

# Compensation d'un point défini par triangulation et trilatération

par Jean-Claude LEVEILLE  
Ingénieur Topographe ENSAIS  
Cabinet Robert ALBENQUE, Orléans

## 1 — PROBLÈME

Nous sommes souvent amenés à déterminer avec précision les **coordonnées d'un point, rattaché** à un canevas existant, par l'intermédiaire **d'angles** et de **distances**. Nous connaissons bien la compensation selon les moindres carrés d'un point intersecté et relevé multiple par des mesures angulaires, de même que celle d'un point connu par trilatération. Prendre en compte simultanément les angles et les distances implique des calculs plus compliqués et un problème d'homogénéisation des mesures.

Le programme que je vais vous présenter est adaptable sur les HP.67, HP.97 et HP.41. Il est très utile pour les travaux de triangulation, aussi bien sur le terrain qu'au bureau.

Il permet de **compenser selon les moindres carrés** les coordonnées d'un point connu par :

- des mesures de distance (trilatération)
- des observations angulaires d'intersection } triangulation
- des observations angulaires de relèvement } lation
- **une combinaison quelconque d'observations d'angles et de distances.**

Il permet en outre :

- le contrôle instantané de la validité des observations dès leur entrée en machine. Ceci évite de détruire les valeurs déjà entrées dans la compensation.
- le calcul des observations d'angles, de distances indispensables à la recherche ou à l'implantation d'un point connu en coordonnées.

La principale qualité de ce programme est sa simplicité d'emploi et le peu de moyens qu'il demande par rapport aux possibilités de calcul qu'il offre.

## 2 — MÉTHODES & FORMULES UTILISÉES

Elles sont celles de la **compensation** de triangulation et de trilatération d'un point **selon les moindres carrés**. Seul un coefficient de **poids** sur chaque observation **permet de fusionner** dans une même compensation les **mesures d'angles et de distances**.

La démonstration des formules utilisées se trouve dans beaucoup de manuels traitant la topographie. Je me contenterai donc de les rappeler afin que chacun puisse les programmer sur une autre machine que la HP.67 ou 97.

soit les éléments de départ :

XN, YN = coordonnées approchées du point à compenser.

VoN = gisement origine approché du tour d'horizon fait en N.

Xi, Yi = coordonnées du point d'appui i.

Li = observation de relèvement sur i.

Vi = observation d'intersection en i.

Di = distance observée IN.

Pj = poids d'une observation j.

Nous avons :

$$\left. \begin{aligned} a_j &= \cos V_i \\ b_j &= \sin V_i \\ v_j &= D_i - \text{distance NI calculée} \end{aligned} \right\} \text{trilatération}$$

$$\left. \begin{aligned} a_j &= \frac{\cos V_i}{D_i \sin 1} \\ b_j &= \frac{\sin V_i}{D_i \sin 1} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{intersection} \\ \text{ou} \\ \text{relèvement} \end{array}$$

$$\begin{aligned} v_i &= V_i^{\text{calculé}} - (VoN + Li) \pm 200 \\ v_j &= V_i - V_i^{\text{calculé}} \pm 200 \end{aligned}$$

n = nombre total d'observations

nr = nombre d'observations de relèvement.

$$A A = [P_j a_j a_j]_1^n - ([P_j a_j]_1^{nr})^2 / [P_j]_1^{nr}$$

$$A B = [P_j a_j a_j]_1^n - [P_j a_j]_1^{nr} [P_j b_j]_1^{nr} / [P_j]_1^{nr}$$

$$B B = [P_j b_j b_j]_1^n - ([P_j b_j]_1^{nr})^2 / [P_j]_1^{nr}$$

$$A F = [P_j a_j v_j]_1^n - [P_j a_j]_1^{nr} \cdot [P_j v_j]_1^{nr} / [P_j]_1^{nr}$$

$$B F = [P_j b_j v_j]_1^n - [P_j b_j]_1^{nr} \cdot [P_j F_j]_1^{nr} / [P_j]_1^{nr}$$

$$F F = [P_j v_j v_j]_1^n - ([P_j v_j]_1^{nr})^2 / [P_j]_1^{nr}$$

Nous pouvons alors calculer "dx" et "dy" en résolvant le système d'équations suivantes :

