

# Méthodes d'évaluation statistique de la qualité des résultats topométriques

M. MAYOUD  
CERN, Genève

## I. RÉSUMÉ

Si certains paramètres statistiques d'appréciation de la qualité sont bien connus et fréquemment employés, on oublie parfois ou néglige souvent l'usage de certaines quantités dérivées des observations ou des calculs de compensation, qui peuvent parfois se révéler fort utiles.

Le but de cette présentation est donc de rappeler succinctement l'existence et l'emploi de quelques variables statistiques simples pouvant servir notamment à dimensionner un échantillonnage de contrôle, exprimer les intervalles de confiance des moyennes et des écarts-types, effectuer des tests comparatifs, évaluer la signification et l'incidence de la plus grande valeur trouvée dans un contrôle (statistiques d'ordre) ou rejeter sans trop d'arbitraire les valeurs aberrantes d'une série d'observations.

Concernant les tests comparatifs (test t de Student, test du  $\chi^2$ , test F de Fisher), il est important de souligner que leur universalité et la sûreté de leur emploi peuvent être très utiles en cas de contestation des résultats.

Divers usages pratiques de ces variables sont donnés en exemple. D'autres emplois possibles seront simplement évoqués.

## II. ESTIMATION DES PARAMÈTRES

Soit une suite quelconque de variables aléatoires  $x_i$  :

$$\text{moyenne estimée : } \bar{x} \approx E(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\text{variance estimée : } \hat{\sigma}^2 \approx E\{(x - E(x))^2\} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$\text{d'où écart-type } \hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2}$$

NB : Rappel pour programmeurs :

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E\{(x - E(x))^2\} = E\{x^2 - 2x E(x) + E^2(x)\} \\ &= E(x^2) - E^2(x) \\ \Rightarrow \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n} \sum x_i^2 - \frac{1}{n^2} (\sum x_i)^2 \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \hat{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1} \sigma^2$$

## III. PROPAGATION DES VARIANCES

On démontre que, pour toute relation linéaire (ou linéarisée) :

$$Y = AX + B,$$

la matrice de variance de Y résultant de la relation ci-dessus est donnée par :

$$V_Y = AV_X A' \quad (1)$$

$$\text{où } V_X = \begin{pmatrix} \sigma^2 x_1 & \sigma x_1 x_2 & \dots \\ 0 & \sigma^2 x_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

est la matrice de variance du vecteur  $\underline{X}$ .

Dans le cas d'une fonction linéarisée, cela ne reste vrai qu'à proximité du point de linéarisation (figure 1).

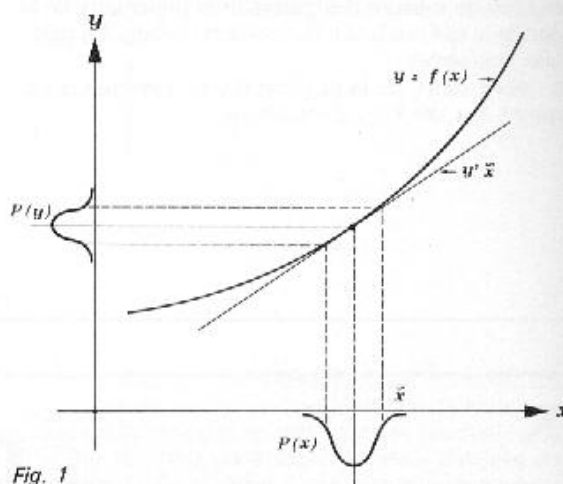


Fig. 1

Dans une compensation par les moindres carrés de la forme :

$$\underline{y} \text{ et } \underline{x} = A(\underline{X}_0 + \underline{\Delta X}) + A_0$$

la normalisation selon  $\|v\|$  minimum conduit à :

$$N \underline{\Delta X} = \underline{h} \text{ avec } \begin{cases} N = A' W_x^{-1} A \\ \underline{h} = -A' W_x^{-1} (A \underline{X}_0 + A_0 - \underline{y}) \\ W_x^{-1} = \text{matrice des poids} \end{cases}$$

d'où les inconnues :

$$\underline{\Delta X} = N^{-1} \underline{h}$$

En appliquant la relation (1) à cette forme linéaire, on trouve :

$$V \underline{\Delta x} = \hat{\sigma}_0^2 N^{-1} \quad (2)$$

où  $\hat{\sigma}_0^2$  ("facteur de variance") est issu des résidus après compensation :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{r} V' W_x^{-1} V = \frac{\{pVV\}}{r}$$

