mieux que la clothoïde la spirale adoucie

Claude Million

L'exposé s'appuiera sur une représentation unique des caractéristiques des raccordements des voies par des courbes, à savoir :

1° En abscisses, le développement de la courbe c'est-à-dire la distance du point courant à l'origine de la courbe, et, plus généralement, comme une droite est une "courbe" de courbure nulle, depuis une origine arbitraire. Soit S cette abscisse, avec, en indice o pour le cercle, c pour la clothoïde, et s pour la spirale adoucie.

2° En ordonnées, trois valeurs, représentées à des échelles différentes, de telle sorte qu'un graphe unique puisse les illustrer toutes les trois. Ces trois valeurs sont :

A/ La courbure C, soit 1/R en m^{-1}.

B/ Le dévers d_v, qui est une pente, et, en multipliant le dévers par la moitié de la largeur de la voie, la cote du bord haut, et la cote du bord bas de la voie.

C/ La déflexion Δ, c'est-à-dire l'angle, mesuré en radians, entre deux tangentes à la courbe, séparées par une distance fixe ΔS.

Cette représentation n'a d'autre intérêt que de faire comprendre au lecteur ce que l'on va faire. Elle se justifie de la manière suivante :

Le dévers d_v est calculé de telle sorte, qu'en courbe, le véhicule s'appuie normalement à la voie déversée.

L'accélération transversale due à la force centrifuge est donnée par la relation :

$$\gamma = \frac{V^2}{R}$$

dans laquelle V est la vitesse du véhicule donnée en m/s de telle sorte que les unités soient les mêmes pour γ et g (accélération de la pesanteur) afin de γ calculer le dévers par :

$$\frac{\gamma}{g} = \frac{V^2}{R.g} = C.\frac{V^2}{g}$$

On voit que le dévers d_v peut être représenté, à l'échelle près, sur le même graphe que la courbure C.

Enfin la déflexion δ étant l'angle entre les tangentes à deux points de la courbe séparés par une distance développée constante ΔS, la courbure locale est :

$$R.\delta = \Delta S \qquad C = \frac{1}{R} = \frac{\delta}{\Delta S} \qquad \delta = C.\Delta S$$

$$\delta = c.ds \qquad \frac{\delta}{ds} = c$$

On voit que la déflexion δ peut être représentée, à l'échelle près, sur le même graphe que la courbure C.

Ceci étant admis, tout ce qui va suivre est extrêmement simple :

Sur la *figure 1* on a représenté le raccordement de deux alignements de courbure nulle, des alignements droits, avec un arc de cercle. On remarque immédiatement que si on respecte la condition de dévers le véhicule doit franchir une véritable "marche" due au passage brusque entre les alignements droits et l'arc de cercle.

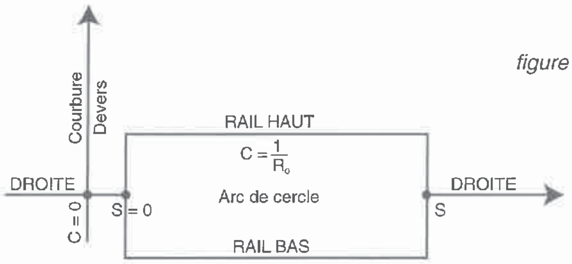


figure 1

Sur la *figure 2* on a résolu le problème en utilisant une courbe dont la courbure est croissante ou décroissante en fonction de son développement S, elle permet de raccorder les alignements droits (courbure nulle) au cercle (courbure constante) par une telle courbe qui est une clothoïde, appelée spirale par les Américains pour spirale de Cornu, certains mathématiciens l'appellent, aussi, radioïde aux arcs. Mais on voit qu'on a seulement dédoublé le problème, car aux points de raccordement il reste un problème mécanique dû à la variation brusque du dévers. Dans la pratique on s'en tire en trichant.