$$A A. dx + A B. dy = A F$$

$$A B. dx + B B. dy = B F$$

$$X \text{ compensé} = XN + dx$$

$$Y \text{ compensé} = YN + dy$$

$$Vo \text{ compensé} =$$

$$Vo + [P_j v_j]_1^{nr} - [P_j a_j]_1^{nr} \cdot dx - [P_j b_j]_1^{nr} \cdot dy$$

$$PVV = F F - A F. dx - B F. dy$$

$$MQo = \sqrt{PVV / (n-2)} \text{ si pas de relèvement}$$

$$MQo = \sqrt{PVV / (n-3)} \text{ si visées de relèvement}$$

$$mq_x = MQo \cdot \sqrt{B B - (AB \cdot AB / AA)}$$

$$mq_y = mq_x \cdot \sqrt{B B / AA}$$

### 3 — MISE EN ŒUVRE DU PROGRAMME DE CALCUL

#### 3.1. Préparation des données

Il faut commencer par remplir le bordereau présenté en page suivante en inscrivant :

- les coordonnées approchées "X" et "Y" du point à calculer et éventuellement son "Vo" approché.
- les coordonnées des points d'appui.
- les observations en indiquant dans la colonne suivante leur nature (A pour intersection, B pour relèvement, D pour distance).
- choix d'un MQo et calcul du poids des observations. Ce MQo pourra avantageusement être égal au mq<sub>o</sub> des observations d'angles ou à celui des distances. Le calcul du poids se fait à l'aide des formules :

$$P_{\alpha i} = (MQo / mq_{\alpha i})^2 \text{ pour les angles (mq}_{\alpha i} \text{ en grades)}$$

$$P_{di} = (MQo / mq_{di})^2 \text{ pour les distances (mq}_{di} \text{ en mètres)}$$

Théoriquement le poids d'une observation angulaire est proportionnelle au nombre de tours d'horizon dont elle découle. De même celui d'une observation de distance est proportionnel au nombre de mesures.

Cette théorie exclut toute erreur systématique. Pratiquement, c'est avec l'expérience que l'on détermine le mieux la précision des appareils de mesures que l'on utilise. On en déduit le poids des observations.

#### 3.2 — Mode d'emploi du programme

1. Introduire la carte programme dans la machine, le contacteur étant sur "RUN".

2. Stocker les coordonnées approchées "X" et "Y" du point à compenser respectivement dans les registres 0 et 1 :

X **[STO]** **[0]** ; Y **[STO]** **[1]**

3. Si il y a des visées de relèvement, stocker un "Vo" approché dans le registre 4 ou charger le FLAG 0 :

Vo **[STO]** **[4]** ou **[h]** **[SF]** **[0]**

4. Entrer les coordonnées d'un point d'appui "i"

Xi **[ENT↑]** ; Y **[C]**

5. Entrer les observations et les poids relatifs au point "i"

Dans les opérations qui suivent ; **on ne fait l'opération Pi [RS] que si l'écart "vi" affiché est tolérable** (vi = écart entre les observations et les valeurs calculées). Ceci évite la destruction des données de compensation **des observations déjà saisies** par une donnée fausse.

Si "vi" est inacceptable, on entre l'observation corrigée ou on passe à l'observation ou au point d'appui suivant (opération 4 ou 5).

a) observation de **relèvement** s'il y en a une :

Li **[B]** inscrire sur l'imprimé l'écart "vi" affiché en grades,

Pi **[RS]** affichage de n (1)

b) observation **d'intersection** s'il y en a une :

Vi **[A]** inscrire sur l'imprimé l'écart "i" affiché en grades,

Pi **[RS]** affichage de "n" (1)

c) observation de **distance** :

Di **[D]** inscrire l'écart "vi" affiché en mètres,

Pi **[RS]** affichage de n (1)

(1) n = nombre d'observations entrées dans la compensation.

6. Aller en "4" pour traiter le point d'appui suivant.

Si toutes les observations sont traitées, appuyer sur **[RS]**.

Apparaissent successivement, signalées par un clignotement sur "HP.67" ou impression sur "HP.97" ; les valeurs compensées "MQo, Vo, mq<sub>x</sub>, Y, mq<sub>y</sub>".

7. Si on veut les fermetures sur chaque opération, repartir de "4" avec le 1<sup>er</sup> point d'appui. Les fermetures "fi" seront affichées à la place de "vi".

