

# le positionnement astronomique par la méthode du Plan des Sommets

2<sup>ème</sup> partie

OU



comment  
revisiter  
"l'Astro"  
avec  
l'expérience  
du GPS

Yves Robin-Jouan (*Locbat*)

La méthode du Plan des Sommets, développée en 1995, publiée en 1996 [1], a conquis depuis un certain nombre d'adeptes et même de fervents partisans. Et ceux-ci ne sont pas uniquement des fanatiques de croisière à la voile ou des nostalgiques du sextant ! À des fins pédagogiques, les Écoles de deux Marines Nationales se sont intéressées à cette méthode novatrice, qui remet en cause, sans irrévérence, les vieilles habitudes héritées de Marcq de Saint Hilaire (1872) et redéploie pour la navigation Astro un peu de l'arsenal algorithmique mis au point dans le domaine du GPS (Global Positioning System).

La méthode du Plan des Sommets renoue avec le projet de Cornelis DOUWES (1747) d'une méthode directe, sans recours à la notion de position estimée ou arbitraire. Elle emprunte à la navigation moderne, et notamment à la mouvance du GPS, une approche en 3 Dimensions (3D), qui s'affranchit de la surface de la terre, et une formulation en coordonnées cartésiennes qui exploite au maximum l'algèbre linéaire (calcul vectoriel et matriciel).

Le traitement de l'incertitude fait largement appel aux techniques de moindres carrés (Least Mean Square) sur des principes proches de ceux utilisés par les récepteurs GPS les plus sophistiqués, dits à « contrôle autonome d'intégrité » (RAIM).

La première partie de l'article (n°75) se proposait de rappeler les principes de la méthode, d'en discuter la validité et la précision, et de présenter une série de confrontations avec les méthodes conventionnelles. Dans cette seconde partie, le progiciel ASTROLAB, qui intègre la méthode du Plan des Sommets dans un environnement complet de navigation, sera utilisé pour tous les exercices numériques.

## 7. PRESENTATION DU PROGICIEL ASTROLAB

ASTROLAB est un progiciel de navigation astronomique complet, autonome et convivial. Il exploite directement la méthode du Plan des Sommets pour le calcul du point. Il intègre ses propres éphémérides pour le soleil, les planètes (dont la lune), 17 étoiles de magnitude utilisable et... le point vernal. Les éphémérides tiennent compte des termes séculaires et des principales perturbations au sein du système solaire, avant de résoudre l'équation de KEPLER puis de repasser en coordonnées géocentriques, avec correction de la précession et de la

nutation. Elles sont pratiquement perpétuelles, sauf pour la lune, dont la complexité justifie un recalage tous les 5 ans environ.

Ce progiciel comprend cinq programmes exécutables, dont un menu, et une structure de Base de Données. Voici quelles sont les principales fonctions assurées, à la demande, par ASTROLAB :

- Saisie et filtrage automatique des relevés ;
- Calcul d'éphémérides (angle horaire et déclinaison) ;
- Archivage et édition des relevés & résultats ;
- Transport automatique des observations ;
- Calcul du point Astro par n observations ;
- Calculs traditionnels (méridienne, droite de hauteur) ;

- Recalage d'estime ;
- Calcul de route orthodromique.

ASTROLAB est livré sous forme de code compact, exécutable par tout processeur INTEL x 86 ou compatible. Il tourne indifféremment sous DOS ou sous WINDOWS (3.x ou 95), avec un PC de bureau ou un portable. Il peut être téléchargé dans un HPC (H comme « Handheld ») ou un « palm-top », qui ont l'avantage de procurer une meilleure autonomie, sur de simples piles (6 semaines en usage normal).

Le volume global d'ASTROLAB, avec ses fichiers de tests et sa documentation intégrée, est de l'ordre de 400 kilo-octets. Il existe une version minimale à moins de 200 kilo-octets.

## 8. CONFRONTATION AVEC LA MÉTHODE TRADITIONNELLE SUR UN CAS TEST THÉORIQUE

Le champ des exercices possibles est immense. Le test choisi est un cas théorique « préfabriqué », c'est-à-dire correspondant à une configuration simple, façonnée artificiellement à la main. Seul le calcul du point Astro est sollicité par ce cas test (et non les éphémérides).

### Énoncé du cas test :

Au même instant, trois objets célestes sont supposés relevés par un observateur, avec strictement la même hauteur  $h_o$  : un des « pieds » est situé sur le méridien de Greenwich; les deux autres « pieds » sont situés sur l'équateur, à  $15^\circ$  de part et d'autre du méridien de Greenwich.

