

# Topométrie spatiale à courte distance

## UN EXEMPLE D'APPLICATION : LA MISE EN PLACE DE CUVES DANS LES NAVIRES MÉTHANIER

*par Robert VINCENT  
Ingénieur École Centrale Paris*

Le transport du gaz à travers les mers et les océans, s'il peut se faire, dans certains cas favorables, par gazoducs comme sur les continents, s'est surtout développé depuis une quinzaine d'années sous la forme de navires spécialisés de différents types.

Nous exposons ici l'intervention de la métrologie fine dans la construction d'un type de navire méthanier à transport de gaz naturel liquide mis en service en France par l'armateur GAZOCEAN sur les brevets et l'ingénierie du bureau d'études TECHNIGAZ.

Le gaz naturel est liquéfié pour son transport, à la pression ordinaire, par refroidissement à  $-170^{\circ}$ .

Les navires se présentent comme les pétroliers, la coque étant divisée en 5 ou 6 cuves, mais la ressemblance s'arrête là car bien évidemment, seul un revêtement isolant et une cuve d'étanchéité très sophistiquée permettent de recevoir un liquide à une aussi basse température.

Chaque cuve a la forme d'un prisme droit dont les deux bases (Cofferdam), situées dans des plans perpendiculaires au plan axial du navire, sont des octogones. Les cuves possèdent donc 8 faces rectangulaires (plancher, plafond, 2 côtés, 4 pans coupés).

Les cuves mesurent 30 mètres de long, 30 mètres de large et 30 mètres de haut dans les grands navires de  $125\,000\text{ m}^3$ .

La cuve en contact avec le gaz liquéfié doit pouvoir absorber les effets de dilatation au moment du remplissage ou lors de la vidange. Le métal utilisé est l'acier inoxydable. Les plaques de tôle ont reçu un emboutissage en forme de soufflets dans deux directions perpendiculaires formant quadrillage de  $30 \times 30$  centimètres (exceptionnellement  $30 \times 21$  centimètres pour les pans coupés). Ces soufflets donnent à la tôle une élasticité qui permet de compenser les effets de la dilatation. Les tôles sont de dimensions standard :  $2,70\text{ m} \times 0,90\text{ m}$ .

La géométrie de la cuve (dimension et perpendicularité des faces) est telle que les lignes de soufflets sont toujours continues en passant d'une face à une face voisine et se referment sur elles-mêmes après avoir fait le tour de la cuve. Les lignes sont en quelque sorte aux intersections avec les dix faces de la cuve, d'un triple réseau de plans parallèles aux trois faces d'un trièdre trirectangle de référence, et équidistants entre eux de 30 centimètres.

Le montage des éléments préfabriqués et leur assemblage exigent donc un positionnement précis, de l'ordre du millimètre.

Or, la construction navale, dans son gros-œuvre, avec ses assemblages de tôle de 5 centimètres d'épaisseur, ne saurait satisfaire à cette précision.

En fait, un isolant thermique est nécessaire entre la cuve ouvragée et la cale du navire. En jouant sur l'épaisseur de cette isolation on rectifie les défauts de forme de la cale et on retrouve la forme géométrique idéale de la cuve pour sa pose en éléments préfabriqués.

Le problème topométrique est donc de relever la forme exacte des cales du navire à la précision du demi-millimètre. Ensuite, par calcul, il faudra y inscrire la forme idéale de la cuve en laissant un espace d'isolation aussi constant que possible autour de ses 10 faces (balancement de la cuve).

Le relevé topométrique se fera par points isolés, matérialisés sur les faces des cales par traçage. Ils sont au nombre de 600 environ par cale et sont déterminés en coordonnées trirectangle dans un référentiel propre à chaque cale par micro-triangulation au théodolite à partir de 4 stations situées sur le plancher de la cale. Une mesure d'une seule longueur, au ruban d'invar étalonné, permet la mise à l'échelle de la figure.

Chaque point tracé sur les faces de la cale est "intersecté" par 3 visées, émanant de 3 des 4 stations, définies par leur azimut et leur angle zénithal. Les mesures sont faites dans les deux positions de la lunette du théodolite.

L'intersection spatiale est calculée par une méthode qui a la particularité de prendre en compte, en un seul calcul, à la fois les mesures azimutales et les mesures zénithales et de donner ainsi simultanément les 3 coordonnées du point.

La mise en œuvre de la méthode est relativement commode. Elle n'exige aucun échafaudage pour accéder aux points mesurés. La précision est remarquable (demi-millimètre) et la méthode est fiable puisque les rares erreurs de lecture lors des mesures sont toutes détectées lors du calcul, et une reprise de la mesure erronée est rapide.

La méthode est typique des relevés nécessaires aux implantations d'éléments préfabriqués à fixer sur une



ossature-support pouvant présenter des imperfections géométriques.

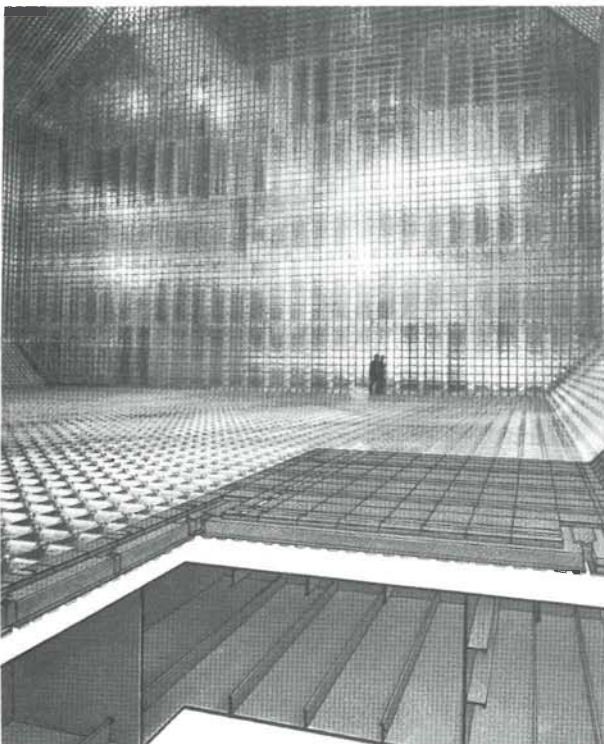
La méthode a été perfectionnée pour résoudre le cas de mesures à bord de navires en construction mais dont la coque a déjà été lancée à la mer.

La micro-triangulation est alors réalisée, toujours par 4 stations au théodolite, mais sans référence à la verticale. Toutes les mesures en une station forment un faisceau de demi-droites qui sont toutes définies dans un référentiel unique particulier à la station. Il y a donc 4 référentiels — un par station — qui sont ensuite ramenés à un référentiel unique par calcul.