8. Pour compenser un autre point aller en "2".

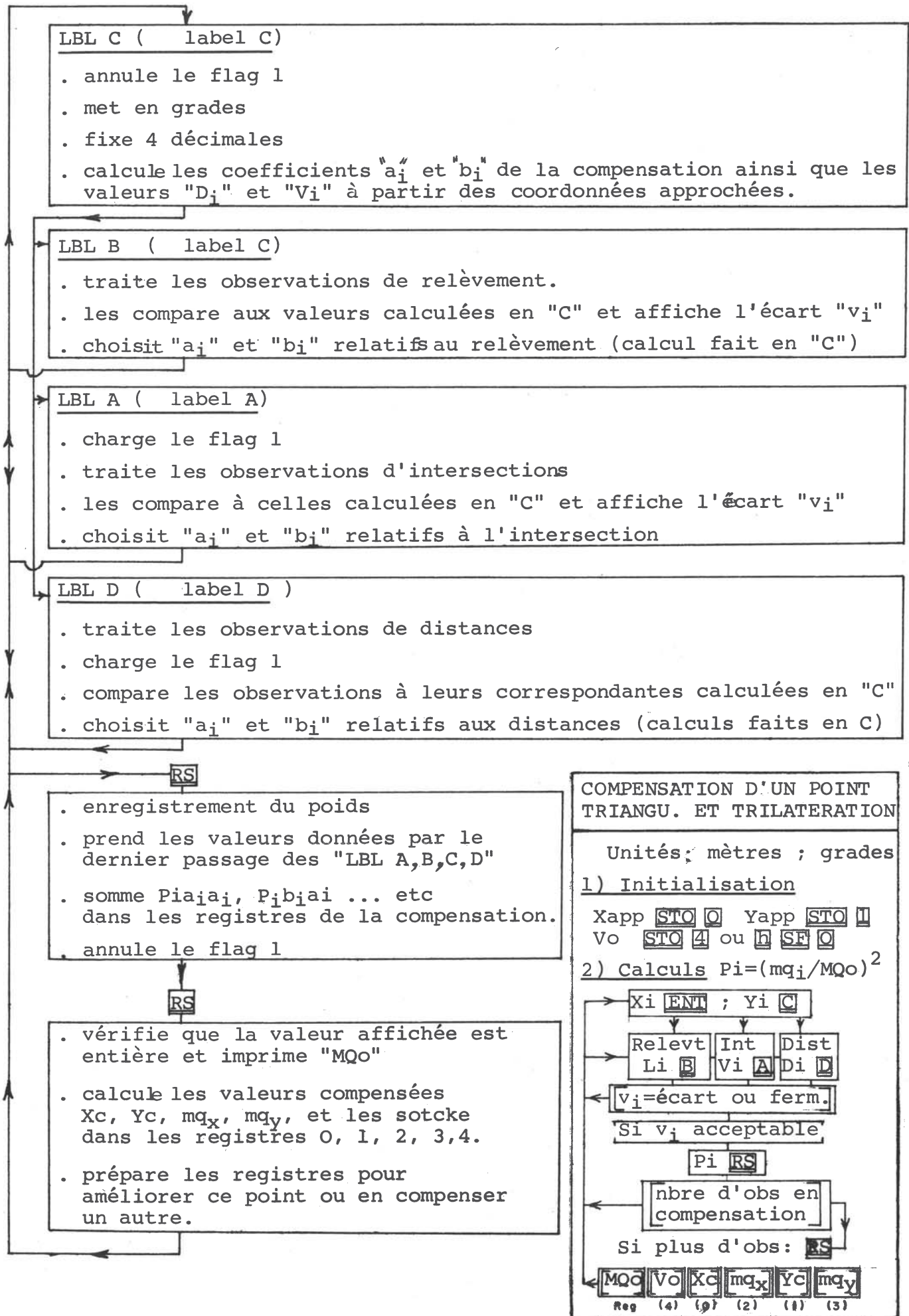
Pour rechercher ou calculer l'implantation d'un point "P" de coordonnées "Xp" et "Yp" connues, nous pouvons à tout moment faire les opérations suivantes sans perturber la compensation :

a) Xp **[ENT↑]** Yp **[C]**

b) O **[B]** lecture de relèvement à ± 200 grades affichée.

O **[A]** gisement NP à ± 200 grades affiché.