Le premier objet est positionné de telle sorte que sa déclinaison égale la hauteur observée, soit :  $h_o = 58^\circ 49,563'$  (cas très particulier, où le cercle de hauteur passe par le pôle). Quelle est la position de l'observateur ?

### Solution théorique :

Le point théorique est sur le méridien de Greenwich, à  $27^\circ 39,126'N$  (soit  $2.h_o - 90^\circ$ ), c'est-à-dire à environ 120 km sur la piste au N de Reggane, dans le Sahara. (cf. fig. 5)

### Résolution par la méthode du Plan des Sommets :

Après saisie des données (et des commentaires), ASTROLAB délivre les tableaux de chiffres suivants, où le symbole # désigne les grandeurs indifférentes vis-à-vis de ce cas test :

N°	Date	Heure TU	Long. esti.	Lat. estim.	Haut. sext.	Haut. corri.	GHA	Déclin
3	#	#	#	#		$58^\circ 49.56'$	$345^\circ$	$0^\circ$
2	#	#	-	-		$58^\circ 49.56'$	$15^\circ$	$0^\circ$
1	#	#	-	-		$58^\circ 49.56'$	$0^\circ$	$58^\circ 49.56^\circ$
N°	Long. calc.	Lat. calcul.	Ecart	Commentaires				
3				OBJ3- Cas test (haut = Dec1)				
2				OBJ2- Cas test (haut = Dec1)				
1				OBJ1- Cas test (haut = Dec1)				

N° d'OBSERVATIONS choisies dans le FICHIER ?	1, 2, 3
Calcul instancié à la DERNIERE OBSERVATION	CAS GENERAL SUR-CONDITIONNE
PREDICTION Latitude = $27^\circ 39.13'N$ Longitude = $0^\circ W$ Altitude = 0 Naut	CORRECTION et RESULTATS Latitude = $27^\circ 39.13'N$ Longitude = $0^\circ W$ Rayon incertitude = 0.0 Naut
ECART PT CALCULE à PT ESTIME = #	

Le résultat est bien celui attendu, et il est atteint dès l'étape de prédiction, puisqu'aucune incertitude n'affecte les observations.

### Résolution par la méthode de Marcq de Saint Hilaire :

Pour traiter le problème, la méthode traditionnelle a besoin d'un point d'appui. Si l'on choisit une position arbitraire à moins d'un octant de la cible, par exemple  $41^\circ 46'N$  et  $50^\circ 14'W$  (la position du naufrage du Titanic dans l'Atlantique), le report des azimuts et intercepts sur une carte à petite échelle (telle que la carte de la route du Rhum, SHOM N° 6561) conduit à un « chapeau » d'incertitude énorme !

La configuration résultante des 3 droites de hauteur vues du Titanic est esquissée sur la figure 5. Un calcul analytique adéquat révèle un barycentre de longitude très erronée (il est sur Ténérife!), et un rayon d'incertitude de 485 nautiques!

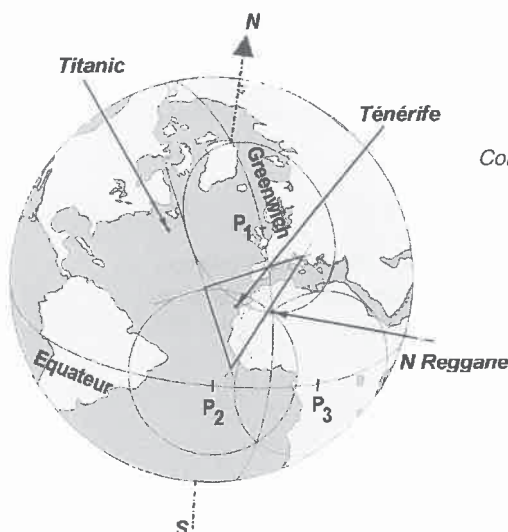


Fig. 5  
Confrontation  
avec  
Marcq de  
Saint Hilaire  
sur  
un cas  
théorique

Ce n'est pas surprenant, puisque la méthode de Marcq de Saint Hilaire est une simple méthode différentielle, qui ne peut s'accommoder de trop forts écarts géographiques. En pratique, on peut vérifier que le résultat se rapproche du point théorique, si l'on prend un point estimé dans les sables rouges entre Timimoun et Reggane. La vieille « règle du pouce » se vérifie alors grossièrement : 1 nautique d'erreur sur la position calculée pour 30 nautiques d'erreur sur l'estime.