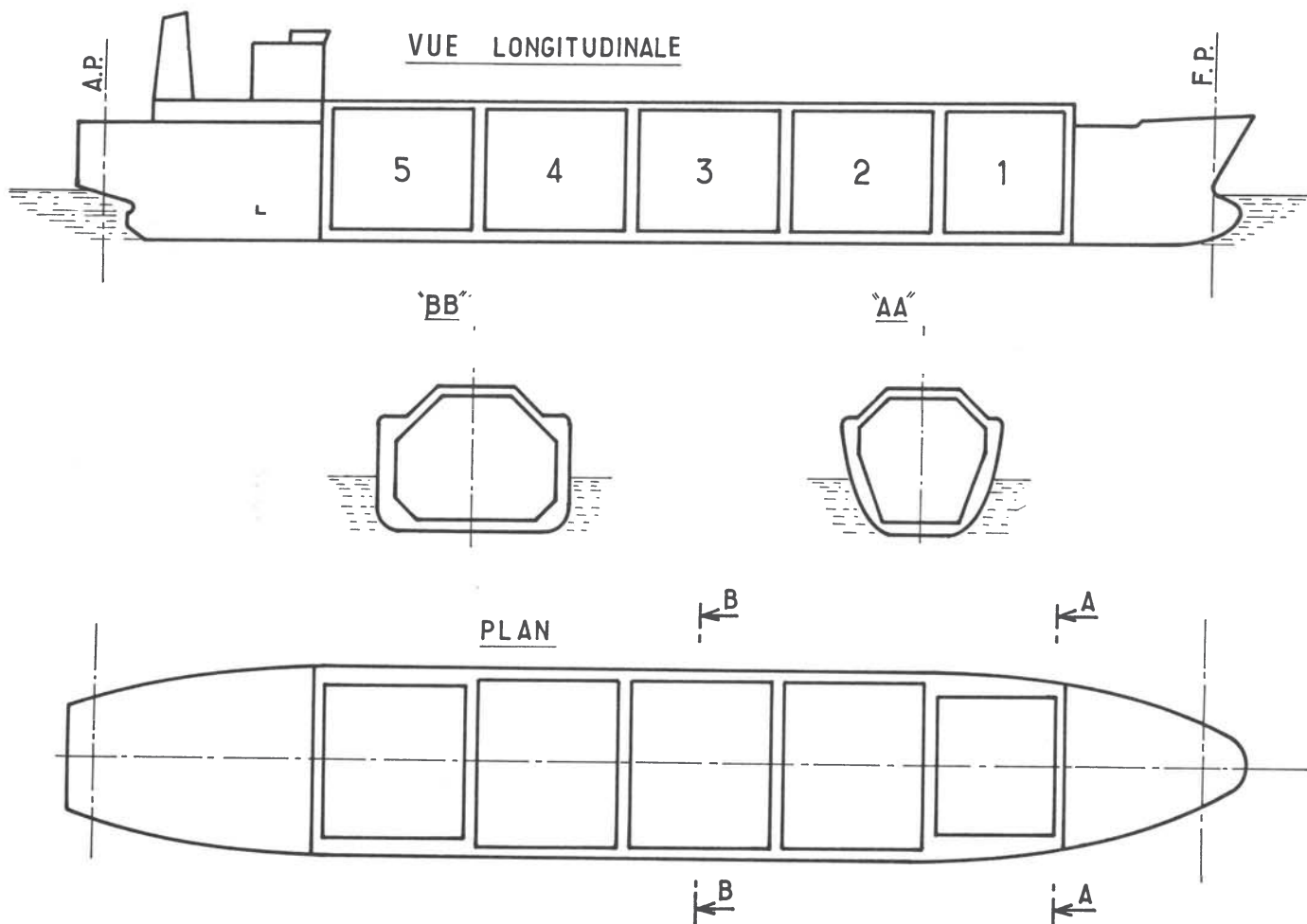
Les mesures ne sont pas très différentes du cas général. Seuls les calculs sont nettement plus compliqués.

Ce sont ces travaux qui ont nécessité la mise au point des procédés de calcul décrits ci-après :

La méthode du calcul de l'intersection spatiale a été proposée par M. de CASTEL, Ingénieur aux CHANTIERS NAVALS DE L'ATLANTIQUE à Saint-Nazaire. Les procédés de relèvement et des réseaux à stations à référentiels particuliers, pour les méthaniers à flot, ont été développés par l'auteur pour les CHANTIERS NAVALS DE LA CIOTAT, dans le cadre d'un contrat avec la SOCIÉTÉ FRANÇAISE DE STÉRÉOTOPOGRAPHIE.







#### APPAREIL PROPULSIF

Un groupe turbo-réducteur STAL-LAVATLANTIQUE, type AP.  
 — Puissance maximale continue ..... 32.400 CV  
 — Nombre de tours de l'hélice ..... 109 tr/min  
 — Vitesse aux essais en pleine charge ..... 19,8 nœuds  
 La conduite de l'appareil propulsif est entièrement automatique et ne nécessite pas de personnel de quart dans la machine.  
 L'embarcadere s'effectue de la passerelle.  
 Une cabine insonorisée dans le compartiment machine réunit les appareils de conduite de l'installation de propulsion.

#### CHAUDIÈRES

2 chaudières FOSTER WHEELER, type ESD III.  
 — Vaporisation ..... 60.000 kg/h  
 — Pression ..... 62,7 bars abs.  
 — Température ..... 515°C  
 — Brûleurs dual-fuel (fuel-oil et gaz naturel).

#### EMMÉNAGEMENTS

Tous les emménagements groupés dans le château arrière sont climatisés et leur insonorisation a été particulièrement soignée. Tout l'équipage est logé en cabines individuelles. L'effectif normal du navire est de 30 personnes environ. Les distractions de l'équipage comportent en particulier : piscine, salle de sport, cinéma, télévision.

#### ACCÈSSES DE COQUE

— 1 propulseur d'étrave LIPS de 1.500 ch.  
 — 2 combinés vapeur guides/trou d'amarrage à tension contrôlée (un barbotin + un tambour) 20 t à 20 m/min.  
 — 6 treuils d'amarrage à vapeur, à tension contrôlée (un tambour) 20 t à 20 m/min.  
 — 2 treuils à vapeur pour manutention de flexibles, 5 t à 45 m/min.  
 — Appareil à gouverner, type C.N.C. « BROWN Brothers », hydro-électrique : 4 presses, 2 groupes moto-pompes.  
 — 2 bostoirs arrière pour vivres et machine (1,5 t).  
 — 2 embarcations de sauvetage équipées d'un moteur diesel.  
 — 1 ascenseur entre salle des machines et emménagements.  
 — 2 pompes de ballastage entraînées par turbines à vapeur (chacune de 2.000 m³/h).

#### TRANSPORT DE G.N.L.

### "BEN FRANKLIN"

#### ELECTRICITÉ

— 2 alternateurs entraînés par turbine à vapeur (chacun : 1.700 kW - 1.800 tr/min).  
 — 1 alternateur entraîné par moteur diesel (1.700 kW - 1.200 tr/min).  
 — 1 groupe diesel de secours (220 kW - 1.800 tr/min).  
 — Distribution : 450 V - 60 Hz.

#### APPAREILS DE NAVIGATION

— 1 gyro-compas et pilote automatique ARMA-BROWN/ACIP.  
 — 2 radars RAYTHEON 3 cm et 10 cm avec commutation.  
 — 1 radar anti-collision DIGIPILOT.  
 — 1 système de radio localisation LORAN.  
 — 1 radiogoniomètre visuel PLATH.  
 — 2 sondeurs ultra-sons.  
 — Installation T.S.F. GDANSK 1.200 W, type 3/250.

#### CARACTÉRISTIQUES PRINCIPALES

Classification : BUREAU VERITAS

✱ 1-2/3 - E - Haute mer AUT.

Transport de gaz liquéfié. (Pression atm. — 160°C)

Navire conforme à la réglementation SOLAS 1960.

Longueur hors tout ..... 272,75 m  
 Longueur entre perpendiculaires ..... 256,13 m  
 Largeur hors membres ..... 41,00 m  
 Creux sur quille au pont supérieur ..... 25,80 m  
 Tirant d'eau d'exploitation (arrivée) ..... 10,51 m  
 Port en lourd au tirant d'eau de 10,51 m ..... 57.000 t  
 (Chargé à 98 % -  $\rho$  : 0,475)

Jauge brute ..... env. 75.000 T<sub>x</sub>

Capacités : Cuve N° 1 ..... 10.776 m³

N° 2 ..... 20.507 m³

N° 3 ..... 23.093 m³

N° 4 ..... 23.093 m³

N° 5 ..... 23.093 m³

N° 6 ..... 19.569 m³

Total ..... 120.131 m³

#### INSTALLATION DE CARGAISON

##### CUVES DE CARGAISON

— Système de cuve à membrane TECHNIGAZ-GAZOCEAN (barrière primaire : membrane en acier inoxydable, isolation bulle - barrière secondaire : contre-plaqué).  
 — 6 cuves intégrées.

##### AUXILIAIRES DE CARGAISON

— Pompes de cargaison électriques CARTER - type immergé :

— CUVE N° 1 :  
 2 pompes (1 fixe, 1 amovible) chacune de 350 m³/h - h.m.t. : 120 m.

— AUTRES CUVES :  
 2 pompes fixes, chacune de 800 m³/h - h.m.t. : 120 m.

1 conduit vertical capable de recevoir une pompe amovible de 350 m³/h.

##### DANS TOUTES LES CUVES :

1 pompe de circulation pour maintien et mise en froid.