O **[D]** distance NP affichée (ne pas tenir compte du signe).

ORGANIGRAMME



#### 4. Divers

Les coordonnées approchées que l'on entre dans le programme sont améliorées environ 1000 fois. Cela signifie qu'après une compensation ou un passage du programme, des coordonnées de départ fausses de 1 mètre donnent une précision de calcul de 0,001 mètre sur les résultats finaux.

Si les erreurs moyennes quadratiques calculées sont satisfaisantes, il n'est pas utile de recommencer la compensation et de calculer les fermetures "fi".

Dans le cas contraire, on recommencera la compensation en enlevant des calculs la ou les observations qui semblent hors tolérances ("fi" trop élevé).

On peut vérifier le choix de la pondération que l'on a appliquée en comparant les fermetures obtenues dans la dernière colonne du tableau à celles prévues au départ pour le calcul du poids.

$$mqp_i \text{ Prévues} = MQ_0 / \sqrt{P_i}$$

Il y a possibilité de travailler en degrés décimaux. Pour cela, il suffit de supprimer le pas .002 du programme (GRAD). L'opérateur pourra ensuite choisir les unités qu'il désire.

De même il y a possibilité de modifier le nombre de décimales de l'affichage des angles en changeant ou en supprimant le pas n° 003 (DSP 4).

Il y a possibilité de résoudre des problèmes d'intersection, de recoupement et de relèvement par angles et distances. Pour cela, il faut connaître des coordonnées approchées du point que l'on cherche à calculer ( $\pm 100$  ou  $150$  m si les points d'appuis sont à environ

1 km). On procède comme pour l'amélioration d'un point à la différence que, comme il n'y a pas d'observation supplémentaire, il faut :

— soit taper deux fois une même observation avec un poids égal à la moitié de sa vraie valeur ; sur une observation on introduira une valeur entachée d'une erreur négligeable (une seconde par exemple). De cette façon il y aura possibilité de compensation.

— soit incrémenter le registre du nombre d'observations en faisant l'opération  $\boxed{1} \boxed{STO} \boxed{+} \boxed{9} \boxed{RS}$  avant la compensation ou  $\boxed{CLEAR X} \boxed{CLEAR X}$

$\boxed{1} \boxed{RS}$  après l'apparition du message "ERROR" lors de la compensation. Si un deuxième message "ERROR" apparaît, il faut faire l'opération  $\boxed{CLEAR X} \boxed{CHS} \boxed{RS}$ .

On contourne ainsi les difficultés d'une division par zéro et de la racine d'un résidu de calcul négatif.

Ces possibilités supplémentaires découlent de l'extrapolation du programme qui est en réalité prévu pour la compensation.

Il ne donne de bons résultats sur un relèvement, une intersection ou un recoupement que si le point approché introduit au départ n'est pas aberrant et que les observations se prêtent à une bonne définition du point (éviter les intersections en sifflet et le cercle critique).

(voir tableaux pages suivantes)

## ABONNEMENT 1982 A LA REVUE XYZ de l'Association Française de Topographie

Pour s'abonner à cette revue, vous adressez votre demande, accompagnée du chèque de règlement, à l'adresse suivante :

**ASSOCIATION FRANÇAISE  
DE TOPOGRAPHIE  
"Abonnements"  
39<sup>ter</sup> rue Gay-Lussac  
75005 PARIS**

Abonnement 1 AN (4 numéros)

- FRANCE = 250 F
- AUTRES PAYS = 300 F

Tous les membres de l'A.F.T. sont automatiquement abonnés à la revue xyz.

Les abonnements ne sont pas rétroactifs et commencent à la date du règlement.

Achat d'un seul numéro - même adresse que ci-dessus. (sous réserve de disponibilité)

- FRANCE = 70 F
- AUTRES PAYS = 80 F

Tél. : (1) 354.19.21 pte 92 mardi et vendredi de 10 h à 12 h.

En cas de changement d'adresse, nous invitons nos abonnés à bien vouloir communiquer à l'adresse ci-dessus la dernière bande accompagnée de la somme de 4,00 F en timbres-poste.

