi + (N(1-e^2)+h)^2 \sin^2 \phi \\ \frac{r \sin m \cdot \cos s}{\rho - r \cos s \cdot \cos m} &= (\operatorname{tg} T - \operatorname{tg} \beta \frac{\sin L}{\cos T}) \cos L \\ \frac{r \sin s}{\rho - r \cos s \cdot \cos m} &= \frac{\cos L}{\cos T} \operatorname{tg} \beta + \sin L \operatorname{tg} T \\ w' &= w - m \end{aligned}$$

Figure 3.2. Définition de m et s : rotation pour passer de OS à OM .

orbite — où plutôt une partie d'orbite —, et ainsi qu'une seule série de paramètres d'orbite et d'attitude.

Ainsi donc le segment, formé en général d'une dizaine d'images, aura une dimension de 600 km sur 60 km. Il forme l'unité de base dans les raisonnements et les calculs ; le découpage par scène ne devient alors qu'arbitraire. Différemment au traitement par scène dans lequel on calcule des variations dans le temps par rapport à un point de référence le centre de scène, ici aucune scène, aucun point n'ont de rôle privilégié dans les raisonnements et leurs aboutissements mathématiques : on introduira plutôt dans les calculs des écarts entre la valeur vraie inconnue et la valeur calculée des coordonnées géographiques ou des paramètres d'orbite

en chaque point. Le centre de segment n'intervient que pour l'initialisation de certains paramètres - exemples : l , r , w , β - mais un autre "centre" décalé d'une scène vers le nord ou le sud aurait abouti aux mêmes résultats sur l'ensemble du segment. Les différences minimales du départ seront compensées par la linéarisation du modèle mathématique et par les itérations du procédé de calcul.

3.2. Modèle mathématique

3.2.1. Equations de modélisation

En premier lieu il importe de trouver des relations qui lient les coordonnées géographiques λ_G et ϕ (ou ψ) de chaque point aux paramètres osculateurs pour une position S du satellite.

$$\begin{aligned} \cos \psi \Delta \lambda_G &= \cos \psi \Delta \Omega' - \sin \psi \cos(\lambda_G - \Omega') \Delta I + \cos \gamma \Delta s - \sin \gamma \cos s \Delta w \\ \Delta \psi &= \quad \quad \quad + \quad \quad \quad \sin(\lambda_G - \Omega') \Delta I - \sin \gamma \Delta s - \cos \gamma \cos s \Delta w \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\text{avec : } \sin \gamma = \frac{\sin I \sin s \sin w - \cos I \cos s}{\cos \psi} \quad (3.2)$$

$$\cos \gamma = - \frac{\sin I \cos w}{\cos \psi}$$

Le système d'équations (3.5) constitue donc les équations de modélisation pour chaque point d'appui : λ_G , ϕ , ou ψ .

Les variations $\Delta \lambda_G$, $\Delta \phi$, $\Delta \Omega'$, ΔI , Δs , Δw ne sont pas des variations fonction du temps, mais des écarts valeur vraie - valeur calculée en chaque point d'appui.

Pour les inconnues $\Delta \Omega'$, ΔI , Δs , Δw , les écarts seront calculés et cumulés au cours des itérations à partir d'une valeur initiale de l'inconnue pour tendre vers la valeur vraie.

Quant à $\Delta \lambda_G$ et $\Delta \psi$, on définit pour chaque point d'appui λ_G , ϕ et h , qui sont les valeurs vraies :

$$\begin{aligned} N &= \frac{a_T}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}} \\ \operatorname{tg} \psi &= \frac{N(1 - e^2) + h}{N + h} \operatorname{tg} \phi \\ r &= \sqrt{(N+h)^2 \cos^2 \phi + (N(1 - e^2) + h)^2 \sin^2 \phi} \end{aligned} \quad (3.3)$$

et les valeurs calculées sont données par les formules :

$$\lambda_c = \Omega' + \text{Arctg} \left(\frac{\cos I \cdot \sin w - \sin I \cdot t \cdot g s}{\cos w} \right) \quad (3.4)$$

$$\psi_c = \text{Arc sin}(\sin I \cos s \cdot \sin w + \cos I \cdot \sin s)$$

ce qui donne pour les équations d'observations :

$$\begin{aligned} d\lambda_g &= \lambda_g - \lambda_c \\ d\psi &= \psi - \psi_c \end{aligned} \quad (3.5)$$

3.2.2. Lois d'évolution

Pour pouvoir estimer les valeurs initiales des paramètres osculateurs en chaque point du segment,