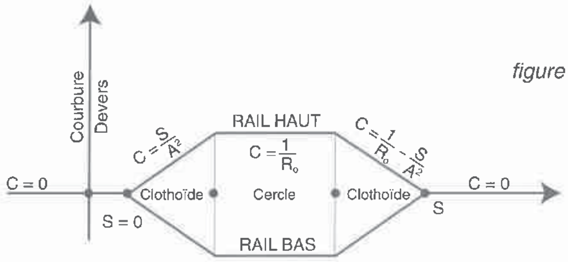
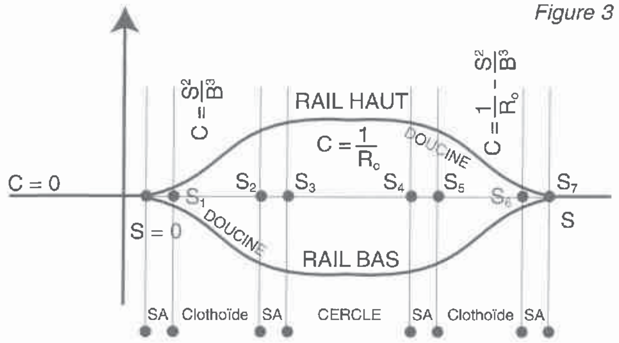


figure 2

LES DOUCINES

En effet, les raccordements brusques en dévers sont "arrondis" par des doucines, voir *figure 3*. Certains ouvrages disent que ces courbes sont des sinusoïdes, ce sont, comme on le verra plus loin, plutôt des cosinusoïdes et même des arcs de parabole.

Figure 3



LA SPIRADE

Mais alors, il n'y a plus "adéquation" entre le dévers et la courbure, ce qui provoquera un effort sur le rail extérieur et déséquilibrera les passagers dans le véhicule, on proposera donc de remplacer, au droit des doucines, l'arc de clothoïde par une spirale adoucie, pour faire plus court on l'appellera spirade.

Mais allons plus loin, l'arc de clothoïde est-il le seul à permettre de résoudre le problème des raccordements progressifs en plan ? En d'autres termes, une variation linéaire de la courbure avec le développement de la courbe est-elle une condition absolument nécessaire ?

On a partiellement répondu à cette question en montrant que la spirade peut raccorder une clothoïde et une droite et une clothoïde et un cercle ; mais une spirade peut se raccorder directement avec une autre spirade, alors la clothoïde serait réduite à un point.

LA CLOTHOÏDE

Toutefois, pour passer du connu à l'inconnu on va faire quelques rappels concernant la clothoïde, aidé en cela par un article paru dans cette même Revue XYZ N° 16 (Jose F. Zelasco : *Clothoïde unique de raccordement entre deux circonférences pp 11-20*) [1]. En effet, on se servira de la clothoïde supposée connue comme point de départ pour décrire la spirade.

Une définition lapidaire de la clothoïde résulterait de la relation :

$$R.S = A^2 \qquad C = \frac{S}{A^2}$$

On voit que la courbure C est proportionnelle au développement S, le coefficient de proportionnalité étant $1/A^2$. A a la dimension d'une longueur, mais ce n'est pas la longueur du raccordement.

On va considérer, maintenant, la clothoïde réduite ou clothoïde unitaire, on pose :

$$\frac{R}{A} = r \qquad \frac{S}{A} = s \qquad C.A = c \qquad c = s$$

On ne peut guère trouver plus simple pour la décrire que c = s ou r.s = 1.

On prend pour origine x = 0 ; y = 0 le point ou la courbure c de la clothoïde s'annule, et pour origine des tangentes à la courbe l'axe des x ; x = 0 est, également, l'origine des développements réduits s, avec s = c = 0 (coordonnées, courbures et développements unitaires). On va chercher une expression des tangentes successives à cette courbe, on pose Δ, déflexion totale, l'angle, en radians, entre l'axe des x et ces tangentes :

$$\frac{\partial \Delta}{\partial s} = s \qquad \frac{\partial \Delta}{\partial s} = \delta \qquad \delta = s$$

d'où : $\Delta = \dfrac{s^2}{2}$ pour $s = 1, \Delta = 57°18'$

On peut écrire l'équation de la clothoïde unitaire en remarquant successivement que :

$$dx = \cos \Delta.ds$$
$$dy = \sin \Delta.ds$$

puis $dx = \cos \dfrac{s^2}{2}.ds$

$$dy = \sin \frac{s^2}{2}.ds$$

Les coordonnées de la clothoïde unitaire sont calculées par les intégrales de FRESNEL :