20 m³/h - h.m.t. : 100 m.

— Compresseurs entraînés par turbine à vapeur :

2 compresseurs pour refoulement vers la salle des machines des gaz évaporés, chacun de 6.800 kg/h G.N.L.

1 compresseur pour le retour à terre des gaz, 22.500 kg/h G.N.L.

— 2 réchauffeurs de gaz pour réchauffage du gaz vers machine et divers, chacun de 375.000 cal/h.

— 1 gaséificateur 9.000 kg/h - G.N.L.

— 1 réservoir d'azote liquide 75 m³.

— 1 station de production de gaz inerte de 4.000 m³/h par combustion de propane.

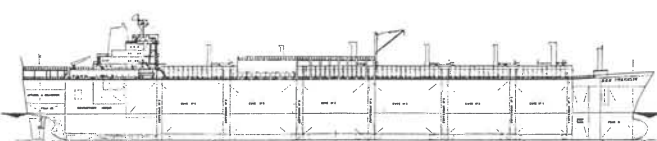
L'automatisation des installations de cargaison permet :

— au pont, de régler depuis le local de contrôle situé dans la superstructure arrière toutes les opérations de manutention cargaison. Ainsi, le contrôle de toutes les installations de gaz, la commande des vannes de cargaison et de ballastage.

le jaugeage à distance des cuves et ballasts, l'enregistrement des pressions et des températures des cuves, etc.

sont réunis au poste central de cargaison ;

— à la mer : de surveiller l'ensemble des installations depuis le timonerie.



# Topométrie spatiale à courte distance

## RÉSUMÉ

La détermination de la position des points en topographie est obtenue classiquement d'abord par le calcul de la position planimétrique définie par des coordonnées  $x$  et  $y$  puis par le calcul de l'altitude.

On peut penser que le privilège dont sont dotées les observations planimétriques, ne permet pas toujours d'obtenir le résultat le plus satisfaisant pour la détermination spatiale d'un point dont le calcul, s'il était conduit d'emblée avec l'ensemble des observations azimutales et zénithales, donnerait dans certains cas un résultat plus satisfaisant.

La méthode exposée n'est vraiment intéressante et utile que pour les canevas de faible dimension (moins de 100 mètres) et de relief important. Dans ce cas, il n'y a pas disproportion trop grande entre les précisions des observations angulaires azimutales et zénithales.

Dans les différents cas exposés les calculs seront effectués et compensés par la méthode des moindres carrés.

### 1 — Cas d'un point simplement intersecté par 2 ou plusieurs visées orientées émanant d'autant de stations :

L'originalité de la méthode proposée tient à ce que dans la résolution par la méthode des moindres carrés, le minimum recherché n'est pas celui du carré des résidus sur les angles observés mais sur les distances entre le point adopté et les droites spatiales matérialisant les visées observées. La méthode n'est certes pas classique mais elle prend sa justification dans le fait que les erreurs angulaires à craindre, surtout sur les observations azimutales, ne sont pas constantes mais croissent assez vite pour des visées courtes et il semble que le critère des distances choisi soit au moins aussi judicieux dans ce cas. De plus, ce procédé à l'avantage de traiter symétriquement les 3 coordonnées et surtout les équations d'observation sont naturellement linéaires sans approximation, ce qui offre l'avantage de ne pas exiger de point approché ni de nécessiter de réitération dans les calculs.

## Short range spatial topometry

### SUMMARY

In normal topography, the coordinates  $x$  and  $y$  in the plane are first computed and then the altitude  $z$ . This emphasises the importance of the planimetric observations and does not provide the best results for the spatial location of points. It may be possible to obtain more satisfactory results by computing simultaneously the azimuthal and vertical observations.

The method described here is interesting and fruitful only in the case of a small network (distance shorter than 100 m) with a sizeable relief. In this very special case the discrepancies between the azimuthal and vertical measurements are small. In the examples given in this paper, all the adjustments are done by the least square method.

### 2 — Cas d'une station de relèvement spatial :

Un théodolite en station n'est jamais parfaitement bullé. Le défaut de verticalité de l'axe se répercute en vraie grandeur sur la détermination des points visés.

La méthode consiste à déterminer non seulement les 3 coordonnées de la station mais également les 3 angles d'orientation définissant l'axe de l'alidade et l'origine des angles azimutaux par rapport à un référentiel. Ce problème présente une certaine analogie avec celui de la position d'un faisceau perspectif en photogrammétrie, l'ensemble des visées issues de la station formant un faisceau de demi-droites.

La résolution par la méthode des moindres carrés rendant, là aussi, minimum la somme des carrés des distances de passage des visées aux points connus est la suite logique de la méthode du point intersecté. Toutefois, les équations d'observation ne se présentent plus linéairement quant aux coefficients des inconnues angulaires. Il faudra donc avoir connaissance de valeurs approchées pour ces angles, et la résolution exigera une boucle itérative.

### 3 — Cas général d'un réseau de station à visées réciproques :

Pour chacune des stations, sont déterminées les 3 coordonnées et les 3 angles d'orientation dans un référentiel unique et, pour chaque point intersecté (non stationné), les 3 coordonnées sont déterminées. La résolution par les moindres carrés est fournie par des équations tout à fait analogues au cas précédent. Il est nécessaire de partir, au moins pour les inconnues angulaires, de valeurs approchées.

Les applications du 1<sup>er</sup> cas peuvent être relativement fréquentes en topométrie à courte distance et en auscultation.

Par contre, il faut bien reconnaître que les applications de 2<sup>e</sup> cas et du 3<sup>e</sup> cas sont plus rares. Néanmoins, une application intéressante a été faite en 1970 sur les navires méthaniers en construction aux CHANTIERS NAVALS DE LA CIOTAT lors des mesures dimensionnelles des cales alors que les navires étaient déjà à flot.

### 1 — Intersected points

The points are intersected from two or more directions. The originality of the proposed method comes from the fact that in the least square adjustment, the minimum wanted is not the square of the residuals of the observed angles but the square of the residuals of the distances between the point and the spatial lines materializing the observed directions. The method can be justified due to the fact that the angular errors to avoid are not constant but rapidly increasing for short sightings. The criterion, taking into account offset between the line and the point, seems judicious. In this process, the three coordinates are treated equally and the observation equations are linear without any approximation. No approximate points or reiteration are thus necessary in the adjustment.

## 2 — Spatial resection station

A theodolite is never perfectly levelled. The levelling error is directly reflected in the position of the targets. It is necessary in this method not only to determine the three coordinates of the station but also, in a defined referential, the three orientations of the axle of the alidade and the line joining the centre of the alidade and the origin of the azimuthal angles. This problem shows a certain analogy with the positioning of the perspective bundle in photogrammetry.

The adjustment by the least square method also minimizes the sum of the square of the offset between the line of sight and the known point. Angular unknown coefficients are no more linear in the observation equations, approximate values of these angles must be known and the adjustment requires an iterative process.

## 3 — General case of a network with reciprocal measurements

In a well defined referential, the three coordinates and the three orientation angles of each station are determined and only the three coordinates for each intersected point. The equations in the adjustment are the same as above. It is necessary to start from approximate values, at least for angular unknowns.

The application of 1) can be relatively frequent in short range topometry and in structural stability measurements. On the other hand, 2) and 3) are very unfrequently applied.

# Räumliche topometrie für kurze entfernungen (Dreidimensionale Geodäsie)

## ZUSAMMENFASSUNG

Bei der Punktbestimmung in der Vermessungstechnik geht man klassisch folgendermaßen vor: zunächst erfolgt die Berechnung der Planimetrie, definiert durch die Koordinaten  $x$  und  $y$  und anschließend die Berechnung der Höhe ( $z$ ). Durch diese Bevorzugung der Planimetrie werden nicht immer die befriedigendsten Ergebnisse einer räumlichen Punktbestimmung erreicht. Würde man sofort sämtliche Beobachtungen, d.h. sämtliche Richtungen und Zenitdistanzen, zur Berechnung heranziehen, gäbe es in gewissen Fällen bessere Resultate. Die beschriebene Methode ist nur interessant und nützlich für Netze mit geringer Ausdehnung (weniger als 100 m) und beträchtlichen Höhenunterschieden. Denn in diesem Fall gibt es keine allzu große Diskrepanz zwischen der Genauigkeit der Richtungsbeobachtungen einerseits und der beobachteten Zenitdistanzen andererseits.

