

le positionnement astronomique par la méthode du Plan des Sommets



comment
revisiter
"l'Astro"
avec
l'expérience
du GPS

1^{ère} partie

OU

Yves Robin-Jouan (Locbat)

La méthode du Plan des Sommets, développée en 1995, publiée en 1996 [1], a conquis depuis un certain nombre d'adeptes et même de fervents partisans. Et ceux-ci ne sont pas uniquement des fanatiques de croisière à la voile ou des nostalgiques du sextant ! À des fins pédagogiques, les Écoles de deux Marines Nationales se sont intéressées à cette méthode novatrice, qui remet en cause, sans irrévérence, les vieilles habitudes héritées de Marq de Saint Hilaire (1872) et redéploie pour la navigation Astro un peu de l'arsenal algorithmique mis au point dans le domaine du GPS (Global Positioning System).

La méthode du Plan des Sommets renoue avec le projet de Cornelis DOUWES (1747) d'une méthode directe, sans recours à la notion de position estimée ou arbitraire. Elle emprunte à la navigation moderne, et notamment à la mouance du GPS, une approche en 3 Dimensions (3D), qui s'affranchit de la surface de la terre, et une formulation en coordonnées cartésiennes qui exploite au maximum l'algèbre linéaire (calcul vectoriel et matriciel).

Le traitement de l'incertitude fait largement appel aux techniques de moindres carrés (Least Mean Square) sur des principes proches de ceux utilisés par les récepteurs GPS les plus sophistiqués, dits à « contrôle autonome d'intégrité » (RAIM).

Le présent article se propose de rappeler les principes de la méthode, d'en discuter la validité et la précision, et de présenter une série de confrontations avec les méthodes conventionnelles. Dans la deuxième partie (prochain numéro), nous verrons le progiciel ASTROLAB, qui intègre la méthode du Plan des Sommets dans un environnement complet de navigation, et qui sera utilisé pour tous les exercices numériques.

1. FONDEMENTS GÉOMÉTRIQUES DE LA MÉTHODE

Les relevés astronomiques au sextant font classiquement intervenir deux variables de mesure : la hauteur de l'astre au-dessus de l'horizon local et l'heure précise de l'observation. Les hauteurs dont il sera question ci après sont des hauteurs vraies, supposées corrigées des déviations instrumentales (collimation) et optiques (dépression, réfraction, demi-diamètre éventuel). ASTROLAB réalise automatiquement ces corrections.

Comme habituellement en Astro, la forme de la terre est assimilée au modèle sphérique idéal. Il s'agit d'une

approximation dont l'impact sera examiné plus avant dans l'exposé.

Pour le calcul, tout l'espace est rapporté à des coordonnées cartésiennes (repère orthonormé xyz).

• Introduction du Plan des Sommets :

Avec une terre sphérique à rayon unitaire, il est bien connu que le lieu des points de celle-ci où l'on observe un astre à une hauteur donnée h est un petit cercle, dit « cercle de hauteur » (figure 1) :

– centré sur l'axe OU qui joint le centre de la terre et le centre de l'astre, en passant par le « pied » P de cet

astre sur la terre (appelé aussi le « vertical » ou le « point sub-zénithal ») ;

- porté par un plan, dit « plan support », normal à cet axe ;
- et de rayon égal à : $\cos h$

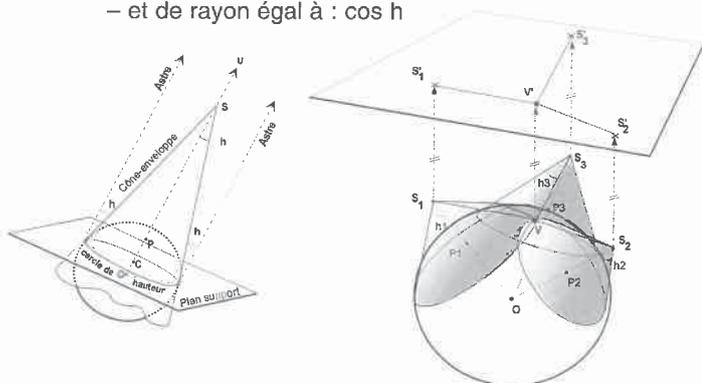


Figure 1 – Lieux, cônes-enveloppes, et rôle du Plan des Sommets
Cas d'un point exact V défini par trois observations

L'axe OU est déterminé par un calcul d'éphémérides de l'astre à l'instant d'observation. Il est orienté suivant les coordonnées horaires de cet astre : déclinaison et angle horaire à Greenwich (GHA).