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \delta_1 \rho t + \delta_2 \rho t^2 + \delta_3 \rho t^3 \\ I &= I_0 + \delta_1 I t + \delta_2 I t^2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\Omega' = \Omega'_0 + \delta_1 \Omega' t + \delta_2 \Omega' t^2 \quad \text{avec : } \Omega' = \Omega - H_s \quad H_s = \text{heure sidérale}$$

$$\begin{aligned} w &= w_0 + \delta_1 w t + \delta_2 w t^2 + \delta_3 w t^3 + w_q \frac{\alpha q}{1 + \theta \alpha q} \\ &+ w_h \left[h - \frac{Q^2 \alpha^2 q^2}{2r} \right] + w_{tq} t \alpha q + \frac{H_0}{r_0} (\text{mesure } (T - \text{tg} \beta_0 L)) \end{aligned}$$

$$\beta = \beta_0 + \delta_1 \beta t - \text{Arctg}(\alpha q) + \text{mesure } (R)$$

$$s = \text{Arcsin} \left[\frac{\rho}{r} \frac{\sin \beta'}{\cos m_0} \right] - \beta' \quad \text{avec : } \beta' = \text{Arctg} \left[\frac{\text{tg} \beta \cos m_n}{\cos T_n} \right]$$

$$\text{avec : } H_0 = \rho_0 - r_0 \cos s_0 \cos m_0$$

$$\theta = \text{tg}(\beta_0 + s_0) = \text{tg} \omega$$

$$Q = H_0 / \cos \beta_0 \cos \omega$$

H_0 peut être considéré comme la "hauteur du satellite" au-dessus du plan tangent en M_0 , et Q le facteur d'échelle moyen car $Q \alpha q \neq x$.

Le temps t est lié à la coordonnée ligne par la relation :

$$t = k.p. \text{ avec pour le panchromatique } k = 1,504 \cdot 10^{-3}$$

2/ Les onze inconnues qui se répartissent de la façon suivante :

• neuf inconnues "visibles" dans les lois d'évolution :

$$\begin{aligned} \rho_0, \delta_1 \rho \\ \Omega'_0 \end{aligned}$$

$$w_0, w_q, w_h, w_{tq}$$

$$\beta_0, \delta_1 \beta$$

• deux inconnues "invisibles" intervenant dans les autres coefficients :

$$\omega_1, n$$

il est intéressant de connaître l'évolution de ces paramètres le long du segment. Ces paramètres sont de deux ordres :

- relatif à l'orbite : ρ, I, Ω' ,
- relatif au satellite : w, β, T, R, L, s, m .

Le modèle choisi est une loi d'évolution pour six paramètres indépendants — $\rho, I, \Omega', w, \beta, s$ — développée suivant les trois axes x, y, z , ou ce qui revient au même α, q, t et h .

Pour s et m , angles de rotation pour passer du repère satellite au repère centré en O et dont l'axe Oz passe par M (cf. figure 3.2), le développement exact est complexe et fait intervenir des termes d'ordre trois et des termes croisés.

1/ Les lois d'évolution

Les autres coefficients traités comme des paramètres dont on connaît une formule mathématique donc une valeur numérique pour chaque segment :

$$\begin{aligned} \delta_2 \rho, \delta_3 \rho \\ \delta_1 I, \delta_2 I \\ \delta_1 \Omega', \delta_2 \Omega' \\ \delta_1 w, \delta_2 w, \delta_3 w, (\eta_x) \end{aligned}$$

3.2.3. Equations d'observation

La dernière étape est la différenciation des lois d'évolution en fonction des onze inconnues.

Les "écarts" $\Delta I, \Delta \Omega', \Delta w, \Delta s$ remplacés dans les deux équations (3.1), donnent finalement les deux équations d'observation finales liant toutes les inconnues entre elles :

1/ L'équation en l

$$\begin{aligned}
 & s_{\beta} \cos \gamma (\Delta \beta_0 + \Delta \delta_1 \beta t) + (-\sin \gamma \cos \sigma + s_{\rho} \rho_0 \cos \gamma \sin t) \Delta n t \\
 & - \sin \gamma \cos \sigma \left[\Delta w_0 + \frac{\alpha q}{1 + \theta \alpha q} \Delta w_q + \left(h - \frac{Q^2 \alpha^2 q^2}{2r} \right) \Delta w_h + t \alpha q \Delta w_{tq} \right] \\
 & + s_{\rho} \cos \gamma \left(1 + \frac{3}{2} n^2 t^2 \right) \Delta \rho_0 + \left[\frac{s_{\rho} \cos \gamma}{n} \sin n t + \frac{n \sin \gamma \cos \sigma}{\rho_0} t^2 \right] \Delta \delta_1 \rho \\
 & + t (n t \cos \gamma + \sin \sigma \sin \gamma) \Delta \omega_1 + \cos \psi \Delta \Omega'_0 = (\lambda_g - \lambda_c) \cos \psi \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