### 1 — Der einfache Vorwärtsschnitt

(durch zwei oder mehr Vorwärtsstrahlen)

Die Eigenheit des Verfahrens besteht in der Lösung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Zielfunktion ist nicht die Quadratsumme der Verbesserungen der Winkelbeobachtungen, sondern der Abstände zwischen dem gesuchten Punkt und den räumlichen Geraden, welche die beobachteten Richtungen und ihre zugehörigen Zenitdistanzen bilden.

Sicher, dieses Vorgehen ist nicht klassisch, aber es erhält seine Berechtigung durch die Tatsache, daß die Präzision der Richtungsbeobachtungen bei kurzer Entfernung stark abnimmt. Das Verfahren bietet den Vorteil, die drei Koordinaten gleichwertig zu behandeln; die Verbesserungsgleichungen sind linear, was Näherungskordinaten und eine Nachiteration überflüssig machen.

### 2 — Der räumliche Rückwärtsschnitt

Ein aufgestellter Theodolit ist nie vollständig horizontalisiert: der Stehachsenfehler wirkt sich in seiner wahren Größe aus bei der Punktbestimmung. Die Methode besteht nun darin, nicht nur die drei Punktkoordinaten  $x, y, z$ , sondern auch drei Orientierungswinkel zu bestimmen. Zwei Winkel geben die Richtung der Alidade, also den Stehachsenfehler an, der dritte die Orientierungsunbekannte.

Dieses Problem zeigt eine gewisse Analogie zu photogrammetrischen Grundaufgaben. Als logische Folge aus Methode 1 wird wiederum die Quadratsumme der Abstände von den bekannten Punkten zu den räumlichen Geraden (berechnet aus den beobachteten Richtungen und Zenitdistanzen) minimiert. Indessen sind die Verbesserungsgleichungen dieser drei Orientierungswinkel nicht linear: dies setzt Näherungswerte voraus und eine Nachiteration wird erforderlich.

### 3 — Allgemeiner Fall eines Netzes mit Vorwärts- und Rückwärtsstrahlen

Für jeden durch innere Richtungen bestimmten Punkt werden die Koordinaten  $x, y, z$ , sowie die drei Orientierungswinkel in einem einheitlichen Referenzfeld bestimmt. Für jeden nur durch äußere Richtungen bestimmten Punkt werden die drei Koordinaten ermittelt.

Die rechnerische Lösung erfolgt analog zu den anderen Fällen nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Die Anwendung der Methode 1 ist — im Gegensatz zu 2 und 3 — häufig angebracht.



# 1 — L'INTERSECTION SPATIALE

Un point M est déterminé, dans l'espace à 3 dimensions par 2 ou plusieurs visées orientées, émanant d'autant de stations.

D'une station  $S_i$ , de coordonnées  $x_i, y_i, z_i$ , on vise au théodolite le point M, de coordonnées inconnues  $x, y, z$ , suivant les angles observés (voir figure 1) :

- gisement (angle azimutal orienté)  $G_i$
- angle zénithal  $Z_i$

## 1 - 1 - Directions observées

La direction de chaque visée observée est définie par ses cosinus directeurs  $a_i, b_i, c_i$  :

$$\begin{aligned} a_i &= \sin G_i \cdot \sin Z_i \\ (1) \quad b_i &= \cos G_i \cdot \sin Z_i \\ c_i &= \cos Z_i \end{aligned}$$

## 1 - 2 - Condition de choix de la solution cherchée

Compte tenu des erreurs accidentelles d'observations, la demi-droite issue de  $S_i$ , de cosinus directeurs  $a_i, b_i, c_i$  ne passe pas exactement par le point visé M, mais à une distance  $D_i$ .

Le point M, intersecté à partir de plusieurs stations telles que  $S_i$ , sera choisi de telle sorte que la somme des carrés des distances  $D_i$  du point M aux visées observées soit minimum. C'est l'originalité de la méthode proposée. Elle tient à ce que dans la résolution par la méthode des moindres carrés, le minimum recherché n'est pas celui du carré des résidus sur les angles observés, mais sur les distances entre le point adopté et les droites matérialisant les visées observées.

La méthode n'est certes pas classique mais elle prend sa justification dans le fait que les erreurs angulaires à craindre, surtout sur les observations azimutales ne sont pas constantes mais croissent assez vite pour des visées courtes et il semble que le critère des distances choisi soit au moins aussi judicieux dans ce cas.

On fera usage, dans tout ce qui suit, de la notation entre crochets [ ] pour désigner une somme de quantités semblables.

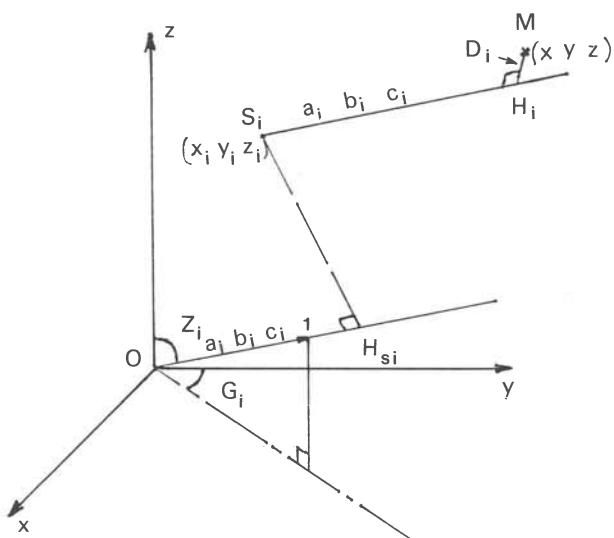


fig. 1

La condition de choix de la solution cherchée s'écrit ainsi :

[  $D_i^2$  ] minimum

## 1 - 3 - Expression de la distance $D_i$ du point M à la visée issue de $S_i$

Soit  $H_i$  le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur la demi-droite issue de  $S_i$  qui a pour cosinus directeur  $a_i, b_i, c_i$ .

On a :  $D_i = M H_i$

$$D_i^2 = \overline{M H_i}^2 = \overline{S_i M}^2 - \overline{S_i H_i}^2$$

$$\text{Or } \overline{S_i M}^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2$$

$$\text{et } \overline{S_i H_i} = a_i (x - x_i) + b_i (y - y_i) + c_i (z - z_i) \quad (\text{expression du produit scalaire})$$

$$\text{En posant : } h_i = a_i x_i + b_i y_i + c_i z_i$$

$$\text{on a } \overline{S_i H_i} = a_i x + b_i y + c_i z - h_i$$

et :

$$(2) \quad D_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 - (a_i x + b_i y + c_i z - h_i)^2$$

## 1 - 4 - Variation de la distance $D_i$ pour une variation de position du point M

La variation de la distance  $D_i$ , ou, plus facilement, du carré de la distance  $D_i^2$ , en fonction de la variation de la position du point M, s'exprime par les 3 différentielles partielles de  $D_i^2$  relativement aux coordonnées  $x, y, z$  de M.

En attribuant le coefficient  $-\frac{1}{2}$ , on a

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial D_i^2}{\partial x} = (a_i^2 - 1) x + a_i b_i y + a_i c_i z - (a_i h_i - x_i)$$

$$(3) \quad -\frac{1}{2} \frac{\partial D_i^2}{\partial y} = a_i b_i x + (b_i^2 - 1) y + b_i c_i z - (b_i h_i - y_i)$$

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial D_i^2}{\partial z} = a_i c_i x + b_i c_i y + (c_i^2 - 1) z - (c_i h_i - z_i)$$

La méthode traite symétriquement les 3 coordonnées. On voit que les expressions se présentent naturellement sous la forme linéaire. Ceci offre l'avantage, dans la résolution qui va suivre, de ne pas exiger la connaissance d'une solution approchée (point approché) ni de nécessiter de réitération dans les calculs.