(r = redondance du système)

La "précision" des résultats d'une compensation se déduit donc de deux sources d'informations :

1.  $N^{-1}$  dépend de la configuration du réseau
2.  $\hat{\sigma}_0^2$  dépend des observations

La matrice variance des inconnues permet d'exprimer, directement ou indirectement :

- a) sur la diagonale, les variances des inconnues,
- b) avec les termes rectangulaires, les covariances, par lesquelles on peut exprimer des ELLIPSES D'ERREUR à deux dimensions ou des ellipsoïdes d'erreur à trois dimensions.

Ces ellipses sont une forme d'expression de la distribution des variables aléatoires gaussiennes (ou "variates")  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  d'un point compensé.

Une seule section de ce volume par un plan  $z = z_0$  peut, conventionnellement, exprimer des écarts-types sur les axes  $x$  et  $y$  (figure 2).

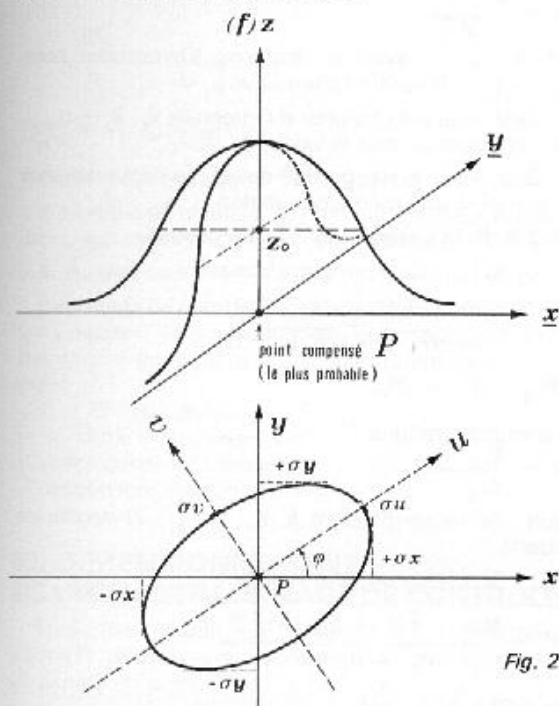


Fig. 2

La recherche des axes de l'ellipse ( $\sigma_u, \sigma_v$ ) se fait en exprimant les valeurs propres de la sous-matrice de variance du point considéré :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xp}^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yp}^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_u^2 & 0 \\ 0 & \sigma_v^2 \end{pmatrix}$$

La covariance est nulle dans le système ( $u, v$ ). Il faut prendre garde toutefois que des distorsions de cette estimation sont à craindre pour des systèmes peu redondants.

#### IV. INTERVALLES DE CONFIANCE

L'estimation d'un paramètre est toujours ponctuelle. Comment apprécier et évaluer les écarts possi-

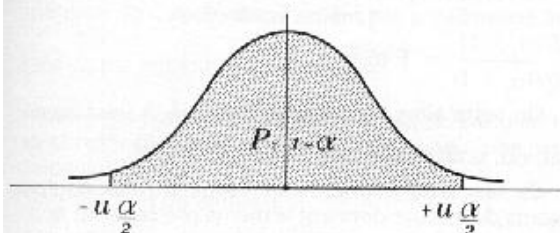


Fig. 3

bles autour de la valeur trouvée une première fois ?