## 9. CONFRONTATION AVEC LA SOLUTION DU PROBLÈME DE DOUWES EN CORDONNÉES SPHÉRIQUES

Bon nombre de solutions ont été proposées pour le problème de Cornelis DOUWES, en coordonnées sphériques

liées à la terre. La première est réputée remonter à 1869, avant même l'introduction de la méthode simplificatrice de Marcq de Saint Hilaire. Un aboutissement moderne est l'approche élégante présentée en 1997 par S. W. GERY dans la revue américaine « Navigation » [5]. Elle se limite par essence au problème de 2 observations ( $n = 2$ ).

À des fins de confrontation, la méthode du Plan des Sommets a été appliquée à deux des cas calculés par S. W. GERY. Le premier cas est le cas « d'observation réelle » de Vénus et de l'Épi de la Vierge. Le second cas est le « cas spécial » (à GHA identiques) qui a demandé à S. W. GERY quelques précautions sur la détermination des angles.

Les résultats affichés par ASTROLAB sont reproduits ci après. Est-il besoin de mentionner que les théâtres exotiques (Floride ou Micronésie) ne le prennent pas au dépourvu ?!

### Cas « d'observation réelle » :

N°	Date	Heure TU	Long. esti.	Lat. estim.	Haut. sext.	Haut. corri.	GHA	Déclin
5	4/02/95	23h40m31s	0°0'W	0°0'N	#	28.9133°	39.7250°	-20.7950°
4	4/02/95	23h29m15s	0°0'W	0°0'N	#	47.5633°	105.2350°	-11.1367°
N°	Long. calc.	Lat. calcul.	Ecart	Commentaires				
5				VENUS – Cas réel GERY p 19				
4				EPI – Cas réel GERY p 19				

N° d'OBSERVATIONS choisies dans le FICHER ?	4, 5
Calcul instancié à la DERNIERE OBSERVATION	CAS STRICTEMENT CONDITIONNE
PREDICTION et <b>RESULTATS</b> Latitude = 27°39.13'N Longitude = 0°W Altitude = 0 Naut	PAS de CORRECTION
ECART PT CALCULE à PT ESTIME = #	

### « Cas spécial » avec Arturus et la Lune au même angle horaire (GHA) :

N°	Date	Heure TU	Long. esti.	Lat. estim.	Haut. sext.	Haut. corri.	GHA	Déclin
7	12/03/93	5h32m38s	135°0'W	0°0'N	#	49.9117°	218.09833°	-17.0633°
6	12/03/93	5h30m14s	135°0'W	0°0'N	#	51.2617°	218.09833°	19.2133°
N°	Long. calc.	Lat. calcul.	Ecart	Commentaires				
7				LUNE – Cas réel GERY p 23				
6				ARCTU – Cas réel GERY p 23				

N° d'OBSERVATIONS choisies dans le FICHER ?	6, 7
Calcul instancié à la DERNIERE OBSERVATION	CAS STRICTEMENT CONDITIONNE
PREDICTION et <b>RESULTATS</b> Latitude = 2°15.0'N Longitude = 177°30.9'W Altitude = 0 Naut	PAS de CORRECTION
ECART PT CALCULE à PT ESTIME = #	

### Commentaires et conclusion

Dans les tableaux précédents, la position estimée a toujours été prise volontairement très loin du champ d'opération. En l'occurrence, elle ne sert qu'à lever le doute entre les 2 solutions mathématiques autorisées par la limitation à 2 observations. Les solutions sont réputées exactes, puisque le système n'est pas surconditionné (2 observations seulement pour déterminer 2 inconnues).

Dans les 2 cas présentés (et dans les autres), les résultats délivrés par ASTROLAB sont strictement identiques à ceux obtenus par S. W. GERY (le dernier chiffre significatif de S. W. GERY est le dixième de minute). Il faut souligner en outre que la méthode du Plan des Sommets, à base cartésienne, est parfaitement indifférente aux alignements de GHA, comme à d'autres subtilités de la trigonométrie sphérique (dépassement des pôles par exemple).



## 10. RÉDUCTION D'INCERTITUDE PAR EFFET DE FOISONNEMENT

Un des intérêts de la méthode du Plan des Sommets est sa capacité à traiter un nombre  $n$  quelconque d'observations, sans accroissement de complexité par rapport au cas classique où  $n = 3$ .