2/ L'équation en ϕ

$$\begin{aligned}
 & - s_{\beta} \sin \gamma (\Delta \beta_0 + \Delta \delta_1 \beta t) - (\cos \gamma \cos \sigma + s_{\rho} \rho_0 \sin \gamma \sin t) \Delta n t \\
 & - \cos \gamma \cos \sigma \left[\Delta w_0 + \frac{\alpha q}{1 + \theta \alpha q} \Delta w_q + \left(h - \frac{Q^2 \alpha^2 q^2}{2r} \right) \Delta w_h + t \alpha q \Delta w_{tq} \right] \\
 & - s_{\rho} \sin \gamma \left(1 + \frac{3}{2} n^2 t^2 \right) \Delta \rho_0 + \left[\frac{s_{\rho} \sin \gamma}{n} \sin n t + \frac{n \cos \gamma \cos \sigma}{\rho_0} t^2 \right] \Delta \delta_1 \rho \\
 & + t (-n t \sin \gamma + \sin \sigma \cos \gamma) \Delta \omega_1 = \psi - \psi_c \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

On remarque que l'on peut obtenir l'équation (3.8) à partir de l'équation (3.7) en remplaçant γ par $\gamma + \pi/2$.

3.3. Equations complémentaires

Un satellite n'est pas un OVNI. Il est régi par des règles physiques, qui se traduisent par des relations mathématiques entre différents paramètres. Au contraire de la ligne de vol d'un avion, le satellite reste sur son orbite définie à l'avance. On peut la considérer comme "plus ou moins" rigide : ce "plus ou moins" est fonction des variations tolérées des paramètres d'orbite et d'attitude du satellite. Cette rigidité d'orbite est un facteur supplémentaire très important qui n'existait pas dans le domaine de la photogrammétrie conventionnelle. Ne pas en tenir compte reviendrait à utiliser un outil performant sans se servir de toutes ses qualités : une régression en quelque sorte. C'est pour cela qu'on utilise les variations des éléments osculateurs obéissant rigoureusement aux équations de Lagrange.

Bloquant ainsi certains paramètres dans des intervalles déterminés, on empêche les équations d'observation de diverger. Dans le cas de géodésie peu précise ou des points d'appui mal définis, la rigidité de l'orbite aura un rôle prépondérant dans le calcul des inconnues par rapport aux équations d'observation, évitant ainsi de "tordre" l'orbite pour la faire coller aux points d'appui.

Ces équations d'observation sont donc pondérées en fonction de la connaissance du paramètre considéré dans l'équation, et de l'erreur de pointé ϵ_p - cf. § 2.2.4.

4. Traitement stéréoscopique

4.1. Principe du traitement

Comme en photogrammétrie, il paraissait naturel de se poser la question du traitement de plusieurs ima-

ges SPOT. Un premier cas a été traité dans le paragraphe précédent : celui de plusieurs scènes juxtaposées dans la direction nord-sud et provenant de la même orbite.

Le deuxième cas qui vient à l'esprit, puisque SPOT dispose d'un miroir orientable latéralement — perpendiculairement à la trace du satellite —, est celui de plusieurs scènes provenant d'orbites différentes et recouvrant une même partie de terrain. Ainsi, puisque le même élément est vu de deux points de vues différents, on introduit la notion de stéréoscopie donc de troisième dimension : l'altitude.

Il est bien évident, toujours grâce au miroir orientable par pas de 0°6, que le nombre d'orbites pouvant recouvrir la même partie du terrain peut être supérieur à deux. Dans ce cas, on procède au même traitement stéréoscopique en combinant les orbites deux à deux. Cela est un atout supplémentaire pour accroître la précision finale.

Comme dans ce cas de traitement stéréoscopique, il s'agit de traiter un segment de 600 km sur 60 km, les considérations faites pour le traitement par segment sont aussi valables, à savoir en résumé :

- l'unité de base est le segment,
- aucune scène, aucun point n'ont de rôle privilégié dans les raisonnements,
- les variations introduites dans les calculs sont des écarts "valeur vraie - valeur calculée" pour les coordonnées géographiques et pour les paramètres d'orbite, en chaque point.

4.2. Modèle mathématique

Par rapport au traitement par segment, rien n'est changé :

- ni les équations liant les coordonnées géographiques (λ_g , φ ou ϕ , h) d'un point aux paramètres osculateurs (w , l , s) du satellite sur son orbite,

• ni les équations de modélisation (3.1) pour chaque point, obtenues par dérivation des équations.

Mais pour chaque orbite, il y a bien entendu ces deux ensembles d'équations ; car si les points au sol sont les mêmes, les paramètres osculateurs sont différents pour chaque orbite.

Puisque l'on a introduit la notion de stéréoscopie, il y a lieu de distinguer comme en photogrammétrie :

1/ Les équations pour les points d'appui dont on connaît les coordonnées géographiques.

On aura deux équations de modélisation par orbite. Si N est le nombre d'orbites utilisées, on a 2N équations par point d'appui.

Ces équations sont les mêmes que pour le traitement par segment - cf. **équations (3.1)**.

2/ Les équations pour les points homologues, pour lesquels on va calculer les coordonnées géographiques.