La statistique fournit les distributions des paramètres et on peut donc connaître, pour une probabilité choisie, leur intervalle de variation :

$$P(p_1 < \tilde{p} < p_2) = 1 - \alpha = \int_{p_1}^{p_2} \frac{p_2 f(p)}{p_1} dp$$

$\alpha$  = seuil de confiance ou "niveau de signification"  
 $1 - \alpha$  = niveau de confiance (90 %, 95 % ou 99 %)

#### IV.1. Moyennes

##### IV.1.1. Si la variance $\sigma^2$ est connue

On forme la variable normale déduite :

$$u = \frac{\bar{x} - \mu}{(\sigma/\sqrt{n})}$$

L'intervalle, pour un risque  $\alpha$ , est :

$$\bar{x} \pm u_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}$$

$u_{\alpha/2}$  est issu de la loi Normale  $N(0, 1)$  (figure 3).

##### IV.1.2. Si la variance $\sigma$ est inconnue

On la remplace par son estimateur :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2$$

et on forme la variable  $t$  de Student :

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$$

qui suit la loi du même nom à  $(n-1)$  degrés de liberté  
intervalle  $\bar{x} \pm t_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}/\sqrt{n}$

##### IV.1.3. Applications

Dans les deux cas-ci-dessus, la moyenne "vraie" est inconnue. On peut seulement dire qu'elle se situe dans l'intervalle calculé avec la probabilité  $(1 - \alpha)$ .

Mais si l'on dispose d'un estimateur de (valeur d'étalonnage), ou valeur théorique nulle dans le cas des résidus d'une compensation, etc.), on peut ainsi "qualifier" l'écart trouvé en centrant l'intervalle sur la valeur donnée.

*Ceci permet de mettre en évidence le dérèglement d'un instrument ou un systématisme dans une compensation.*

##### IV.1.4. Exemples

a) Soit une distance mesurée quatre fois avec un distancemètre électro-optique dont la moyenne s'établit à 100.000 m avec un écart-type a priori supposé de 3 mm.

Pour  $\alpha = 5\%$ ,  $u_{\alpha/2} = 1.96$

$$P\left\{100. - 1.96 \frac{0.003}{\sqrt{4}} < \mu < 100. + 1.96 \frac{0.003}{\sqrt{4}}\right\} = 0.95$$

$$P\{99.997 < \mu < 100.003\} = 0.95$$

b) Si  $\hat{\sigma} = 0.003$  est l'écart-type d'échantillon (que l'on peut qualifier de maigre),

$t_{\alpha/2, 3} = 3.18$

$$P\{99.995 < \mu < 100.005\} = 0.95$$

c) Si  $D = 100.0000$  m est la longueur d'une base d'étalonnage et que la moyenne des quatre mesures ci-dessus ressort à 100.0025, un test unilatéral donnerait :

$$P\{\mu < 100.0025\} = 0.95$$

La constante peut être supposée nulle car il n'y a que cinq chances sur 100 que l'écart trouvé soit significatif.

#### IV.2. Variances

Une somme de carrés suit une distribution  $\chi^2$  de Pearson.

L'estimateur  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2$  de  $\sigma^2$  étant formé

par une somme de carrés, la quantité  $(n-1) \hat{\sigma}^2 / \sigma^2$  est distribuée suivant la loi  $\chi^2$  à  $(n-1)$  degrés de liberté. L'intervalle a pour limites :

$$\frac{(n-1) \hat{\sigma}^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}} \text{ et } \frac{(n-1) \hat{\sigma}^2}{\chi^2_{\alpha/2}}$$

Tout comme en IV.1., si l'on dispose pour  $\sigma$  d'un estimateur supposé meilleur que celui fourni par l'échantillon (écart-type donné par le constructeur d'un instrument, valeur issue d'un étalonnage sur une population plus importante, etc.), cette procédure devient comparative et permet d'apprécier les variations par rapport à une valeur plus probable.

En outre, si l'on prend pour  $\sigma^2$  la valeur  $(\sigma^2)_{\max}$  imposée par une spécification, la procédure devient absolue et permet de conclure à l'acceptation — ou au rejet — de la série d'observations considérée.