## 1 - 5 - Résolution par la méthode des moindres carrés

La somme des carrés des distances [  $D_i^2$  ] du point M aux différentes visées d'intersection sera minimum pour la position  $x, y, z$  de M rendant nulles les 3 sommes des différentielles partielles.

$$\left[ -\frac{1}{2} \frac{\partial D_i^2}{\partial x} \right] = 0 \quad \left[ -\frac{1}{2} \frac{\partial D_i^2}{\partial y} \right] = 0 \quad \left[ -\frac{1}{2} \frac{\partial D_i^2}{\partial z} \right] = 0$$

Les valeurs de  $x, y, z$ , cherchées répondent à la solution du système des 3 équations normales à 3 inconnues :

$$\begin{aligned} [a_i^2 - 1] x + [a_i b_i] y + [a_i c_i] z - [a_i h_i - x_i] &= 0 \\ (4) \quad [a_i b_i] x + [b_i^2 - 1] y + [b_i c_i] z - [b_i h_i - y_i] &= 0 \\ [a_i c_i] x + [b_i c_i] y + [c_i^2 - 1] z - [c_i h_i - z_i] &= 0 \end{aligned}$$

## 1 - 6 - Résidus d'observation

La distance du point M à une visée d'observation est obtenue en reportant les résultats des coordonnées  $x, y, z$ , dans l'expression (5).

$$(5) D_i^2 = [b_i(x - x_i) - a_i(y - y_i)]^2 + [c_i(y - y_i) - b_i(z - z_i)]^2 + [a_i(z - z_i) - c_i(x - x_i)]^2$$

Cette expression, issue du produit vectoriel, est équivalente à l'expression (2) dont l'usage ici est à prohiber, les arrondis de calcul enlevant toute valeur significative au résultat.

L'erreur moyenne quadratique sur la position calculée du point intersecté peut être estimée par la formule

$$e_{mq} = \sqrt{\frac{[D_i^2]}{n - \frac{3}{2}}}$$

$n$  étant le nombre de visées d'intersection

## 1 - 7 - Remarques

Le calcul se prête bien à l'usage des calculatrices électroniques programmables de poche.

Avec 2 visées d'intersections, le point est déterminé avec une donnée surabondante (4 données angulaires pour calculer 3 inconnues).

Il n'y a pas indétermination si les stations et le point visé sont dans un même plan vertical. L'intersection est alors réalisée dans ce plan vertical.

Il n'y a indétermination que lorsque toutes les visées sont colinéaires.

Bien qu'il ne soit pas nécessaire de connaître un point approché, il y a néanmoins intérêt à éliminer les chiffres superflus en tête des coordonnées si l'on veut garder une valeur aux dernières décimales, le nombre de chiffres significatifs étant limité par la capacité de la calculatrice.

## 2 — LE RELÈVEMENT SPATIAL

En une station de relèvement R, de coordonnées inconnues  $x, y, z$ , on opère avec un théodolite non bullé, ou, plus généralement avec un théodolite dont l'axe de l'alidade présente une orientation quelconque et inconnue dans un référentiel général.

En la station R, le théodolite forme un référentiel particulier, défini par le trièdre trirectangle dont les 3 arêtes sont :

- l'axe de l'alidade du théodolite
- la perpendiculaire à cet axe dans le plan contenant à la fois l'axe de l'alidade et une direction origine arbitraire (référence).
- la perpendiculaire commune à ces deux premières arêtes.

De la station R, on vise des points connus tels que  $P_i$  dont les coordonnées sont  $x_i, y_i, z_i$  dans le référentiel général.

Le problème que nous nous proposons de résoudre est de déterminer :

- les coordonnées de la station R dans le référentiel général (3 inconnues)
- la rotation qui rendrait le référentiel particulier de la station R parallèle au référentiel général (3 autres inconnues).

### 2 - 1 - Observations dans le référentiel particulier à la station R

Pour chaque direction  $RP_i$ , les angles sont observés au théodolite dans le référentiel particulier à la station R. Ce sont (voir figure 2) :

- l'angle diedre  $G_{oi}$  ayant comme arête l'axe de l'alidade, lu sur le cercle perpendiculaire à l'axe de l'alidade
- l'angle  $Z_{oi}$  que fait la direction observée avec l'axe de l'alidade, lu sur le cercle perpendiculaire à l'axe de rotation de la lunette (axe des tourillons)

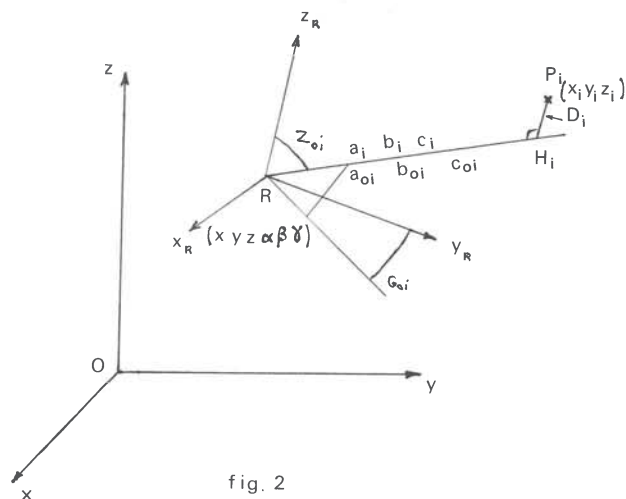


fig. 2

La direction de la visée de R sur  $P_i$ , dans le référentiel particulier de R, est définie par les cosinus directeurs du vecteur unitaire :

$$(11) \begin{aligned} a_{oi} &= \sin G_{oi} \sin Z_{oi} \\ b_{oi} &= \cos G_{oi} \sin Z_{oi} \\ c_{oi} &= \cos Z_{oi} \end{aligned}$$

### 2 - 2 - Rotation du référentiel particulier de la station R

La rotation qui permet de passer du référentiel particulier de R au référentiel général peut être définie par un vecteur rotation, ayant pour longueur le sinus de l'angle de rotation  $\omega$  (omega) et dont les 3 composantes sur les 3 axes du référentiel particulier à la station sont  $\alpha$  (alpha)  $\beta$  (bêta)  $\gamma$  (gamma) telles que

$$(12) \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \sin^2 \omega$$

Le vecteur unitaire sur la visée  $RP_i$ , de composantes  $a_{oi}, b_{oi}, c_{oi}$  dans le référentiel particulier, a, dans le référentiel général, des composantes  $a_i, b_i, c_i$  données par les formules d'Olinde Rodrigues.

$$a_i = \left(1 - \frac{\beta^2 + \gamma^2}{1 + \cos \omega}\right) a_{oi} + \left(\gamma + \frac{\alpha \beta}{1 + \cos \omega}\right) b_{oi} + \left(-\beta + \frac{\alpha \gamma}{1 + \cos \omega}\right) c_{oi}$$

$$b_i = \left(-\gamma + \frac{\alpha \beta}{1 + \cos \omega}\right) a_{oi} + \left(1 - \frac{\alpha^2 + \gamma^2}{1 + \cos \omega}\right) b_{oi} + \left(\alpha + \frac{\beta \gamma}{1 + \cos \omega}\right) c_{oi}$$

$$c_i = \left(\beta + \frac{\alpha \gamma}{1 + \cos \omega}\right) a_{oi} + \left(-\alpha + \frac{\beta \gamma}{1 + \cos \omega}\right) b_{oi} + \left(1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{1 + \cos \omega}\right) c_{oi}$$

Les coefficients entre parenthèses forment une matrice d'ordre 3, appelée d'Olinde Rodrigues. Ces coefficients sont exacts, c'est-à-dire qu'aucune approximation n'a été faite.

On peut vérifier que c'est une matrice unitaire : la somme des carrés des 3 coefficients de chaque ligne et de chaque colonne est égale à l'unité. La multiplication d'un vecteur par cette matrice donne un vecteur de même longueur. En particulier le vecteur unitaire  $a_{oi}, b_{oi}, c_{oi}$  est transformé en un autre vecteur unitaire  $a_i, b_i, c_i$ .

$$(14) a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$$

### 2 - 3 - Condition de choix de la solution cherchée

Compte tenu des erreurs accidentelles d'observation, la demi-droite issue de R, de cosinus directeurs  $a_i, b_i, c_i$  dans le référentiel général, ne passe pas exactement par le point  $P_i$ , mais à une distance  $D_i$ .