Cet intérêt n'est pas gratuit, dans la mesure où l'observateur, délivré des servitudes de l'Astro conventionnelle, va pouvoir se concentrer sur le sextant et la montre, et multiplier ses relevés à loisir. Or la multiplication des observations, à qualité constante, peut conduire à une certaine réduction de l'incertitude sur le résultat.

En partant du principe que la même loi d'incertitude affecte les coordonnées de chaque Sommet de cône-enveloppe, et que le traitement effectué est en grande partie linéaire, alors le théorème Central Limite [6, 7] devrait s'appliquer pour  $n$  suffisamment grand. Ce théorème prédit une loi normale, avec réduction d'incertitude, sur le résultat final. Pour des observations respectant une géométrie régulière, affectées en outre de lois normales, la loi normale résultante aurait un écart type divisé par la racine carrée de  $n$ . Ici c'est plutôt la racine carrée de  $(n-2)$  qui est

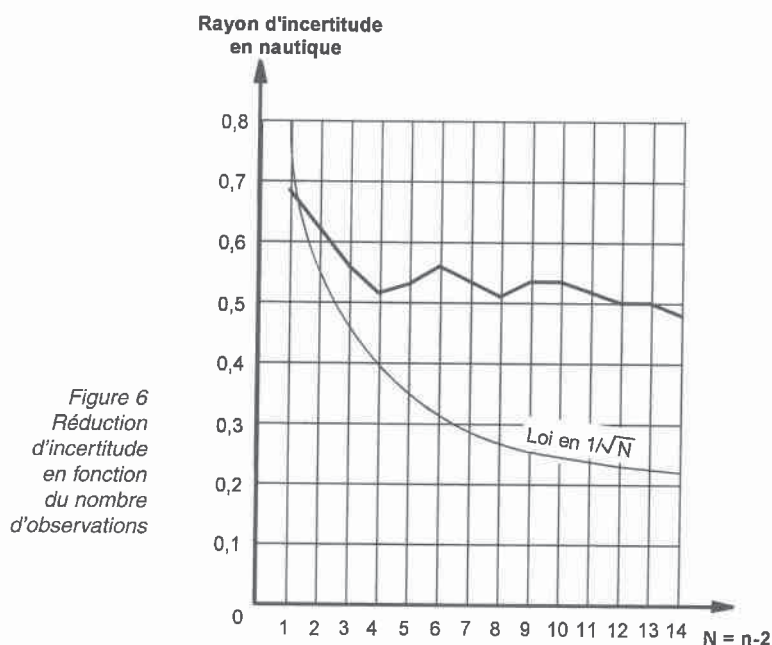
à considérer, puisqu'il faut au moins 3 observations pour une solution complète chiffrant l'incertitude.

Bien entendu, la réalité n'est pas aussi simple : la géométrie des observations n'est en général pas régulière, donc leur pondération n'est pas forcément équilibrée dans le résultat ; en outre, l'étape de correction introduit des non-linéarités. Enfin  $(n-2)$  est rarement aussi grand qu'on le souhaiterait ! Cependant, un effet de réduction d'incertitude peut effectivement être constaté, dans beaucoup de cas, en foisonnant les relevés à partir d'un même point fixe.

Une illustration en est donnée par une série d'observations soignées à partir du siège de LOCBAT, en banlieue sud-ouest de Paris. Les visées ont été faites avec l'aide d'un horizon artificiel, sur le soleil et la lune (le halo de Paris ne facilitant pas le travail avec d'autres astres).

Les valeurs de 16 relevés convenablement ordonnés en azimut (en fait réalisés sur plusieurs jours) sont présentées dans la table ci après, en degrés décimaux. Sur le diagramme qui fait suite (figure 6), le rayon d'incertitude calculé par la méthode du Plan des Sommets est porté en fonction du nombre d'observations pris en compte.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
GHA°	309,325	358,933	46,8933	314,936	24,779	70,2575	331,997	40,1967	297,835	14,82	70,8833	323,892	4,233	60,3167	280,555	14,485
Décli°	22,8078	22,9864	23,4222	23,4183	22,8255	23,4067	23,4420	23,4228	23,4183	-21,198	23,4242	23,3917	22,9867	22,3775	15,1267	-15,025
Haut vraie°	44,0123	64,233	44,0333	47,941	56,4333	28,7416	57,525	48,197	37,0017	18,4321	28,3271	53,21	63,75	34,5701	19,70	24,5319



On peut remarquer que la courbe de variation du rayon d'incertitude est globalement décroissante en fonction de  $n$ , à quelques oscillations près. Cependant, pour  $n$  élevé, la décroissance n'est pas aussi favorable que la loi idéale suivant l'inverse de la racine carrée.