Exemple :

Pour un contrôle rapide de l'instrument précédent ( $\sigma$  a priori = 3 mm), on peut définir l'intervalle de confiance de  $n = 8$  mesures au niveau = 1 %.

$$\chi^2_{\alpha/2, 7} = 20.28 \quad \chi^2_{1-\alpha/2, 7} = 0.99$$

$$P\left\{\frac{7 \times 9 \text{ mm}^2}{20.28} < \hat{\sigma}^2 < \frac{7 \times 9 \text{ mm}^2}{0.99}\right\} = 0.99$$

$$P\{3.11 < \hat{\sigma}^2 < 63.64\} = 0.99$$

$$\text{soit } P\{1.8 \text{ mm} < \hat{\sigma} < 8 \text{ mm}\} = 0.99$$

Pour une appréciation plus sévère, il faudrait prendre un seuil plus significatif ( $\alpha = 10\%$  par exemple). Les valeurs trouvées ci-dessus pour  $\alpha = 1\%$  (probabilité 0.99) montrent clairement que l'écart-type expérimental de notre instrument issu d'un échantillon de seulement huit mesures, peut fluctuer assez largement autour de la valeur attendue.

### V. TESTS COMPARATIFS

#### V.1. Principes généraux

En présence de différences dans les paramètres de deux populations, toute décision implique une hypothèse initiale appelée "hypothèse nulle", notée  $H_0$ .

Pour deux valeurs  $p_1$  et  $p_2$  d'un même paramètre, la démarche habituelle est de considérer initialement que leur différence n'est pas significative :

$$H_0 : p_1 = p_2$$

Toute autre hypothèse est appelée "alternative" et sera notée  $H_a$ . On peut tester selon trois alternatives :

$$H_a : p_1 \neq p_2 ; p_1 > p_2 ; p_1 < p_2$$

De même qu'en IV., nous devons choisir un niveau de confiance  $(1-\alpha)$  nous donnant la probabilité de la justesse de la décision lorsque  $H_0$  est vrai.

En outre, nous pouvons introduire une probabilité  $\beta$  avec laquelle nous acceptons le risque de n'avoir

pas repéré un systématisme dans l'estimation de  $p_1$  ou de  $p_2$ .

Inversement, la fonction puissance  $(1-\beta)$  nous donne la probabilité de repérage de cette erreur systématique. Elle est également utilisable pour dimensionner l'échantillon de contrôle.

#### V.2. Comparaison de moyennes

##### V.2.1. Si la variance $\sigma^2$ est connue

La distribution de  $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$  est normale, a pour moyenne  $(\mu_1 - \mu_2)$  et pour variance  $\sigma^2_{1,2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$

On forme la variable réduite :

$$u = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\sigma^2_{1,2}}}$$

et on teste, avec le risque  $\alpha$ , l'hypothèse nulle  $(\mu_1 - \mu_2) = 0$  contre l'alternative  $\mu_1 \neq \mu_2$ .

Cela revient à chercher si l'intervalle  $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm u_{\alpha/2} \cdot \sigma_{1,2}$  contient ou non la valeur 0.

Si  $\sigma_1 = \sigma_2$ , le test permet de vérifier l'appartenance (ou non) à une même population.

##### V.2.2. Si la variance $\sigma^2$ est inconnue

On la remplace par son estimateur :

$$\hat{\sigma}^2_{1,2} = \frac{(x_1 - \bar{x}_1)^2}{n_1(n_1 - 1)} + \frac{(x_2 - \bar{x}_2)^2}{n_2(n_2 - 1)}$$

$$\hat{\sigma}^2_{1,2} = \hat{\sigma}^2_{x1} + \hat{\sigma}^2_{x2}$$

La variable réduite :

$$v = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\hat{\sigma}_{1,2}}$$

suit une loi de Student à  $(n_1 + n_2 - 2)$  degrés de liberté.

NB : Si  $\sigma_1 \approx \sigma_2$ , on peut former :

$$s^2 = \frac{\sum (x_1 - \bar{x}_1)^2 + \sum (x_2 - \bar{x}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$\hat{\sigma}_{1,2} \approx s^2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)$$

Dans les deux cas ci-dessus, on peut formuler comme hypothèse initiale que la différence trouvée est significative au niveau  $\beta$  :

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$$

En testant unilatéralement contre l'alternative  $\mu_1 - \mu_2 > \delta$ , on peut ainsi reconnaître ou réfuter un systématisme. En procédant par tâlonnement, en plusieurs essais, il est possible de déduire finalement la probabilité  $(1-\beta)$  de cette affirmation.