Pour obtenir ces équations, il suffit d'éliminer les coordonnées géographiques λ_G et ψ inconnues, en faisant la différence des couples d'équations de modélisation (3.1) provenant de deux orbites différentes. On obtient ainsi deux nouvelles équations de modélisation pour une nouvelle inconnue h_i , et ce par couple d'orbites.

Remarque : Pour plus de simplicité, on peut prendre la première orbite en référence et calculer les couples 1-2, 1-3, ..., 1-N.

Nous obtenons le résultat suivant pour le couple d'orbite 1-j :

1/ Equation en λ

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i=j}} (-1)^i \left\{ s_{\beta_i} \cos \gamma_i (\Delta \beta_{0_i} + \Delta \delta_1 \beta_i t) + (-\sin \gamma_i \cos \sigma_i + s_{\rho_i} \rho_{0_i} \cos \gamma_i n_i t) \Delta n_i t \right. \\ - \sin \gamma_i \cos \sigma_i \left[\Delta w_{0_i} + \frac{\alpha q_i}{1 + \theta_i \alpha q_i} \Delta w_{q_i} + \left(h_k - \frac{Q_i^2 \alpha^2 q_i^2}{2r} \right) \Delta w_{h_i} + t \alpha q_i \Delta w_{tq_i} \right] + \\ + s_{\rho_i} \cos \gamma_i \left(1 + \frac{3}{2} n_i^2 t^2 \right) \Delta \rho_{0_i} + \left[\frac{s_{\rho_i} \cos \gamma_i}{n_i} \sin n_i t + \frac{n_i \sin \gamma_i \cos \sigma_i}{\rho_{0_i}} t^2 \right] \Delta \delta_1 \rho_i \\ + t (n_i t \cos \gamma_i + \sin \sigma_i \sin \gamma_i) \Delta w_{1_i} - (\sin \gamma_i \cos \sigma_i w_{h_i} + \frac{\rho_i}{r} s_{\rho_i} \cos \gamma_i) \Delta h_k \\ \left. + \cos \psi_c \Delta \Omega_{0_i}' \right\} = \cos \psi_c (\lambda_{c_j} - \lambda_{c_i}) \quad (4.1)$$

2/ Equation en ψ

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i=j}} (-1)^i \left\{ -s_{\beta_i} \sin \gamma_i (\Delta \beta_{0_i} + \Delta \delta_1 \beta_i t) - (\cos \gamma_i \cos \sigma_i + s_{\rho_i} \rho_{0_i} \sin \gamma_i n_i t) \Delta n_i t \right. \\ - \cos \gamma_i \cos \sigma_i \left[\Delta w_{0_i} + \frac{\alpha q_i}{1 + \theta_i \alpha q_i} \Delta w_{q_i} - \left(h_k - \frac{Q_i^2 \alpha^2 q_i^2}{2r} \right) \Delta w_{h_i} + t \alpha q_i \Delta w_{tq_i} \right] \\ - s_{\rho_i} \sin \gamma_i \left(1 + \frac{3}{2} n_i^2 t^2 \right) \Delta \rho_{0_i} + \left[-\frac{s_{\rho_i} \sin \gamma_i}{n_i} \sin n_i t + \frac{n_i \cos \gamma_i \cos \sigma_i}{\rho_{0_i}} t^2 \right] \Delta \delta_1 \rho_i \\ \left. + t (-n_i t \sin \gamma_i + \sin \sigma_i \cos \gamma_i) \Delta w_{1_i} - (\cos \gamma_i \cos \sigma_i w_{h_i} - \frac{\rho_i}{r} s_{\rho_i} \sin \gamma_i) \Delta h_k \right\} \\ = \psi_{c_j} - \psi_{c_i} \quad (4.2)$$

en prenant comme convention $(-1)^j = 1$.

On remarque que l'on peut obtenir l'équation (4.2) à partir de l'équation (4.1) en remplaçant λ_i par $\lambda_i + \frac{\pi}{2}$.

4.3. Equations complémentaires

Le jeu d'équations complémentaires reste valable dans le traitement stéréoscopique. Comme il y a plusieurs orbites, mais avec les mêmes spécifications, il y aura autant de jeux d'équations complémentaires que d'orbites. Les valeurs nominales changent, mais les poids restent les mêmes puisqu'ils ne sont pas fonction de l'orbite proprement dite mais des variations des différents paramètres osculateurs et d'attitude.

4.4. Analyse des résultats

Donnons des exemples sur un segment de dix scènes dans des cas qui se rapprochent de la réalité :

- une dizaine de points d'appui par segment
- une dizaine de points homologues par scène
- une précision de points d'appui tenant compte de la valeur géodésique des points, et des erreurs intervenant dans les procédés de mesure.

Remarque : Dans les trois tests, les résultats sont présentés scène par scène.