La position du point R et la rotation de son référentiel particulier seront choisies de telle sorte que la somme des carrés des distances  $D_i$  des visées observées aux points visés correspondants sur lesquels la station R est relevée, soit minimum.

La condition de choix de la solution cherchée s'écrira ainsi avec la même convention que pour l'intersection spatiale :

$$[D_i^2] \text{ minimum}$$

### 2 - 4 - Expression de la distance $D_i$ de la visée issue de R au point visé $P_i$

Soit  $H_i$  le pied de la perpendiculaire abaissée de  $P_i$  sur la demi-droite issue de R qui a pour cosinus directeurs  $a_i, b_i, c_i$  dans le référentiel général.

On a :

$$D_i = P_i H_i$$

$$D_i^2 = \overline{P_i H_i}^2 = \overline{R P_i}^2 - \overline{R H_i}^2$$

$$\text{Or } \overline{R P_i}^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2$$

$$\text{et } R H_i = a_i (x - x_i) + b_i (y - y_i) + c_i (z - z_i)$$

(expression du produit scalaire)

Supposons connues les coordonnées  $x_a, y_a, z_a$  d'un point  $R_a$ , point approché de R et appelons  $\delta x, \delta y, \delta z$  les composantes du vecteur  $R_a R$ .

En posant :

$$u = x - x_i = x_a - x_i + \delta x$$

$$(15) v = y - y_i = y_a - y_i + \delta y$$

$$w = z - z_i = z_a - z_i + \delta z$$

On a :

$$(16) R H_i = h = a_i u + b_i v + c_i w$$

et

$$(17) D_i^2 = u^2 + v^2 + w^2 - h^2$$

### 2 - 5 - Variation de la distance $D_i$ pour une variation de position de la station R et une variation d'orientation de son référentiel particulier

La variation de la distance  $D_i$ , ou, plus facilement, la variation du carré de la distance  $D_i$ , en fonction de la variation de la position de la station de relèvement R et de la variation de l'orientation de son référentiel particulier, s'exprime par les 6 différentielles partielles de  $D_i^2$  relativement aux 6 variables  $\delta x, \delta y, \delta z, \alpha, \beta, \gamma$ .

En attribuant le coefficient  $-\frac{1}{2}$ , les différentielles s'expriment ainsi :

$$(18) \quad \begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{\partial D_i^2}{\partial \delta x} &= h \frac{\partial h}{\partial \delta x} - u = h - \frac{\partial h}{\partial \delta x} - (x_a - x_i) - \delta x \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial D_i^2}{\partial \delta y} &= h \frac{\partial h}{\partial \delta y} - v = h - \frac{\partial h}{\partial \delta y} - (y_a - y_i) - \delta y \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial D_i^2}{\partial \delta z} &= h \frac{\partial h}{\partial \delta z} - w = h - \frac{\partial h}{\partial \delta z} - (z_a - z_i) - \delta z \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial D_i^2}{\partial \alpha} &= h \frac{\partial h}{\partial \alpha} \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial D_i^2}{\partial \beta} &= h \frac{\partial h}{\partial \beta} \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial D_i^2}{\partial \gamma} &= h \frac{\partial h}{\partial \gamma} \end{aligned}$$



Les expressions ne se présentent pas, comme dans le cas de l'intersection spatiale, linéairement en fonction de toutes les variables, mais seulement envers  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ .

En vue de la résolution par les moindres carrés on cherchera à exprimer ces différentielles sous forme de fonctions du 1<sup>er</sup> degré des 6 variables  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Pour cela on exprimera les différentielles de  $h$  en fonction linéaire des 6 variables, ce qui nécessite d'exprimer d'abord  $h$  en une fonction du second degré des 6 variables.

On est ainsi amené à assimiler, dans les formules d'Olinde Rodrigues, cosinus  $\omega$  à l'unité c'est-à-dire à présumer l'angle  $\omega$  petit.

Comme il n'en est généralement pas ainsi, la solution obtenue par les moindres carrés, donnera des valeurs pour les 6 inconnues qui ne seront qu'approchées et nécessitera un calcul itératif.

Les formules (13) ainsi simplifiées deviennent :

$$\begin{aligned} a_i &= \left(1 - \frac{\beta^2 + \gamma^2}{2}\right) a_{oi} + \left(\gamma + \frac{\alpha\beta}{2}\right) b_{oi} + \left(-\beta + \frac{\alpha\gamma}{2}\right) c_{oi} \\ (19) \quad b_i &= \left(-\gamma + \frac{\alpha\beta}{2}\right) a_{oi} + \left(1 - \frac{\alpha^2 + \gamma^2}{2}\right) b_{oi} + \left(\alpha + \frac{\beta\gamma}{2}\right) c_{oi} \\ c_i &= \left(\beta + \frac{\alpha\gamma}{2}\right) a_{oi} + \left(-\alpha + \frac{\beta\gamma}{2}\right) b_{oi} + \left(1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}\right) c_{oi} \end{aligned}$$

On exprimera  $h$  en reportant ces expressions de  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  dans la formule (16).

En ordonnant suivant les inconnues  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , on a :

$$\begin{aligned} (20) \quad h &= a_{oi} u + b_{oi} v + c_{oi} w \\ &+ (c_{oi} v - b_{oi} w) \alpha + (a_{oi} w - c_{oi} u) \beta + (b_{oi} u - a_{oi} v) \gamma \\ &- \frac{1}{2} (b_{oi} v + c_{oi} w) \alpha^2 - \frac{1}{2} (a_{oi} u + c_{oi} w) \beta^2 - \frac{1}{2} (a_{oi} u + b_{oi} v) \gamma^2 \\ &+ \frac{1}{2} (b_{oi} u + a_{oi} v) \alpha \beta + \frac{1}{2} (c_{oi} u + a_{oi} w) \alpha \gamma + \frac{1}{2} (c_{oi} v + b_{oi} w) \beta \gamma \end{aligned}$$

Les variables  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  sont incluses dans les quantités  $u$ ,  $v$ ,  $w$  (formules 15). Dans les termes du second degré en  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  de l'expression (20) on négligera donc dans les quantités  $u$ ,  $v$ ,  $w$  les variables  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  pour ne garder que la partie principale  $x_a - x_i$ ,  $y_a - y_i$ ,  $z_a - z_i$ .

En outre pour expliciter les termes indépendants des 3 variables  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  on posera

$$(21) \quad h_{oi} = a_{oi} (x_a - x_i) + b_{oi} (y_a - y_i) + c_{oi} (z_a - z_i)$$

Pour expliciter les termes du 1<sup>er</sup> degré en  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  on posera ;

$$\begin{aligned} A_{oi} &= c_{oi} (y_a - y_i) - b_{oi} (z_a - z_i) \\ (22) \quad B_{oi} &= a_{oi} (z_a - z_i) - c_{oi} (x_a - x_i) \\ C_{oi} &= b_{oi} (x_a - x_i) - a_{oi} (y_a - y_i) \end{aligned}$$

Pour simplifier les termes du second degré en  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , comme on le dit plus haut, on remplacera  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , par des quantités approchées.

$$u = x_a - x_i \text{ par } a_{oi} h_{oi}$$

$$v = y_a - y_i \text{ par } b_{oi} h_{oi}$$

$$w = z_a - z_i \text{ par } c_{oi} h_{oi}$$

et en remarquant que

$$a_{oi}^2 + b_{oi}^2 + c_{oi}^2 = 1$$

on remplacera dans les coefficients des termes en  $\alpha^2$ ,  $\beta^2$ ,  $\gamma^2$

$$a_{oi}^2 + b_{oi}^2 \text{ par } 1 - c_{oi}^2$$

$$b_{oi}^2 + c_{oi}^2 \text{ par } 1 - a_{oi}^2$$

$$c_{oi}^2 + a_{oi}^2 \text{ par } 1 - b_{oi}^2$$

Finalement l'expression de  $h$  en fonction des 6 variables  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
h &= h_{oi} \\
&+ a_{oi} \delta x + b_{oi} \delta y + c_{oi} \delta z \\
&+ A_{oi} \alpha + B_{oi} \beta + C_{oi} \gamma \\
(23) \quad &+ (c_{oi} \delta y - b_{oi} \delta z) \alpha + (a_{oi} \delta z - c_{oi} \delta x) \beta + (b_{oi} \delta x - a_{oi} \delta y) \gamma \\
&+ \frac{1}{2} (a_{oi}^2 - 1) h_{oi} \alpha^2 + \frac{1}{2} (b_{oi}^2 - 1) h_{oi} \beta^2 + \frac{1}{2} (c_{oi}^2 - 1) h_{oi} \gamma^2 \\
&+ a_{oi} b_{oi} h_{oi} \alpha \beta + a_{oi} c_{oi} h_{oi} \alpha \gamma + b_{oi} c_{oi} h_{oi} \beta \gamma
\end{aligned}$$