#### V.3. Comparaison des variances

Soient deux échantillons  $(n_1, \hat{\sigma}_1)$  et  $(n_2, \hat{\sigma}_2)$ .

La variable  $\hat{\sigma}_1^2 / \hat{\sigma}_2^2$  suit la loi F de Fischer-Snedecor si les échantillons ont même variance  $\sigma^2$ .

$$\frac{\hat{\sigma}_1^2 / (n_1 - 1)}{\hat{\sigma}_2^2 / (n_2 - 1)} = F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

On teste alors l'alternative  $\hat{\sigma}_1^2 / \hat{\sigma}_2^2 \neq 1$  (test bilatéral) ou, unilatéralement,  $\hat{\sigma}_1^2 > \hat{\sigma}_2^2$  ou  $\hat{\sigma}_1^2 < \hat{\sigma}_2^2$ .

Ce test peut permettre de savoir si deux équipements de mesure donnent la même précision ou non ou encore de juger si deux échantillons de contrôle peuvent être rattachés à une même famille.

Exemple :

Un contrôle par un nivellement précis des altitudes  $Z$  de points bien identifiés issus d'une feuille photogramétrique donne les résultats suivants :

échantillon 1 :  $\bar{\Delta}_1 = 0.10$  m  $\sigma_{\Delta_1} = 0.32$  m  
 échantillon 2 :  $\bar{\Delta}_2 = 0.07$  m  $\sigma_{\Delta_2} = 0.26$  m

Si  $\sigma = 0.28$  est la spécification, peut-on rejeter la zone d'échantillonnage N° 1 ?

$$\left. \begin{aligned} H_0 &= \sigma_{\Delta_1}^2 = \sigma_{\Delta_2}^2 \\ H_a &= \sigma_{\Delta_1}^2 \neq \sigma_{\Delta_2}^2 \end{aligned} \right\} \alpha = 5\%$$

$$K = \frac{\sigma_{\Delta_1}^2}{\sigma_{\Delta_2}^2} = 1.429$$

$$F_{\alpha/2, 7, 11} = 3.76$$

$F < K \Rightarrow H_0$  accepté avec  $P = 0.95$ .

Il y a donc 95 chances sur 100 que les deux échantillons appartiennent à une même famille.

#### V.4. Autres tests

Il en existe de nombreux, plus ou moins utiles. Certains peuvent être parfois nécessaires pour juger de la normalité gaussienne d'une distribution histogrammée :

- t et  $X^2$  (déjà cités),
- symétrie et aplatissement,
- irrégularités de classes,
- fréquences marginales.

## VI. DIMENSIONNEMENT DE L'ÉCHANTILLONNAGE DE CONTRÔLE

Après avoir établi que la sûreté d'un estimateur s'accroît pour  $n \rightarrow \infty$ , la littérature semble plutôt sibylline à ce sujet.

### VI.1.

Une première méthode, issue de la loi des grands nombres, utilise l'inégalité de Tchebychev :

Pour toute valeur  $\varepsilon > 0$  et  $0 < \delta < 1$ , il existe un entier  $n$  tel que pour tout  $m \geq n$  :

$$P(|\bar{x}_m - \mu| < \varepsilon) > 1 - \delta$$

étant l'incertitude.

$$\text{En posant } \delta = \frac{1}{\alpha^2} \text{ et } \varepsilon = \alpha \frac{\sigma x}{\sqrt{n}}$$

$$P\left\{ -\frac{\alpha \sigma x}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} - \mu \leq +\frac{\alpha \sigma x}{\sqrt{n}} \right\} \geq 1 - \frac{1}{\alpha^2}$$

(inégalité de Tchebychev)

$$\text{Il vient, par substitutions : } m \geq \frac{\sigma^2 x}{\alpha^2 \varepsilon^2}$$

Cette dernière formule peut servir à calculer le nombre de séries nécessaires à l'obtention d'une précision souhaitée.