1^{er} test : 11 points d'appui répartis le long du segment — 600 km × 60 km —,
de précision planimétrique : 5 m
et altimétrique : 2 m

Cas attitude
mesurée

Cas sans
attitude

1/ Erreur en mètre sur le centre de scène
(erreur absolue)

x	y	z
6,6	3,1	-1,9
-6,3	2,1	0,2
-3,2	0,8	2,6
1,0	0,9	3,3
-2,0	1,3	1,8
-3,1	1,9	-1,1
-3,7	0,2	2,2
-3,2	-1,7	2,7
-3,2	-2,0	2,3
-6,7	-1,4	-2,6

x	y	z
-12,0	-3,0	1,6
-8,3	4,1	1,3
-4,0	1,7	3,2
1,8	3,8	3,1
2,0	7,1	0,5
3,8	11,1	-3,1
-0,6	11,1	-0,2
-4,5	-5,6	2,0
-2,7	-1,9	1,0
-9,4	-16,8	-1,8

2/ Cohérence à l'intérieur d'une scène en mètre
(erreur relative)

1,9	1,1	3,6
1,3	1,2	2,2
2,0	1,2	1,9
2,8	1,1	2,4
1,2	1,0	1,7
1,4	1,3	3,5
1,4	1,9	2,0
1,5	1,4	2,5
1,4	1,5	2,4
1,3	1,5	3,0

4,0	3,9	2,6
2,9	4,8	2,2
1,9	4,3	2,1
2,6	4,9	2,8
1,4	3,2	1,9
3,2	4,9	3,5
3,7	7,2	1,6
2,1	5,5	2,4
3,0	5,4	2,0
3,0	6,0	2,6

emq 1,9 1,4 2,7

3,0 5,4 2,5

2^e test : 11 points d'appui répartis le long du segment,
de précision planimétrique : 10 m
et altimétrique : 2 m

Cas attitude
mesurée

Cas sans
attitude

1/ Erreur en mètre sur le centre de scène
(erreur absolue)

	x	y	z		x	y	z
▲	-3,5	6,8	-0,7		-8,9	4,3	4,8
	-3,8	5,1	1,6		-6,0	9,9	4,0
▲	-1,6	3,1	3,8		-2,5	6,0	5,4
	1,8	2,4	4,5		2,4	6,6	4,8
▲	-1,9	2,2	2,7		1,8	8,6	1,4
	-3,9	2,1	-0,6		2,8	11,0	-2,9
▲	-5,4	-0,2	2,3		-2,5	9,6	-0,8
	-5,8	-2,7	2,2		-7,2	-8,6	0,5
▲	-6,8	-3,5	1,3		-6,2	-6,3	-1,3
	-11,3	-3,5	-4,3		-13,7	-22,6	-5,1

2/ Cohérence à l'intérieur d'une scène en mètre
(erreur relative)

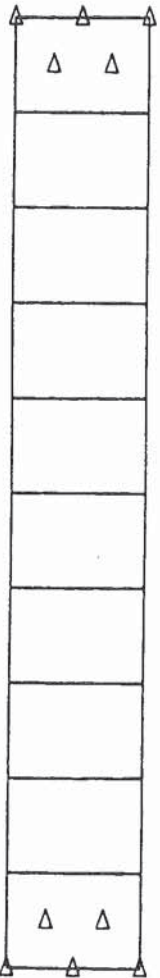
	x	y	z		x	y	z
▲	1,8	2,3	3,3		3,8	5,4	3,0
	1,4	2,5	2,1		2,9	5,6	2,3
▲	1,7	2,6	1,9		1,7	6,0	2,3
	2,7	2,5	2,5		2,4	5,7	3,1
▲	1,2	2,3	1,6		1,6	5,0	2,5
	1,6	2,7	3,5		3,4	5,8	3,6
▲	1,8	3,3	2,3		4,2	8,5	1,5
	1,7	2,8	2,9		2,5	6,8	2,5
▲	1,6	2,9	2,7		3,2	6,8	2,3
	2,7	2,9	3,4		3,4	7,4	2,8
emq	2,0	2,8	2,8		3,2	6,7	2,8

3^e test : 10 points d'appui en bord de segment nord-sud,
de précision planimétrique : 100 m
et altimétrique : 2 m

**Cas attitude
mesurée**

**Cas sans
attitude**

**1/ Erreur en mètre sur le centre de scène
(erreur absolue)**

	x	y	z		x	y	z
	8,1	-20,3	-2,6		-26,5	-33,6	-1,2
	7,3	-20,8	-0,3		-16,7	-25,3	0,4
	9,1	-21,7	2,2		-6,3	-25,9	3,8
	12,0	-21,2	2,2		5,2	-21,2	4,7
	8,0	-20,4	1,7		11,1	-14,5	2,5
	5,7	-19,6	-0,9		18,6	-6,5	-0,7
	3,7	-21,0	2,5		19,6	-1,8	2,0
	3,0	-22,6	3,2		21,1	-13,1	3,7
	1,6	-22,7	3,0		28,2	-3,2	2,1
	-3,1	-21,9	-1,7		26,7	-11,3	-1,4