À noter qu'en parallèle, l'écart au point donné par le GPS décroît également et rejoint 0,38 nautique pour  $N = 14$ , ce qui le situe bien dans le disque d'incertitude.

## CONCLUSION

L'exposé précédent a présenté les fondements de la méthode du Plan des Sommets. Il a également situé les performances de cette nouvelle méthode par rapport à des méthodes d'Astro plus conventionnelles, et montré

en quoi elle s'apparentait à certaines méthodes utilisées pour le GPS.

La transformation du problème direct en 3D par l'artifice du Plan des Sommets conduit à une formulation simple, en grande partie linéaire (en coordonnées carté-

siennes), et de ce fait bien adaptée à l'ordinateur. Il n'existe probablement pas à ce jour de méthode directe à la fois aussi simple et aussi efficace pour le point astronomique.

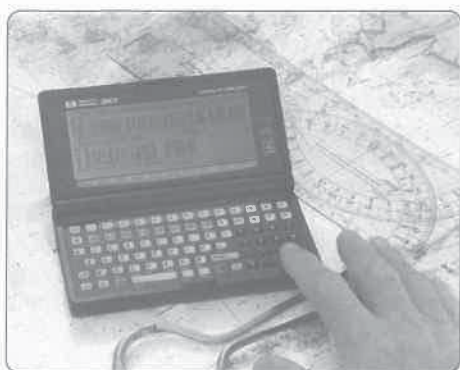
Les moyens techniques actuels rendent faisables une intégration ergonomique, et même une véritable hybridation des 2 méthodes — Plan des Sommets et GPS —, sur la même petite machine. Beaucoup de HPC ou de « palm-top » peuvent maintenant accueillir une mini-carte additionnelle pour le GPS (par exemple de type PCMCIA). Le reste est affaire de représentation commune et d'organisation des calculs [8].

Il est prévu qu'une prochaine version d'ASTROLAB soit dotée de ces perfectionnements, afin de conjuguer les avantages pour l'utilisateur : à savoir la précision et la disponibilité incomparables qu'assurent le GPS et le merveilleux contact à l'univers que continue à procurer l'Astro... Voilà un bon moyen, amis navigateurs, que vous soyez novices ou experts, d'éduquer ou d'entretenir votre sixième sens !

De même, un support graphique unifié sera proposé ultérieurement pour l'Astro et le GPS, sur un fond de carte vectorielle (ECDIS : Electronic Chart Display & Information System), en version à installer sur un PC conventionnel ou sur un portable suffisamment puissant.

## Références bibliographiques :

- [1] Y. ROBIN-JOUAN : « Navigation astronomique sur micro-informatique : faisons le point »  
*Navigation* (revue technique de l'Institut Français de Navigation), N° 174, avril 1996
- [2] S. BANCROFT : « An algebraic solution of the GPS equations »  
*IEEE Trans AES*, 1986
- [3] P. Y. POMMELET : « Comparaison et optimisation d'algorithmes pour le calcul du point GPS »  
*Publication LRBA*, 1994
- [4] C. MILLION : « Calcul d'un point GPS approché »  
*Revue xyz*, N° 68, 3<sup>e</sup> trimestre 96
- [5] S. W. GERY : « The direct fix of latitude and longitude from two observed altitudes »  
*Navigation USA* (journal of the Institute of Navigation), N° 1, spring 1997
- [6] D. BRAIDOTTI & V. VIARD : « Précis de statistique et de probabilités »  
*Université de Paris 1*, 1977
- [7] W. B. BEYER : « Standard Probability and Statistics »  
*CRC Press*, USA, 1991
- [8] Y. ROBIN-JOUAN : « Du positionnement Astro au GPS : continuité ou révolution ? »  
*Loisirs Nautiques*, N° 310 & 311, octobre & novembre 1997.



**Le plaisir retrouvé de la Navigation Astro,  
sans les servitudes !**

**ASTROLAB**

(voir article dans le présent numéro de xyz)

- Une méthode directe 3D, innovante, entièrement automatisée,
- Des algorithmes aussi puissants que ceux du GPS,
- Des éphémérides perpétuelles, assurant une complète autonomie.

**LOCBAT**

2 rue du Plaimont  
91430 IGNY

☎ 01 69 41 03 04

E-mail : yrobinjo@club-internet.fr

**Version compatible PC, portable ou notebook :**  
470 F TTC - Fichier de tests et documentation intégrés