Considérons l'enveloppe des plans horizontaux des différents points du cercle de hauteur : Il s'agit d'un cône circulaire :

- tangent à la sphère terrestre suivant le cercle de hauteur (c'est un cône circonscrit à la terre)
- d'axe OU
- de sommet S, avec : $OS = 1/\sin h$
- et de demi-angle au sommet égal à h

Maintenant, supposons multiplier à l'ordre n les observations à partir d'un point fixe V : elles définissent n cônes-enveloppes, associés respectivement à n hauteurs h_k (avec $k = 1$ à n).

Si les observations sont exactes, les n sommets S_k des cônes-enveloppes sont coplanaires et le plan qui les porte, appelé par définition « Plan des Sommets », est tangent à la terre au point V d'observation. Cette propriété découle directement du fait que les n génératrices S_kV sont par hypothèse toutes portées par le même plan horizontal au point V d'observation, qui se confond ainsi avec le Plan des Sommets.

• Réciproque : détermination du point d'observation

Si l'on fait abstraction de la surface de la terre ou que l'on ignore sa propre altitude (supposée non nulle), il faut au moins 3 observations pour définir un Plan des Sommets. Le point d'observation se situe au pied de la normale abaissée du centre O de la terre sur le Plan des Sommets. C'est cette propriété caractéristique qui est directement exploitée par la nouvelle méthode proposée.

2. IMPACT DE L'INCERTITUDE AFFECTANT LES RELEVÉS ASTRONOMIQUES

En théorie, la méthode du Plan des Sommets aboutit directement à la position exacte lorsque les relevés sont eux-mêmes exacts.

En pratique, une certaine incertitude affecte les n relevés effectués. Les directions OU_k des astres sont connues avec la précision liée aux éphémérides et à la mesure de l'heure. Par ailleurs, la lecture des angles de hauteur est liée à la précision du sextant et à l'habileté de l'opérateur (sans parler de l'état du ciel et/ou de la mer!).

La précision des éphémérides est de l'ordre d'un dixième de minute d'arc pour une utilisation aisée en conditions opérationnelles. Mais les mesures d'angles au sextant ne peuvent descendre en dessous de quelques dixièmes de minute d'arc de précision (même avec un sextant sur plate-forme gyroscopique). Et le repérage de l'instant d'observation conduit également à quelques dixièmes de minutes d'erreur supplémentaire...

En présence d'incertitude sur les relevés, un couple d'observations ($n = 2$) permet d'obtenir encore une position ponctuelle (incertaine), à condition de connaître son altitude. Ce cas peut être rapproché (toutes proportions gardées) de celui d'une position GPS dégradée basée sur 3 satellites, c'est-à-dire 1 de moins que les 4 satellites nécessaires à une position complète en 3D.

Avec trois observations inexactes ($n = 3$), il est possible dans l'absolu d'obtenir une position ponctuelle, sans référence à la terre. Dans ce cas, la méthode du Plan des Sommets donne un point qui a strictement les mêmes coordonnées géographiques (latitude et longitude). En effet l'intersection ponctuelle des 3 plans supports de cercles de hauteurs appartient alors à la normale au Plan des Sommets abaissée du centre de la terre. Il s'agit d'un théorème dans la veine des théorèmes de PASCAL pour les coniques, assez facile à démontrer, et illustré par la figure 2, volontairement restreinte à 2D pour faciliter la compréhension.