$$x = \int_0^s \cos \frac{s^2}{2}.ds$$

$$y = \int_0^s \sin \frac{s^2}{2}.ds$$

On passera rapidement sur l'intégration qui se fait à partir des développements en série du sinus et du cosinus qu'on ne reproduira pas ici, ils se trouvent dans l'article cité ; on n'insistera donc pas non plus sur ce point parce qu'on fera le calcul des coordonnées des points d'une toute autre façon afin d'éviter des complications qui seront signalées. Toutefois, ces relations nous sont indispensables pour étudier les raccordements entre les différentes courbes au niveau de l'avant projet, on a :

$$x_m = s - \frac{s^5}{40} + \frac{s^9}{3456} - \frac{s^{13}}{599040} + ...$$

$$y_m = \frac{s^3}{6} - \frac{s^7}{336} + \frac{s^{11}}{42240} - \frac{s^{15}}{9676800} + ...$$

$$X_m = A.x_m$$
$$Y_m = A.y_m$$

Pour un avant-projet, dans les tâtonnements de mise en place sur le plan, on peut s'en tenir aux premiers termes. Pour la spirade on verra qu'il en est de même.

Le raccordement progressif ne doit pas se faire trop brutalement, sinon à quoi servirait-il ? Mais cela reste un terme vague ; matériellement il faut déterminer la longueur de ce raccordement, soit S_c cette longueur. Pendant le parcours de la clothoïde le véhicule s'incline progressivement d'un mouvement uniforme de rotation autour de son axe longitudinal de $d_v = 0$ à $d_{v\,max}$ au raccordement avec le cercle. Ce mouvement ne doit pas se faire trop rapidement, apparemment la limite admise est d'environ :

$$\frac{\partial d_v}{\partial t} = 0,01 radian/seconde$$

En d'autres termes 1 % de dévers gagné, ou perdu, par seconde. Des données plus récentes pourront être substituées aux valeurs numériques données qui sont probablement "datées".

On saisit mieux la nécessité dans laquelle on est d'employer des doucines En effet, ce mouvement de rotation uniforme doit être accéléré ou ralenti. Par effet d'inertie polaire du véhicule ce mouvement ne peut apparaître, ou disparaître, brusquement sans être précédé d'une accélération ou suivi d'une décélération. Les doucines utilisées à cette fin réduisent le dévers, d'où la nécessité d'adapter le tracé en plan au dévers réduit, cette adaptation est une spirade.

On admet un rayon minimum des courbes de raccordement, donc des cercles raccordés par des clothoïdes, en partant de la vitesse de base et du dévers maximum autorisé. Ce dévers maximum tient aux risques de déformation de la voie en cas d'arrêt imprévu du véhicule, et de l'inconfort des passagers qui résulterait du stationnement en pente ; il varirait de 10 à 16 %, si :

$$d_v = \frac{V^2}{R.g}; R_{min} = \frac{V^2}{d_{vmax}.g}$$

connaissant la vitesse de base et le dévers maximum on peut déterminer les éléments permettant de faire le tracé. Parfois, on donne, inutilement à notre avis, une relation trop compliquée qui se justifie par ce qui va suivre :

$$\frac{\partial d_v}{\partial t} = \frac{d_{v\max}}{t}; t = \frac{S_c}{V};$$

$$\frac{\partial d_v}{\partial t} = \frac{V^2.V}{R_{\min.g.S_v}}$$

$$S_c = \frac{V^3}{R_{\min}.g.\frac{\partial d_v}{\partial t}}$$

En fait, la longueur de raccordement S_c est directement proportionnelle à la vitesse de base V et au dévers d_v. C'est la distance parcourue à la vitesse V pour atteindre le dévers maximum $d_{v\,max}$ à la vitesse de 1 % ou x % par seconde.

Les raccordements doivent se faire en courbure, c'est évident, mais aussi en tangentes aux courbes, et en coordonnées. Toutes ces conditions ne peuvent pas être réalisées simultanément, la dernière, notamment, oblige à décaler les tangentes successives aux courbes en conservant le gisement de l'alignement droit. Il en résulte de petites difficultés de calcul qu'on va contourner.