Dans le cas d'un contrôle :

$\Delta_1$  = mesuré - contrôlé (dimension  $n$ )

$\bar{\Delta}$  = moyenne des  $\Delta_i = \varepsilon$

$\sigma_n$  = écart-type des mesures initiales  
 $\sigma_c$  = écart-type du contrôle

$$\sigma_{\Delta} = \sqrt{\sigma_n^2 + \sigma_c^2}$$

Pour que l'échantillon soit suffisant par rapport à  $\varepsilon$ ,

avec une incertitude  $\delta$ , il faut que :  $m \geq \frac{\sigma_{\Delta}^2}{\delta \cdot \varepsilon^2}$

Ceci permet de confirmer l'écart moyen  $\bar{\Delta}$  constaté.

### VI.2.

Une autre méthode utilise la fonction puissance des tests u et t pour confirmer ou infirmer la différence de 2 moyennes (figure 4) :

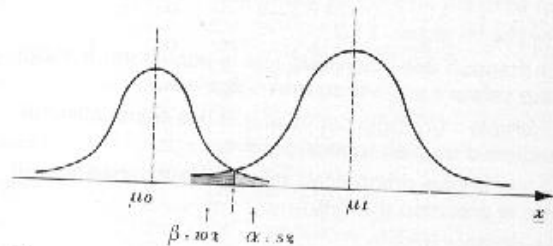


Fig. 4

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_0| \approx |\mu_1 - \mu_0| = \delta$$

Exemple :

$$\text{Soit } \mu_1 = 26, \mu_0 = 24, \sigma = 3.$$

Quel est le nombre de valeurs nécessaire pour confirmer  $\delta = 2$  avec  $\alpha = 5\%$  (population à contrôler) et  $\beta = 10\%$  (échantillon).

$$u_{(\alpha)} = 1.64 \quad u_{(\beta)} = 1.28$$

$$l = 24 + 1.64 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 26 - 1.28 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$+2\sqrt{n} = d(1.64 + 1.28) = 3 \times 2.92$$

d'où  $n \approx 19$

### VI.3.

Pour le contrôle des variances, deux faits peuvent être considérés :

- $x^2 \rightarrow N(\mu, \sigma)$  pour  $n \rightarrow \infty$
- pour  $n$  "grand" (terme mal défini dans les références de l'auteur),

la variable  $u = (\hat{\sigma}_1^2 - \hat{\sigma}_2^2) / \sqrt{\sigma_1^2/2n_1 + \sigma_2^2/2n_2}$  est une variable normale réduite. On tiendra donc le même raisonnement que pour la comparaison de deux moyennes (test u).

## VII. STATISTIQUES D'ORDRE (1)

Ces statistiques expriment des fonctions des observations tenant compte de leur **ordre** ou de leur **valeur**.

On forme une suite croissante des observations  $x_i$  de l'échantillon :

$x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_n$   
 dont on retient les valeurs extrêmes  $x_1$  et  $x_n$ , ainsi que l'étendue  $R = x_n - x_1$ .

Par des fonctions linéaires de l'échantillon



ordonné, la statistique peut définir la distribution théorique de chaque rang (ordre  $i$ ).

Diverses applications ont été développées pour l'étude de la sécheresse, de l'écoulement des fluides, de la fatigue des matériaux. On peut en tirer profit pour certaines évaluations liées à la topométrie. Les exemples ci-dessous sont extraits d'un article du Prof. Bachmann (ref. 1).

### VII.1. Distribution de $x_n$

$$P(x_n < v) = P(x_1 \text{ et } x_2 \text{ et } \dots \text{ et } x_n < v) \\ = P(x_1 < v) \times P(x_2 < v) \dots P(x_n < v)$$

$$P(x_n < v) = \{f_{vi}\}^n$$

La probabilité de l'évènement  $x_n < v$  est entièrement déterminée par la fonction de distribution de la population  $X$ .

En se fixant un seuil de confiance, on montre que :

$$P\{F(x_n) > \beta\} = 1 - \beta^n$$

La fraction des "individus" de la population  $X$  ayant une valeur  $x < x_n$  est au moins égale à  $\beta$ .

Exemple : Contrôle par 46 points des écarts planimétriques d'un plan topographique.