**2/ Cohérence à l'intérieur d'une scène en mètre
(erreur relative)**

	3,2	4,7	3,5		5,9	5,6	2,5
	2,3	4,8	2,3		4,7	6,8	2,5
	2,6	5,0	1,8		3,9	6,1	2,4
	3,3	4,9	2,3		4,7	7,6	2,8
	2,8	4,7	1,6		1,7	5,8	1,5
	2,4	5,0	3,5		3,9	8,2	3,5
	2,3	5,4	2,0		3,1	8,1	1,9
	2,1	5,1	2,6		3,9	8,0	2,5
	2,6	5,2	2,4		4,8	7,4	2,1
	3,3	5,2	3,0		4,1	7,5	2,3
emq	2,9	5,3	2,7		4,4	7,6	2,6

Les résultats parlent d'eux-mêmes, surtout si l'on n'oublie pas la précision de départ des points d'appui.

5. Conclusion

Dans l'ensemble, les résultats sont plus que satisfaisants : que ce soit dans le cas de géodésie dense et précise, ou de géodésie peu précise ; ils permettent ainsi d'imaginer des applications cartographiques impensables précédemment par les méthodes conventionnelles.

Dégageons quelques points précis et tirons-en les enseignements que peut nous apporter SPOT.

1/ En premier lieu, les modèles mathématiques utilisés, liés à la mécanique céleste, étant très stables et gardant la rigidité de l'orbite dans un intervalle déterminé, l'utilisation de filtres ou de systèmes de détection d'erreur devient inutile. Toute faute dans le pro-

cedé de mesure, ou toute erreur grossière est détectée dans le traitement, et le point ressort en résidu avec la valeur de l'erreur commise.

De même pour certains systématismes, on les retrouve après le traitement sur l'ensemble de la scène, se traduisant ainsi par une erreur absolue, mais ne se répercutant pas sur la cohérence intérieure d'une scène : ce qui est le plus important pour l'obtention d'un produit cartographique.

2/ En second lieu, à partir d'un certain niveau, le nombre et la répartition des points d'appui n'influence plus que très peu la qualité des résultats, — en particulier l'erreur relative.

En effet, on doit s'attendre à avoir des résultats inférieurs ou égaux à l'erreur moyenne quadratique du bruitage sur les points d'appui divisée par la racine carrée du nombre de points moins un. Il faudrait considérablement augmenter le nombre de points d'appui pour diminuer la précision absolue des résultats alors que la précision relative ne changerait pas significativement.

Quant à la répartition des points, on le constate aisément dans les différents tests effectués, — ceci résultant toujours de la rigidité de l'orbite.

3/ Un point important relatif aux modèles mathématiques, outre les développements linéaires assurant une convergence très rapide, et est sa souplesse d'emploi.

La manipulation des équations permet donc de s'adapter à des cas très particuliers, dans lesquels on peut introduire telle ou telle donnée supplémentaire — points au bord d'un lac, distance entre deux points,...

—, qu'il est en outre possible de pondérer en fonction de la précision initiale de la donnée.

4/ La rigidité de l'orbite et la stabilité des équations font que le facteur primordial de précision est l'attitude du satellite.

Ainsi :

- la stabilité de l'attitude du satellite grâce au système de mesure HRV (Haute Résolution Visible) ligne par ligne, et

- la connaissance de ses variations par les enregistrements à bord, sont les raisons principales de la qualité des résultats.

On remarque du reste que les résidus en λ (ou en q) sont meilleurs que les résidus en ψ (ou en p). Cela provient des panneaux solaires qui bougent toutes les secondes ; ainsi par le principe de l'action-réaction d'un "corps isolé", les variations non linéaires du tangage sont plus importantes que celles du roulis — sens perpendiculaire à la trace donc sens de q . Cela se retrouve sur les simulations d'attitude, dont les résultats sont donnés dans les **figures 5.1 et 5.2**.

Nous voyons que sur dix scènes, la partie principale de l'effet au sol de l'attitude est linéaire — aux environs de 100 mètres. Mais cela n'affecte en rien la précision de restitution, car cette partie linéaire s'intègre dans les paramètres du modèle mathématique — respectivement $\delta_1 w$ et $\delta_1 \beta$ pour T^* et R .

Avec les mesures à bord les résidus restent inférieurs à 2 mètres ; et sans mesure à bord ils sont inférieurs en valeur absolue à 13 mètres — pour le cas extrême de T^* .