La tangente à la clothoïde est donnée par :

$$\Delta_c = \frac{S_c^2}{2}; \Delta_c = \frac{S_c^2}{2.A^2},$$

En ce point la courbure sera c = s, C.A = s ou A = s.R_o avec R_o rayon du cercle raccordé. Enfin, on calcule S_c, d'où s_c puisque A est connu. Donc, avec S_c et R_o fonctions, toutes deux, de la vitesse de base V tous les éléments minimaux (on peut leur donner des valeurs supérieures) de la clothoïde sont définis. L'avant projet devra les rendre compatibles avec les contraintes du terrain.

LES RACCORDEMENTS EN SPIRADE

L'équation de la spirade sera imposée par celle de la doucine. Or la doucine a pour objet d'accélérer la variation de dévers, admettons qu'on veuille assurer une variation uniforme, c'est-à-dire une accélération ou une décélération constante en fonction de S ; ceci revient, si V est constante, à créer une accélération ou une décélération constante en fonction du temps, soit :

$$\frac{\partial^2 d_v}{\partial t^2} = 0,025 rad\sec^{-2} = \omega$$

par conséquent $\frac{\partial d_v}{\partial t} = \omega.\frac{S}{V}$, si $\partial t = \frac{\partial S}{V}$

enfin, $d_v = \frac{\gamma.S^2}{2.V^2}$

En ce point, la courbure sera :

$$C_c = \frac{d_v.g}{V^2} = C_s = \frac{\gamma.g}{2.V^4}.S_s^2$$

avec S_s développement de la spirade, C_c courbure de la clothoïde et C_s courbure de la spirade.

On donnera une formule de spirade unitaire se raccordant à la clothoïde unitaire en un point quelconque choisi, tel que c = s, donc avec une pente unité. On définit un terme d'échelle B, identique au terme A, et ayant la dimension d'une longueur, on a alors :

$$\frac{R_s}{B} = r; C_s.B = c; \sigma = \frac{S_s}{B};$$

$$c = \frac{\sigma^2}{2}; r.\sigma^2 = 2; \delta = c = \frac{\sigma^2}{2}$$

$$C_s = \frac{S_s^2}{2.B^3}; \frac{\partial \Delta}{\partial \sigma} = \frac{\sigma^2}{2}; \Delta_s = \frac{\sigma^3}{6}$$

$$\Delta_s = \frac{S_s^3}{6.B^3}$$

Les coordonnées réduites de la spirade, qui ne serviront que pour l'avant projet, sont esquissées ci-après :

$$x_m = \sigma - \frac{\sigma^7}{360} + \frac{\sigma^{13}}{404352} - \ldots$$

$$y_m = \frac{\sigma^4}{24} - \frac{\sigma^{10}}{5880} + \frac{\sigma^{16}}{11664000} - \ldots$$

CALCULS DES ALIGNEMENTS, SPIRADES, CLOTHOÏDES ET CERCLES, PAR UN SEUL INTÉGRATEUR

On simplifiera grandement le travail (*Voir annexe*), en éliminant le calcul du décalage des tangentes de courbe en courbe, en se servant de l'ordinateur comme d'un intégrateur. On se reportera à la *figure 4* qui illustre la méthode d'implantation d'un arc de cercle par les sécantes successives ; en fait, pour calculer les coordonnées des points, on imitera directement cette méthode. On notera donc qu'on ne passe donc pas par les développements en séries qui imposeraient de calculer les décalages des tangentes, sauf dans le cas particulier de [2].

Par conséquent, pour les calculs informatiques des coordonnées des différents points en alignement, spirades, clothoïdes et cercles, on utilisera les intégrales de FRESNEL discrétisées et placées dans le système général de coordonnées :

La formule générale sera :

$$X = X_0 + \sum_0^n \sin(G_0 + \Delta).\Delta S$$
$$Y = Y_0 + \sum_0^n \cos(G_0 + \Delta).\Delta S$$

Avec :

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} + \delta_{n-1,n}.\Delta S, \Delta \text{ en radians}$$
$$\delta_{n-1,n} = \delta_{n-2,n-1} + \delta'_{n-1}.\Delta S, \delta \text{en } rad/m$$
$$\delta'_{n-1} = \delta'_{n-2} + \delta''_{n-2,n-1}.\Delta S, \delta' \text{en } rad/m^2$$
$$\delta''_{n-2,n-1} = constante \text{ en } rad/m^3$$