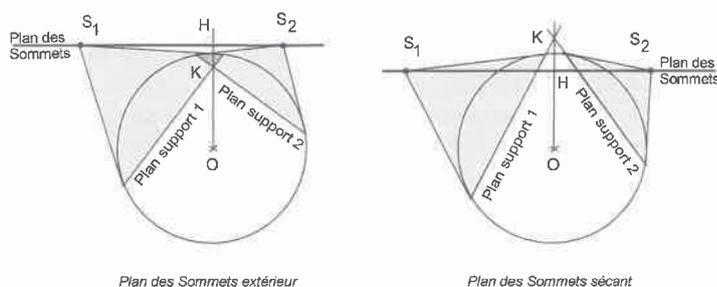


Figure 2 – Propriété de la normale au Plan des Sommets en présence d'incertitude (Représentation restreinte à 2D)

Avec plus de 3 observations inexactes, les choses se compliquent pour deux raisons :

- si l'on raisonne sans référence à la terre, les n plans supports de cercles de hauteurs ne se coupent plus ponctuellement mais délimitent un petit volume polyédrique de forme quelconque.
- les n sommets des cônes enveloppes ne sont plus rigoureusement coplanaires.

Dans le cas général, il est possible d'étendre la notion de Plan des Sommets, au moyen d'une régression linéaire : cette régression détermine simplement le plan qui traverse le nuage des points correspondant aux n

sommets, en minimisant un certain critère d'erreur. En pratique, le critère retenu est celui des moindres carrés (Least Mean Square). Il en résulte une déviation du point calculé par rapport au barycentre du polyèdre d'incertitude, déviation qui doit être corrigée.

3. RÉDUCTION À DEUX DIMENSIONS ET CORRECTION

Le traitement de l'incertitude est effectué sur les 2 coordonnées essentielles (2D), en réservant volontairement la 3^e dimension, l'altitude, comme le fait l'Astro conventionnelle. Cela permet notamment d'apprécier la marge d'erreur horizontale, avec un nombre modeste d'observations (3 suffisent alors).

En pratique, le Plan des Sommets (vrai ou étendu), proche du plan horizontal local, est utilisé comme référentiel 2D. En outre, plutôt que de travailler en projection, le calcul considère l'intersection du Plan des Sommets et des *n* « plans supports », c'est-à-dire des *n* faces du polyèdre d'incertitude (figure 3).

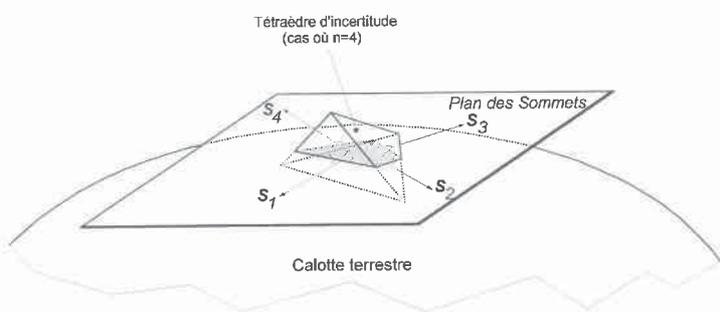


Figure 3 – Intersection des faces du polyèdre d'incertitude par le Plan des Sommets
Cas particulier d'un polygone convexe délimité par les traces

La correction consiste à déterminer le « point optimum » de l'intersection, au sens des moindres carrés, à savoir le point qui minimise la somme des carrés des distances aux traces dans le Plan des Sommets. La racine carrée du résidu de la somme au point optimal, donne l'écart type de l'erreur de distance, ou encore le rayon d'incertitude dans le plan horizontal.

Avec plus de 3 observations, il est aussi possible de procéder à un tri des observations entraînant les plus fortes déviations, et de qualifier le résultat final. Une pondération des observations par leur qualité objective ou subjective peut même être introduite dans le calcul des moindres carrés. Le début de cette approche s'apparente au contrôle d'intégrité effectué par les récepteurs GPS à RAIM.

4. IMPACT DE L'APLATISSEMENT DE LA TERRE

Tout le développement précédent s'appuie sur un modèle de terre purement sphérique. Que se passe-t-il avec une forme de terre plus proche de la réalité physique ?