Les 6 différentielles partielles de h par rapport aux 6 variables  $\delta x, \delta y, \delta z, \alpha, \beta, \gamma$  s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial \delta x} &= a_{oi} - c_{oi} \beta + b_{oi} \gamma \\
\frac{\partial h}{\partial \delta y} &= b_{oi} + c_{oi} \alpha - a_{oi} \gamma \\
\frac{\partial h}{\partial \delta z} &= c_{oi} - b_{oi} \alpha + a_{oi} \beta \\
(24) \quad \frac{\partial h}{\partial \alpha} &= A_{oi} + c_{oi} \delta y - b_{oi} \delta z + (a_{oi}^2 - 1) b_{oi} \alpha + a_{oi} b_{oi} h_{oi} \beta + a_{oi}^2 c_{oi} h_{oi} \gamma \\
\frac{\partial h}{\partial \beta} &= B_{oi} - c_{oi} \delta x + a_{oi} \delta z + a_{oi} b_{oi} h_{oi} \alpha + (b_{oi}^2 - 1) h_{oi} \beta + b_{oi} c_{oi} h_{oi} \gamma \\
\frac{\partial h}{\partial \gamma} &= C_{oi} + b_{oi} \delta x - a_{oi} \delta y + a_{oi} c_{oi} h_{oi} \alpha + b_{oi} c_{oi} h_{oi} \beta + (c_{oi}^2 - 1) h_{oi} \gamma
\end{aligned}$$

Les 6 différentielles partielles du carré de la distance  $D_i$  par rapport aux 6 variables (formules 18) s'expriment alors en effectuant le produit de l'expression de h (23) avec les 6 expressions (24), en se limitant, dans le résultat, aux termes du premier degré des variables.

Ces 6 différentielles partielles sont exprimées dans les crochets [ ] des équations normales ci-dessous (formules 25).

## 2 - 6 - Equations normales

La somme des carrés des distances  $[D_i^2]$ , entre les différentes visées du relèvement et les points visés correspondants, sera minimum pour la position  $x, y, z$ , de la station R et la rotation  $\alpha, \beta, \gamma$  de son référentiel particulier rendant nulles les 6 sommes des différentielles partielles.

$$\left[ -\frac{1}{2} \frac{\partial D_i^2}{\partial \delta x} \right] = 0 \left[ -\frac{1}{2} \frac{\partial D_i^2}{\partial \delta y} \right] = 0 \left[ -\frac{1}{2} \frac{\partial D_i^2}{\partial \delta z} \right] = 0 \left[ -\frac{1}{2} \frac{\partial D_i^2}{\partial \alpha} \right] = 0 \left[ -\frac{1}{2} \frac{\partial D_i^2}{\partial \beta} \right] = 0 \left[ -\frac{1}{2} \frac{\partial D_i^2}{\partial \gamma} \right] = 0$$

Les valeurs de :  $\delta x, \delta y, \delta z, \alpha, \beta, \gamma$  cherchées répondent à la solution du système des 6 équations normales à 6 inconnues. Pour en alléger la présentation, les coefficients sont indiqués, pour chaque équation, sous l'inconnue qu'ils multiplient. De plus les indices io des cosinus directeurs et autres valeurs ont été supprimés :  
par exemple  $a_{oi}$  devient a.

(25)

| $\delta x$  | $\delta y$  | $\delta z$  | $\alpha$               | $\beta$                | $\gamma$               | Constante              |
|-------------|-------------|-------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| $[a^2 - 1]$ | $[ab]$      | $[ac]$      | $[Aa]$                 | $[Ba - ch]$            | $[Ca + bh]$            | $[ah - x_a + x_i] - 0$ |
| $[ab]$      | $[b^2 - 1]$ | $[bc]$      | $[Ab + ch]$            | $[Bb]$                 | $[Cb - ah]$            | $[bh - y_a + y_i] - 0$ |
| $[ac]$      | $[bc]$      | $[c^2 - 1]$ | $[Ac - bh]$            | $[Bc + ah]$            | $[Cc]$                 | $[ch - z_a + z_i] - 0$ |
| $[Aa]$      | $[Ab + ch]$ | $[Ac - bh]$ | $[A^2 + (a^2 - 1)h^2]$ | $[AB + abh^2]$         | $[AC + ach^2]$         | $[Ah] - 0$             |
| $[Ba - ch]$ | $[Bb]$      | $[Bc + ah]$ | $[AB + abh^2]$         | $[B^2 + (b^2 - 1)h^2]$ | $[BC + bch^2]$         | $[Bh] - 0$             |
| $[Ca + bh]$ | $[Cb - ah]$ | $[Cc]$      | $[AC + ach^2]$         | $[BC + bch^2]$         | $[C^2 + (c^2 - 1)h^2]$ | $[Ch] - 0$             |

## 2 - 7 - Résolution itérative

Comme il a déjà été dit, il est nécessaire de connaître des valeurs approchées de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Souvent d'ailleurs, lors de la mise en station de l'appareil, on aura pu s'arranger pour que l'orientation du référentiel particulier de la station ne soit pas très différente de celle du référentiel général. Les valeurs approchées de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  sont alors zéro.

S'il n'en est pas ainsi, on choisira des valeurs approchées  $\alpha_o$ ,  $\beta_o$ ,  $\gamma_o$  qui définiront donc une rotation initiale du référentiel particulier de la station R. Il sera fait application dans un **calcul préalable**, des formules (13) d'Olinde Rodrigues pour obtenir, pour chaque visée, des cosinus directeurs  $a_{1i}$ ,  $b_{1i}$ ,  $c_{1i}$  à partir des cosinus directeurs initiaux  $a_{oi}$ ,  $b_{oi}$ ,  $c_{oi}$ .

On peut, par contre, s'affranchir de la connaissance des valeurs approchées des coordonnées  $x_a$ ,  $y_a$ ,  $z_a$  de la station R.

En effet, dans un **premier calcul**, on peut fixer à zéro les valeurs  $x_a$ ,  $y_a$ ,  $z_a$  et considérer que les inconnues  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  sont également nulles.

Le système se réduit à la résolution des 3 premières équations normales à 3 inconnues tout à fait analogue au cas du point intersecté.

$$\begin{aligned} [a^2 - 1] \delta x + [ab] \delta y + [ac] \delta z + [ah + x_i] &= 0 \\ [ab] \delta x + [b^2 - 1] \delta y + [bc] \delta z + [bh + y_i] &= 0 \\ [ac] \delta x + [bc] \delta y + [c^2 - 1] \delta z + [ch + z_i] &= 0 \end{aligned}$$

Ce sont bien les mêmes équations que pour le point intersecté sauf que  $h$  a changé de signe car d'après (21) :  $h_{oi} = -(a_{oi} x_i + b_{oi} y_i + c_{oi} z_i)$ .

Dans un **deuxième calcul**, on adoptera les valeurs  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ , trouvées dans le premier calcul comme valeurs approchées  $x_a$ ,  $y_a$ ,  $z_a$  des coordonnées de R et l'on calculera les valeurs  $\delta x_1$ ,  $\delta y_1$ ,  $\delta z_1$ ,  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$  des 6 inconnues.

Ces résultats ne seront pas encore définitifs car des approximations ont été faites dans l'établissement des équations normales.