## . LISTING DU PROGRAMME de COMPENSATION .

001	*LBLC	21 13	057	*LBL0	21 00	112	X#0?	16-42	159	-	-45
002	GRAD	16-23	058	STOB	35 12	113	GT08	22 00	170	RCL5	36 15
003	DSP4	-63 04	059	R+	-31	114	1	01	171	=	-24
004	CF1	16 22 01	060	STOC	35 13	115	STOE	35 15	172	STOC	35 13
005	RCL1	36 01	061	R+	-31	116	ST+9	35-55 09	173	RCL0	36 00
006	-	-45	062	STOD	35 14	117	*LBL8	21 00	174	RCL2	36 02
007	XZY	-41	063	R/S	51	118	CHS	-22	175	=	-24
008	RCL0	36 00	064	P+S	16-51	119	1/X	52	176	JX	54
009	-	-45	065	STOA	35 11	120	STOA	35 11	177	RCL8	36 12
010	XZY	-41	066	ST+6	35-55 06	121	P+S	16-51	178	RCL4	36 04
011	+P	34	067	ROLB	36 12	122	RCL7	36 07	179	x	-35
012	XZY	-41	068	X <sup>2</sup>	53	123	X <sup>2</sup>	53	180	RCL3	36 03
013	STO5	35 05	069	GSB4	23 04	124	GSB4	23 04	181	GSB4	23 04
014	1	01	070	RCLB	36 12	125	RCL7	36 07	182	ST-5	35-45 05
015	+R	44	071	RCLC	36 13	126	ROL8	36 08	183	CLX	-51
016	STO7	35 07	072	x	-35	127	x	-35	184	RCL5	36 05
017	XZY	-41	073	GSB4	23 04	128	GSB4	23 04	185	P+S	16-51
018	STO6	35 06	074	ROLC	36 13	129	ROL8	36 08	186	RCL9	36 09
019	ROL5	36 05	075	X <sup>2</sup>	53	130	X <sup>2</sup>	53	187	3	03
020	R+	16-31	076	GSB4	23 04	131	GSB4	23 04	188	-	-45
021	STOB	35 00	077	RCLB	36 12	132	ROL7	36 07	189	=	-24
022	1	01	078	ROLD	36 14	133	ROL9	36 09	190	JX	54
023	SIN	41	079	x	-35	134	x	-35	191	FRTX	-14
024	x	-35	080	GSB4	23 04	135	GSB4	23 04	192	RCLD	36 14
025	1/X	52	081	RCLC	36 13	136	RCL8	36 08	193	JX	54
026	+R	44	082	RCLD	36 14	137	RCL9	36 09	194	=	-24
027	CHS	-22	083	x	-35	138	x	-35	195	STO2	35 02
028	STO2	35 02	084	GSE4	23 04	139	GSB4	23 04	196	x	-35
029	XZY	-41	085	RCLD	36 14	140	RCL9	36 09	197	STO3	35 03
030	STO3	35 03	086	X <sup>2</sup>	53	141	X <sup>2</sup>	53	198	RCLC	36 13
031	R/S	51	087	GSB4	23 04	142	GSB4	23 04	199	ST-4	35-45 04
032	*LBLD	21 14	088	ISZI	16 26 46	143	ROL1	36 01	200	0	00
033	SF1	16 21 01	089	F1?	16 23 01	144	ROL2	36 02	201	STO9	35 09
034	ROL8	36 08	090	GT03	22 03	145	=	-24	202	RCLB	36 12
035	-	-45	091	RCLA	36 11	146	STOA	35 11	203	ST-1	35-45 01
036	ROL7	36 07	092	RCL5	36 15	147	RCL4	36 04	204	RCLA	36 11
037	RCL6	36 06	093	+	-55	148	x	-35	205	ST+0	35-55 00
038	GT00	22 00	094	STOE	35 15	149	ROL3	36 03	206	P+S	16-51
039	*LBLA	21 11	095	RCLB	36 12	150	-	-45	207	CLRG	16-53
040	SF1	16 21 01	096	GSB4	23 04	151	RCL0	36 00	208	P+S	16-51
041	*LBLB	21 12	097	RCLC	36 13	152	RCL1	36 01	209	RCL4	36 04
042	ROL5	36 05	098	GSB4	23 04	153	GSB4	23 04	210	PRTX	-14
043	-	-45	099	RCLD	36 14	154	STOD	35 14	211	DSP3	-63 03
044	CHS	-22	100	GSB4	23 04	155	=	-24	212	RCL0	36 00
045	F1?	16 23 01	101	*LBL3	21 03	156	STOA	35 11	213	RCL2	36 02
046	GT02	22 02	102	0	00	157	RCL1	36 01	214	RCL1	36 01
047	F0?	16 23 00	103	STOI	35 46	158	x	-35	215	RCL3	36 03
048	STO4	35 04	104	P+S	16-51	159	RCL4	36 04	216	PRST	16-14
049	CF0	16 22 00	105	1	01	160	+	-55	217	R/S	51
050	RCL4	36 04	106	ST+9	35-55 09	161	RCL2	36 02	218	*LBL4	21 04
051	-	-45	107	RCL9	36 09	162	=	-24	219	RCLA	36 11
052	*LBL2	21 02	108	CF1	16 22 01	163	STOB	35 12	220	x	-35
053	TAN	43	109	R/S	51	164	ROL8	36 08	221	ST+i	35-55 45
054	TAN-	16 43	110	NI	16 52	165	x	-35	222	-	-45
055	ROL3	36 03	111	RCL5	36 15	166	RCL7	36 07	223	ISZI	*16 26 46
056	ROL2	36 02	112	X#0?	16-42	167	GSB4	23 04	224	RTN	24
						168	RCL9	36 09			