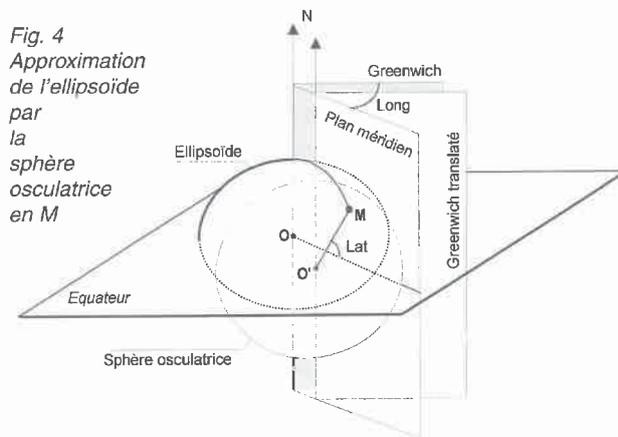
Avec un modèle ellipsoïdal, la reprise des considérations précédentes plonge rapidement dans la complexité. Sauf cas particuliers (autour des pôles et de l'équateur), les cercles de hauteur se transforment en boucles, les cônes-enveloppes en quartiques du type Parabololoïde Hyperbolique, et les sommets en « cols » ! Autrement dit,

le contour de la terre vu du sommet *S* d'un cône circonscrit ne se traduit plus par un lieu à hauteur constante pour la direction OS.

Le faible aplatissement de l'ellipsoïde de référence (1/297 suivant l'axe N-S) limite la déformation des « boucles de hauteur » par rapport aux cercles originaux, de même que l'épaisseur des cols des quartiques. Il serait encore possible de parler de « Plan des Cols », en considérant le plan qui minimise les sections d'intersection avec les *n* quartiques. En fait, un tel raffinement n'est pas facilement exploitable et on peut heureusement en faire l'économie.

La difficulté est évitée tout simplement grâce à la définition de la latitude géographique, qui se réfère aux notions de verticale et de plan horizontal tangent, et qui reste donc stable quand on passe de l'ellipsoïde à la sphère osculatrice locale. La cohérence sur la latitude est assurée ipso facto entre les 2 modèles (figure 4).

Fig. 4
Approximation de l'ellipsoïde par la sphère osculatrice en M



Entre ellipsoïde et sphère osculatrice, la longitude se déduit à une translation près du méridien de référence. L'Astro, qui est fondée sur des mesures d'angles, est insensible à une telle translation. La cohérence est donc globalement assurée entre les 2 modèles pour le problème posé. À noter qu'il en va différemment pour le GPS puisqu'il est fondé, lui, sur des mesures de distances.

Dans ces conditions, le raisonnement effectué avec le modèle sphérique peut être reconduit, avec la sphère osculatrice au point d'observation. Certes, les arcs de cercles de hauteur « décollent » progressivement des boucles correspondantes sur l'ellipsoïde, quand on s'éloigne du point de contact, mais cela est sans conséquence sur le résultat.

Cette approche s'accompagne d'une perte de rigueur sur l'altitude, ce qui justifie a posteriori le choix réducteur d'une correction en 2D, telle que présentée dans l'hypothèse d'une terre sphérique. À noter que l'altitude pourrait néanmoins faire l'objet d'une correction supplémentaire, en revenant sur l'ellipsoïde à la fin du parcours.

5. SYNTHÈSE DE LA MÉTHODE

La méthode du Plan des Sommets procède ainsi en deux étapes successives : prédiction, puis correction. Elle ne requiert aucune itération de ces étapes. En coordonnées cartésiennes, les traitements effectués peuvent largement s'appuyer sur l'algèbre linéaire, à l'exception de quelques intermédiaires de calcul.

• **Prédiction (3D) :**

La première étape de prédiction consiste d'abord à déterminer le Plan des Sommets correspondant aux n observations, au besoin via une régression linéaire (si n supérieur à 3). La position prédite correspond au pied de la normale abaissée sur le Plan des Sommets depuis le centre de la terre. L'écart de l'altitude par rapport à la réalité (zéro pour les marins) donne une première appréhension de la précision d'une telle prédiction.

La prédiction donne le résultat définitif lorsque les observations sont exactes (cas théorique) ou limitées à $n=2$. Dans ce dernier cas, le Plan des Sommets est pris par hypothèse tangent à la terre.