Un **troisième calcul** est donc nécessaire en prenant :

- comme nouvelles valeurs approchées des coordonnées

$$x'_a = x_a + \delta x_1$$

$$y'_a = y_a + \delta y_1$$

$$z'_a = z_a + \delta z_1$$

- comme nouvelles valeurs des cosinus directeurs  $a_{2i}$ ,  $b_{2i}$ ,  $c_{2i}$ , les valeurs obtenues à partir des cosinus directeurs initiaux  $a_{oi}$ ,  $b_{oi}$ ,  $c_{oi}$  ou à partir de  $a_{1i}$ ,  $b_{1i}$ ,  $c_{1i}$  si une rotation approchée a été appliquée dans le calcul préalable.

Ce nouveau calcul donnera des résultats qui seront traités comme les précédents du deuxième calcul.

Un **calcul itératif** sera exécuté jusqu'à ce que les 6 nouvelles valeurs trouvées pour les inconnues soient nulles, ou tout au moins inférieures à une limite que l'on se fixera pour arrêter le calcul.

Dans ce processus itératif, il convient de prendre soin de calculer les valeurs successives des coefficients  $a_{ni}$ ,  $b_{ni}$ ,  $c_{ni}$  toujours en repartant des valeurs initiales  $a_{oi}$ ,  $b_{oi}$ ,  $c_{oi}$  par les formules (13) prenant en compte le produit des rotations successives (produit des matrices).

Il y a lieu de vérifier que la matrice produit est bien restée une matrice unitaire dans le calcul, car ce n'est pas toujours le cas en raison des arrondis. Dans ce cas il est facile de rendre unitaire la matrice produit en recalculant les 9 termes à partir des valeurs de  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$ ,  $\gamma_n$  que l'on obtient aisément par la demi-différence entre les termes rectangles symétriques de la matrice-produit.



# INTERSECTION SPATIALE

Calcul avec compensation par la méthode des moindres carrés

| Stations                               | S <sub>1</sub>  | S <sub>2</sub> | S <sub>3</sub> | Somme des Coeff.           |
|--|---|----------------|----------------|----------------------------|
| Coord. x <sub>i</sub>                  | 20. 100   | 19. 912        | 71. 244        |                            |
| y <sub>i</sub>                         | 100. 003  | 40. 180        | 31. 817        |                            |
| z <sub>i</sub>                         | 5. 420  | 6. 025         | 33. 774        |                            |
| Cisement G <sub>i</sub>                | 128. 3529   | 55. 3240       | 391. 8011      |                            |
| Angle Azimuth Z <sub>i</sub>           | 66. 7424  | 71. 7670       | 99. 4332       |                            |
| Cos.direct. a <sub>i</sub>             | 0.78208339  | 0.68982295     | -0.12842720    |                            |
| b <sub>i</sub>                         | -0.37332975   | 0.58311897     | 0.99167897     |                            |
| c <sub>i</sub>                         | 0.49896941  | 0.42908806     | 0.00890316     |                            |
| h <sub>i</sub>                         | -18.90980465  | 39.75073035    | 22.70327753    |                            |
| Coeff. a <sub>i</sub> <sup>2</sup> - 1 | -0.38834557   | -0.52414430    | -0.98350645    | -1.89599632                |
| b <sub>i</sub> <sup>2</sup> - 1        | -0.86062490   | -0.65997227    | -0.01657282    | -1.53716999                |
| c <sub>i</sub> <sup>2</sup> - 1        | -0.75102953   | -0.81588344    | -0.99992073    | -2.56683370                |
| ab <sub>i</sub>                        | -0.29197500   | 0.40224885     | -0.12735855    | -0.01708470                |
| ac <sub>i</sub>                        | 0.39023569  | 0.29599479     | -0.00114341    | 0.68508707                 |
| bc <sub>i</sub>                        | -0.18628012   | 0.25020939     | 0.00882907     | 0.07275835                 |
| ah <sub>i</sub> - x <sub>i</sub>       | -34.88904413  | 7.50896607     | -74.15971836   | -101.53979642              |
| bh <sub>i</sub> - y <sub>i</sub>       | -92.94340736  | -17.00059506   | -9.30263712    | -119.24663954              |
| ch <sub>i</sub> - z <sub>i</sub>       | -14.85541407  | 11.03156377    | -33.57186918   | -37.39571948               |
| Equations normales                     | $-1.89599632 x - 0.01708470 y + 0.68508707 z = -101.53979642$ $-0.01708470 x - 1.53716999 y + 0.07275835 z = -119.24663954$ $0.68508707 x + 0.07275835 y - 2.56683370 z = -37.39571948$ |                |                |                            |
| Solutions                              | $x = 65.203\ 914$ $y = 78.469\ 326$ $z = 34.195\ 973$   |                |                |                            |
| Résidus d'obs.<br>Distances Di         | 0.003 053   | 0.003 578      | 0.003 522      | e <sub>mq</sub><br>0.004 8 |

### 3 — RÉSEAU SPATIAL

Une extension de la station de relèvement spatial et de l'intersection spatiale est la réalisation d'un canevas à plusieurs stations, à visées réciproques ou non, visant un certain nombre de points, soit pour les intersecter, soit pour se relever sur leur position.

Chaque station a alors son propre référentiel particulier et le développement de la théorie conduit à des équations normales comportant 6 inconnues par station et, si on veut les faire rentrer dans la compensation, 3 inconnues en plus par points intersectés.

Cela amène à des équations normales de grandes dimensions, mais les ordinateurs sont là pour résoudre ces systèmes.

### 4 — CONSIDÉRATIONS FINALES ET CONCLUSION

L'intérêt de l'intersection spatiale est évident dans les canevas de faibles dimensions lorsque les visées ne sont pas trop près de l'horizontale. Les résultats sont alors meilleurs que par le calcul classique de la planimétrie, puis de l'altimétrie.

On peut, sans difficulté, tenir compte de la réfraction atmosphérique. En effet, il suffit de corriger, avant les calculs, les angles zénithaux observés en les augmentant proportionnellement à la longueur horizontale des visées. Pour cela, un premier calcul sera fait sans tenir compte de la réfraction et permettra de connaître ces longueurs horizontales. Un deuxième calcul, après correction de réfraction des angles zénithaux, sera définitif.

La théorie du relèvement spatial et des réseaux spatiaux a été développée pour des mesures dimensionnelles dans les cales de navires à flot, où aucune référence à la verticale n'était possible.

La précision des résultats obtenus pour les canevas sur les navires à flot a toujours été au moins aussi bonne que pour les canevas dans les navires en cale sèche (précision du 1/2 millimètre facilement atteinte).

La méthode du relèvement spatial peut être utilisée avec profit pour des canevas d'auscultation de précision, dans le cas d'ouvrage d'art de grande hauteur (barrages par exemple). En effet, il a souvent été constaté que, par suite des écarts accidentels de verticalité de l'axe de l'alidade aux stations d'observation, les intersections d'une série de points situés sensiblement sur une même verticale, présentaient des écarts entre les visées d'autant plus grands que les dénivellées entre stations et points visés étaient plus importantes. En donnant alors au théodolite, en chaque station d'observation, les 2 degrés de liberté qui définissent les défauts de verticalité de l'axe de l'alidade, on peut pallier à ces défauts.

Une difficulté opératoire dans le relèvement spatial est que le cercle "vertical" du théodolite doit, comme le cercle "horizontal", être fixe et ne faire l'objet d'aucun mouvement par rapport à l'alidade. Il y a donc lieu de bloquer le bouton de réglage et, pour plus de sûreté, de masquer la nivelle de réglage. En fait, pour cet usage, un cercle "vertical" fixe, par construction de l'instrument, serait la meilleure solution.

Enfin je voudrais terminer cet article par une pensée et un remerciement :

— une pensée pour les futurs "toponautes" de l'espace qui pourront, grâce à ces formules s'adonner aux joies des canevas topométriques en état d'apesanteur,

— un remerciement aux constructeurs et armateurs des deux premiers navires méthaniers de la filière TECHNIGAZ qui ont baptisé ces bateaux : PYTHAGORE et DESCARTES, rendant ainsi hommage à l'importance du rôle de la géométrie dans leur construction.

**Robert VINCENT**