N° d'Affaire :  
 Calculateur :

X app = STO 0

Y app = STO 1

V<sub>0</sub> = Go = STO 4 ou h SF 0

MQ<sub>0</sub> =

P<sub>xi</sub> = (MQ<sub>0</sub>/mq<sub>xi</sub>; Grades)<sup>2</sup>

P<sub>di</sub> = (MQ<sub>0</sub>/mq<sub>di</sub> m)<sup>2</sup>

Xcomp	—
mqx	—
Ycomp	—
mqy	—

[illegible]

COMPENSATION d'un Point connu par  
Triangulation et Trilatération

HP 67

HP 97

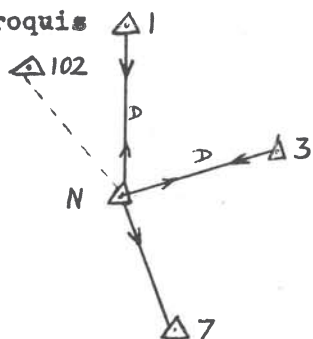
Date :

N° d'Affaire :

Chantiers :

Calculateur :

Croquis



Résultat de la compensation

$$MQ_0 = 0.0008$$

$$V_0 = G_0 = -12.0997 = 387.9003$$

$$X_{comp} = 3251.631 \text{ m.}$$

$$mq_x = \pm 0.006$$

$$Y_{comp} = 4572.761 \text{ m.}$$

$$mq_y = \pm 0.007$$

$$X_{app} = 3252.80 \quad \boxed{\text{STO}} \quad \boxed{0}$$

$$Y_{app} = 4574.70 \quad \boxed{\text{STO}} \quad \boxed{1}$$

$$V_0 = G_0 = \quad \boxed{\text{STO}} \quad \boxed{4} \text{ ou } \boxed{h} \quad \boxed{\text{ST}} \quad \boxed{0}$$

$$MQ_0 = \pm 0.002$$

$$P_{\alpha i} = (MQ_0/mq_{\alpha i} \text{ Grades})^2 \leq 1$$

$$P_{di} = (MQ_0/mq_{di} \text{ m})^2 \leq 0.01$$

N° du point	$X_i$ (m) <span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">ENT</span>	$Y_i$ <span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">C</span>	Observation <span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">B A D</span>	rel. int. dist	Ecart $v_i$ Grde	Poids <span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">RS</span>	Ferm. $f_i$ Grd.	n°Obs.
1	3256.95	6058.62	12.3284	B	0	1	-0.0005	1
			200.2282	A	-0.0502	2	0.0000	2
			1485.83	D	1.904	0.01	-0.0004	3
3	4459.07	4778.30	101.3664	B	0.1391	1	+0.0010	4
			<del>315.3728</del>	<del>A</del>	<del>-26.02</del>	2		
			1224.81	D	+1.478	0.01	0.001	5
7	3569.71	3650.27	190.9623	B	+0.1630	1	-0.0006	6

IMPLANTATION du POINT 102 par ANGLE et DISTANCE à PARTIR de N

102	3850.72	3990.30	161.2053	B
			349.1056	A
			835.59	D