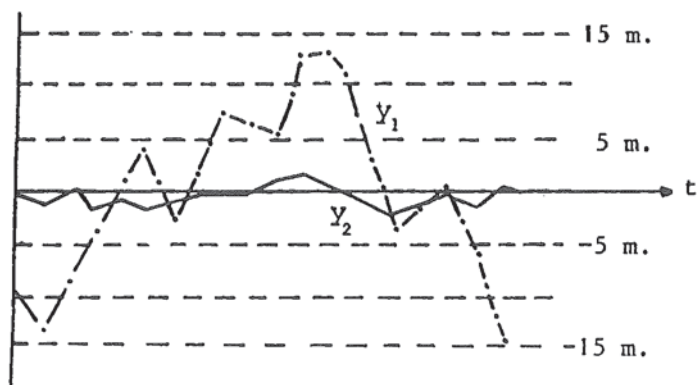


Figure 5.1 : Variations de tangage sur dix scènes ($t = 90$ s).

$$Y_1 = \text{tangage}^* \text{ vrai} - \delta_1 T_1^* t$$

$$Y_2 = \text{tangage}^* \text{ vrai} - \text{tangage}^* \text{ mesuré} - \delta_1 T_2^* t$$

$$\delta_1 T_1^* = -4,16 \cdot 10^{-6}$$

$$\delta_1 T_2^* = -2,78 \cdot 10^{-7}$$

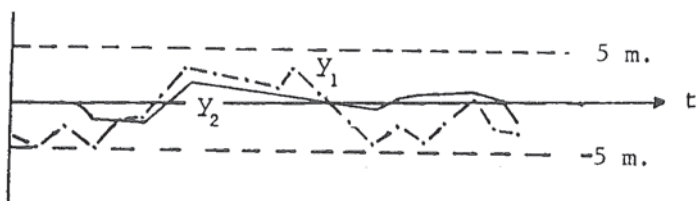


Figure 5.2 : Variations du roulis sur dix scènes ($t = 90$ s).

$$Y_1 = \text{roulis vrai} - \delta_1 R_1 t$$

$$Y_2 = \text{roulis vrai} - \text{roulis mesuré} - \delta_1 R_2 t$$

$$\delta_1 R_1 = -2,26 \cdot 10^{-6}$$

$$\delta_1 R_2 = -3,70 \cdot 10^{-7}$$

En outre, ces courbes Y_1 correspondant aux effets des variations non linéaires des attitudes sont analogues à celles des résidus sur les coordonnées géographiques d'un traitement par segment ou stéréoscopique dans le cas sans attitude.

Cette similitude permet donc de réintroduire ligne par ligne dans les mesures d'attitude ces résidus d'un premier traitement pour améliorer les résultats par un deuxième traitement, dans le cas où la valeur géodésique des points est de bonne qualité.

5/ Dans les traitements stéréoscopiques, on a constaté d'une manière générale que l'altitude se dégradait très peu en passant du cas attitude mesurée au cas sans attitude.

Dans les calculs, l'altitude est déterminée par deux coefficients θ et τ ; or, le rapport τ sur θ est inférieur à un centième. On peut donc considérer que θ est le facteur principal de détermination de l'altitude.

On se souvient que :

$$\theta = \tan \omega = \tan (\beta + s_0)$$

c'est-à-dire qu'il intervient dans le sens perpendiculaire à la trace du satellite, donc dans le sens du roulis.

Nous venons de dire que le roulis était l'élément de l'attitude dont les variations étaient les plus faibles ; ce qui explique donc le peu de changement entre les deux cas d'attitude.

Ces deux dernières constatations valident le propos sur la corrélation entre l'attitude du satellite et la précision des résultats.

Le produit SPOT serait-il donc un produit de valeur cartographique ? Il est intéressant de considérer trois aspects de ce produit sachant que les normes peuvent varier suivant les pays.

a) La précision absolue par rapport à un système cartésien OXYZ est très variable, dépendant de la géodésie existante :

en x, y	500 m	
en h	fonction	du
	géοide	

(+ désorientation, + échelle)

ce qui d'ailleurs a peu d'importance pour les besoins des utilisateurs et pour le traitement d'images satellite.

b) La précision relative dans une zone donnée :

- en x,y 0,2 mm à l'échelle du produit cartographique
- en h en rapport avec la précision précédente

c) La représentation des détails, et d'informations complémentaires :

- les spécifications sont très variables.

Prenons maintenant deux cas de produit cartographique, et regardons si SPOT est adapté aux trois différents aspects considérés plus haut :

	a/ oui	
	b/ x,y	très largement ≤ 10 m
au 1/50 000	h	oui ≤ 5 m
	c/ non	pour les pays développés
		oui pour beaucoup d'autres pays

a/ oui

b/ x,y oui ≤ 5 m

h non pour les pays développés

oui pour beaucoup d'autres pays ≤ 5 m

au 1/25 000

c/ non

On peut ainsi dire qu'à l'échelle du 1/50 000 on aura dans tous les cas une carte, et non une esquisse ou un fond topographique mais qu'à l'échelle du 1/25 000 on obtiendra un produit — au sens strict — non cartographique, mais utilisable pour des applications thématiques destinées à être géocodées ou cartographiées ; produit qui sera tout à fait adéquat pour des superpositions diachroniques.