• **Correction (2D) :**

La seconde étape de correction consiste à examiner les traces des lieux géométriques dans le Plan des Sommets, au voisinage de la position prédite. En général, les segments de droites obtenus ne sont pas concourants, ni ne passent rigoureusement par la position prédite. La correction consiste à déterminer le point satisfaisant le mieux, au sens des moindres carrés, les équations des différentes traces dans le Plan des Sommets.

Cette méthode est une méthode directe, qui aboutit à coup sûr, sans soulever les questions de la convergence et de l'initialisation comme le ferait une méthode procédant par linéarisation puis itérations aveugles.

La seconde étape de la méthode n'est pas sans rapport avec les constructions graphiques effectuées naguère, à la main, dans le plan de la carte marine, à partir des droites de hauteur de Marcq de Saint Hilaire (1872). Mais

la méthode du Plan des Sommets s'affranchit de toute prédiction empirique (position estimée ou arbitraire), en lui substituant la prédiction parfaitement déterministe de la première étape. Cette méthode est en outre générale et complètement analytique, quel que soit le nombre n d'observations. Pour n croissant à partir de 3, la représentation graphique sert surtout d'illustration, car l'interprétation intuitive en devient rapidement illusoire.

6. RAPPROCHEMENT AVEC CERTAINES MÉTHODES UTILISÉES EN GPS

Au niveau des principes, la méthode du Plan des Sommets peut être rapprochée de la célèbre méthode de BANCROFT [2, 3], l'une des plus efficaces dans le monde du GPS. Dans les deux cas, le repère est cartésien, et le nombre n d'objets célestes surconditionne le système; mais l'essentiel est que la généralité du problème est conservée, sans linéarisation a priori, en choisissant la représentation de sorte que les non-linéarités soient isolées dans une équation purement scalaire, et limitée au second degré.

Dans la méthode du Plan des Sommets, l'équation du second degré est incomplète (il manque le terme du premier degré) et la solution se ramène à une simple racine carrée.

La méthode proposée par Claude MILLION [4] pour le GPS est également une méthode directe, qui reprend le principe de la navigation hyperbolique, au bénéfice de la linéarité retrouvée (contrairement à la méthode de BANCROFT). En contrepartie, elle requiert une observation de plus que les méthodes classiques et privilégie anormalement une observation « de base ».

Références bibliographiques :

- [1] Y. ROBIN-JOUAN : « Navigation astronomique sur micro-informatique : faisons le point » *Navigation* (revue technique de l'Institut Français de Navigation), N° 174, avril 1996
- [2] S. BANCROFT : « An algebraic solution of the GPS equations » – *IEEE Trans AES*, 1986
- [3] P. Y. POMMELET : « Comparaison et optimisation d'algorithmes pour le calcul du point GPS » *Publication LRBA*, 1994
- [4] C. MILLION : « Calcul d'un point GPS approché » *Revue xyz*, N° 68, 3^e trimestre 96
- [5] S. W. GERY : « The direct fix of latitude and longitude from two observed altitudes » *Navigation USA* (journal of the Institute of Navigation), N° 1, spring 1997
- [6] D. BRAIDOTTI & V. VIARD : « Précis de statistique et de probabilités » – *Université de Paris 1*, 1977
- [7] W. B. BEYER : « Standard Probability and Statistics » *CRC Press, USA*, 1991
- [8] Y. ROBIN-JOUAN : « Du positionnement Astro au GPS : continuité ou révolution ? » *Loisirs Nautiques*, N° 310 & 311, octobre & novembre 1997.



LOCBAT

2 rue du Plaimont
91430 IGNY

☎ 01 69 41 03 04

E-mail : yrobinjo@club-internet.fr

**Le plaisir retrouvé de la Navigation Astro,
sans les servitudes !**

ASTROLAB

(voir article dans le présent numéro de xyz)

- Une méthode directe 3D, innovante, entièrement automatisée,
- Des algorithmes aussi puissants que ceux du GPS,
- Des éphémérides perpétuelles, assurant une complète autonomie.

Version compatible PC, portable ou notebook :
470 F TTC - fichier de tests et documentation intégrés