$x_n$  est le plus grand écart trouvé. Nous renseigne-t-il sur la précision du levé ?

Hypothèse initiale :

$H_0$  : 95 % des erreurs de tout le levé ont une valeur  $x < x_n$

$$P(H_0 \text{ vrai}) = 1 - \beta^n = 1 - (0.05)^{46} \approx 91 \%$$

Il y a 91 % de chances qu'au moins 95 % des erreurs  $X_i$  du levé soient inférieures ou égales à l'écart maximum  $x_n$  du contrôle.

### VII.2. Distribution de l'étendue réduite

$$R = x_n - x_1$$

$$r = \frac{1}{\sigma} R = \frac{1}{\sigma} (x_n - x_1)$$

$$P(r) = n \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \left\{ \int_x^{+\infty} f(u) \cdot du \right\}^{n-1} \cdot dx$$

Ceci permet d'accepter ou de rejeter les grandes dispersions.

Exemple : Angle répété neuf fois avec  $\sigma = 3$  cc

$R = x_n - x_1 = 12$  cc est-il acceptable ?

$P\left(\frac{1}{\sigma} R\right) = 0.893$  soit une chance sur neuf de dépasser. L'écart de 12 cc est donc acceptable.

## VIII. AUTRES MOYENS, AUTRES SUJETS

### VIII.1. Déviation systématique des observations

Outre les moyens exposés en V.2., on peut signaler l'existence de la méthode des différences successives ou critère d'Abbe (4).

$$q^2 = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2$$

$$\delta^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$r = q^2 / \delta^2$$

Pour  $n > 20$  — loi normale

$$P(r < t_\alpha) = \alpha$$

### VIII.2. SYSTÉMATISMES COMPLEXES (2, 4, 5)

Pour les courbes, surfaces, vecteurs de déformation, etc, connus ponctuellement, formuler (par régression) une loi mathématique sur la "tendance" du phénomène.

Tester ensuite la validité de cette loi ( $\sigma^2$  écarts, ou coefficient de corrélation de la régression). Le moyen suprême en la matière est le "filtrage par moindres carrés" qui exprime la fonction de covariance des observations. Une application remarquable de cette méthode permet d'exprimer la déformation des films aériens (5).

### VIII.3. "Lissage" d'observations

Il utilise les mêmes moyens qu'en VIII.2. pour résorber les écarts relatifs.

Au CERN, sur les accélérateurs de particules, on effectue une mesure indépendante de ces écarts relatifs puis la résolution sous une double condition de minimum :

$$(\|v\| \text{ et } \|dR\|) \text{ mini.}$$

### VIII.4. Collocation par moindres carrés (5)

Il s'agit de la combinaison des techniques d'ajustement, d'interpolation et de filtrage.

La méthode permet de se "situer" mathématiquement sur des surfaces complexes avec le meilleur rapport signal/bruit possible.

## IX. RÉFÉRENCES ET BIBLIOGRAPHIE

Hormis certaines méthodes particulières ou relativement récentes, qui sont directement citées en référence dans le texte, tous les moyens exposés dans cet article ressortent de la Statistique Générale et peuvent être trouvés dans de nombreux cours et ouvrages.

Les sources utilisées pour cette présentation sont mentionnées ci-dessous :

- (1) W.K. Bachmann - "Estimation stochastique de la précision des mesures", Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie, Fachheft 4/73, décembre 1973.
- (2) Centre d'Actualisation Scientifique et Technique (CAST) - "Cours de statistiques de l'ingénieur", 1974, 2<sup>e</sup> édition.
- (3) International Institute for Aerial Survey and Earth Sciences (ITC) -
  - a) "Statistique élémentaire", J. Kure, M. Tiensstra, J.A. de Sousa, Delft, 1967.
  - b) "Introduction à la théorie des observations", E.P. Bosman, Delft, 1967.
- (4) Y.V. Linnik - "Méthode des moindres carrés", Dunod, 1963.
- (5) E.M. Mikhail - "Observations and least squares", Harper & Row, New York.
- (6) Tables statistiques diverses - ne pouvant être reproduites dans cet article - disponibles dans toute librairie technique.