Il ne faut pas oublier, que l'impact économique de ce produit SPOT aura sans aucun doute pour effet de convaincre un certain nombre de pays, dont les normes cartographiques ne sont pas aussi strictes qu'en France, d'utiliser ces traitements d'images SPOT dans le but d'obtenir une cartographie au 1/25 000.

Des raisons supplémentaires économiques qu'on peut invoquer à l'avantage de SPOT sont :

- diminution des travaux de terrain,
- diminution du nombre de prises de vues,
- diminution des travaux de restitution,

DONC : DIMINUTION DU PRIX COUTANT.

Une autre forme de produit cartographique, similaire à l'orthophotographie, peut être obtenue à l'aide de SPOT à des échelles du 1/100 000 et du 1/50 000 par la rectification d'images.

Mais pour pouvoir rectifier cette image, on doit connaître en tout point l'altitude avec une précision cohérente ; ce qui revient à dire de disposer d'un modèle numérique de terrain qui provient :

- ou de la numérisation des courbes de niveau si la cartographie existe,
- ou de la restitution des images SPOT grâce aux points de spatio-triangulation provenant du traitement stéréoscopique.

La précision avec laquelle l'altitude doit être connue, dépend beaucoup du débatement du miroir, puisque le terme principal de la détermination de l'altitude est θ , — θ étant un terme de valeur proche de $\tan \beta_0$.

Chaque point de terrain a par conséquent son altitude connue par interpolation du M.N.T., et donc ses coordonnées image p, q. Ainsi trouve-t-on pour chacun des points espacés régulièrement — de cent mètres par exemple — la valeur radiométrique dans l'image brute

- soit par interpolation,
- soit par son plus proche voisin.

Ce qui donne l'image rectifiée superposable à une carte ou entre elles pour des traitements diachroniques. Traitements qui sont d'une très grande utilité dans les applications thématiques.

Tous les résultats, et les conclusions qui en découlent, proviennent comme nous l'avons indiqué de simulations géométriques d'images SPOT sans aucune intervention manuelle ou de système de mesure.

Mais il faut signaler, que des simulations géométriques SPOT sur l'Equateur, d'un contrat Clirsén/CNES furent étudiées sur l'appareil analytique Traster de l'IGN.

Les clichés ont été restitués au Vizir à l'échelle du 1/200 000. Les angles de débattement de visées est et ouest sont de $\pm 24^\circ 14'$. Il a été pointé 14 points d'appui — valeur moyenne 5 m — et 80 points homologues.

En x,y, le résidu moyen sur les points d'appui est de l'ordre de 0,7 pixel ; l'erreur moyenne de la détermination des altitudes des points homologues est de 5,6 mètres pour une dénivelée maximum de 2 000 m.

Ces résultats sont très prometteurs et en plein accord avec les résultats précédents, étant donné que les restitutions Vizir sur film, utilisées pouvaient avoir des résidus non linéaires de distorsion allant jusqu'à 25 microns-mètres.

Finalement :

- une ORBITE RIGIDE par rapport à un vol d'avion,
- une VARIATION D'ATTITUDE plus FAIBLE que pour un satellite muni d'un miroir à balayage mobile.
- un ENREGISTREMENT des VARIATIONS D'ATTITUDE
- un PIXEL de 10 mètres

sont les caractéristiques principales qui donnent à SPOT une précision géométrique et une précision d'information, pour l'obtention d'un produit cartographique de haute qualité.

La puissance de cet outil aux nouvelles technologies, alliée à la stabilité, la souplesse et la simplicité des équations développées, apportera un gain sinon un changement radical :

dans les méthodes utilisées, et
dans la mentalité des hommes
pour l'obtention de produits cartographiques aux moyennes échelles.

BIBLIOGRAPHIE

REFERENCE 1

- CNES "Le mouvement du véhicule spatial en orbite", 1980
- B. Serreault "Satellite à défilement - Maintien de l'orbite SPOT"

REFERENCE 2

- H. Guichard "Etude théorique de la précision dans l'exploitation cartographique d'un satellite à défilement : application à SPOT"
Bulletin SFPT n° 90, 1983
- "Etude mathématique des possibilités cartographiques de SPOT"
SPOT-IMAGE, juillet 1984

"Rectification géométrique et restitution photogrammétrique des images SPOT"
SPOT-IMAGE, novembre 1984

REFERENCE 3

- Th. Toutin "Analyse mathématique des possibilités cartographiques du satellite SPOT"
Mémoire de DEA à l'ENSG, 1983
- Th. Toutin "Analyse mathématique des possibilités cartographiques du système SPOT".
Thèse de Docteur-Ingénieur à l'ENSG, 1985.