Pour un alignement :

Δ = Constante ; δ = 0 ; δ' = 0 ; δ'' = 0

Dans un cercle :

Δ = variable ; δ = constante ; δ' = 0 ; δ" = 0

Dans une clothoïde :

Δ = variable ; δ = variable ; δ' = constante ; δ" = O

Dans une spirade :

Δ = variable ; δ = variable ;
δ' = variable ; δ" = constante

La formule est construite pour passer d'une courbe à l'autre en ne modifiant qu'un paramètre d'incrémentation en respectant toutes les conditions de continuité. Le calcul et le tracé sur écran sont maîtrisés par le calculateur en fonction de grossières données d'avant-projet. Voir [2] pour la clothoïde, et [3] pour la spirade. On donnera en annexe un exemple de calcul d'avant projet, avec décalage des tangentes.

CONCLUSIONS

On a proposé et décrit une nouvelle courbe de raccordement progressif, la spirade, qui évite les accélérations transversales dans les entrées et sorties des clothoïdes. Le calcul des coordonnées des points des différentes courbes et alignements s'enchaîne dans un seul programme informatique, on évite ainsi quelques complications géométriques. On pourrait même se passer de la clothoïde et raccorder des spirades entre elles.

BIBLIOGRAPHIE

[1] 1986 – Jose. F ZELASCO : *Clothoïde unique de raccordement entre deux circonférences*, XYZ N° 16.

[2]1990 – Von H. HECKMANN : *Ein Algorithmus zur Trassenterechnung auf E. D. V-Anlagen*, Algemeine Vermessung Nachrichten N° 1.

[3] 1991 – C. MILLION : *La clothoïde dans tous ses états*, GeoTop.

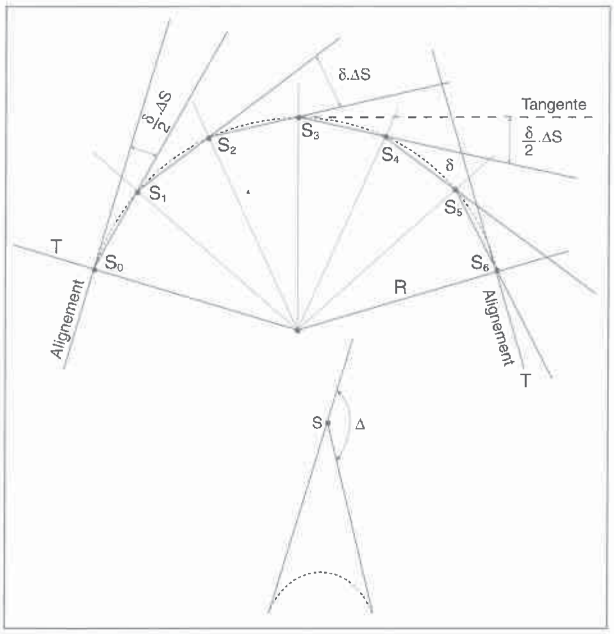
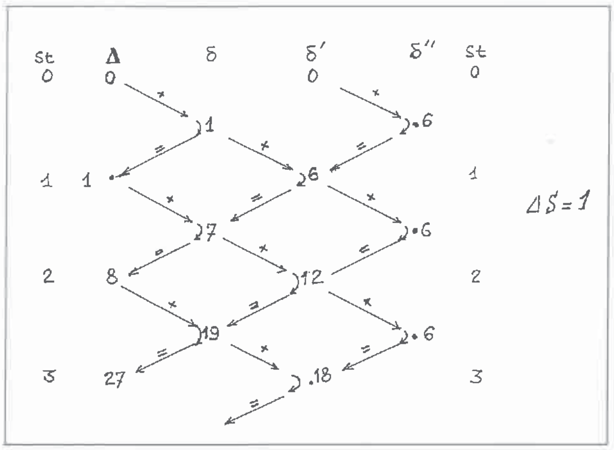


Figure 4



Exemple de calcul

Figure 5

email. : claude.million@wanadoo.fr

La disquette de démonstration est disponible chez l'auteur.