

SCIENCES GÉOGRAPHIQUES, CONNAISSANCE DU MONDE ET CONCEPTION DE L'UNIVERS DANS L'ANTIQUITÉ

par Raymond d'Hollander ingénieur général géographe

Chapitre 18. La théorie des planètes de Ptolémée (2^e partie)*

Pour la première partie de ce chapitre voir le n° 73 d'XYZ.

18.5.3 Calcul d'une position de Vénus

Une position de Vénus peut être obtenue en calculant les deux paramètres : longitude l , distance OV au point O .

Pour vérifier l'exactitude du graphique de la fig. 18.16 proposons-nous de calculer la longitude de la position V_{17} ainsi que la distance OV_{17} .

Pour le calcul de la longitude de V_{17} nous procéderons de deux manières : par calcul direct, par utilisation des tables Alm XI-II dont nous avons décrit les caractéristiques en 18.4.2.

a) Calcul direct de la position de Vénus V_{17}

Sur la figure 18.16 nous avons explicité la construction de C_{17} , C_4 , C_{17} et de V_{17} , V_4 , V_{17} . Nous avons en particulier mis en évidence : l'angle $\eta_{17} = \widehat{OC_{17}E}$

$$\text{l'angle } \theta_{17} = \widehat{C_{17}O_{17}}$$

a1) Calcul de η_{17} .

Faisons une figure déformée du triangle OEC_{17} (fig. 18.17). L'angle $\widehat{AEC_{17}} = \widehat{K_{C_{17}}}$ a été calculé plus haut (voir relation 6) ; désignons par Ψ l'angle $\widehat{OEC_{17}}$:

$$\Psi = \widehat{OEC_{17}} = \widehat{AEC_{17}} - 180^\circ$$

$$\Psi = 228^\circ 53' 15'' - 180^\circ = 48^\circ 53' 15''.$$

Abaïssons de M et de O les perpendiculaires MI et OJ sur EC_{17} et joignons $C_{17}M$; on sait que :

$$MC_{17} = R = 60^\circ$$

$$\text{Or } MI = ME \sin \Psi = e \sin \Psi.$$

$$e = 1^\circ 15' \text{ (tableau 18.12)}$$

$$MI = 1^\circ 15' \sin 48^\circ 53' 15''$$

$$MI = 0^\circ 56' 31''$$

On a aussi $IJ = EI = ME \cos \Psi = e \cos \Psi$

$$IJ = 1^\circ 15' \cdot \cos 48^\circ 53' 15''$$

$$IJ = 0^\circ 49' 19''$$

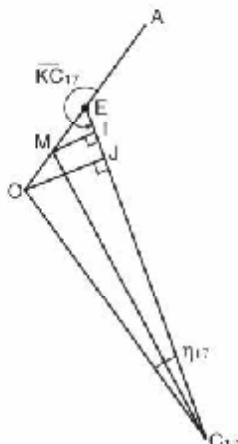


Figure 18.17

Dans le triangle MIC_{17} rectangle en I on a :

$$C_{17}I = \sqrt{MC_{17}^2 - MI^2}$$

$MC_{17} = R = 60^\circ$ et $MI = 0^\circ 56' 31''$; on trouve :

$$C_{17}I = 59^\circ 59' 34'' ;$$

on en déduit : $C_{17}J = C_{17}I - IJ$

$$C_{17}J = 59^\circ 59' 34'' - 0^\circ 49' 19'' = 59^\circ 10' 15''$$

On a aussi $OJ = 2 MI = 1^\circ 53' 2''$, puis

$OC_{17} = \sqrt{OJ^2 + C_{17}J^2}$ où OJ et $C_{17}J$ ont les deux valeurs précédentes. On trouve :

$$OC_{17} = 59^\circ 12' 3'' \quad 7)$$

Enfin dans le triangle $OC_{17}E$ la relation des sinus donne :

$$\frac{\sin \eta_{17}}{2e} = \frac{\sin \Psi}{OC_{17}}$$

On trouve : $\eta_{17} = 1^\circ 49' 24'' \quad 8)$

a2) Calcul de θ_{17} (fig. 18.18)

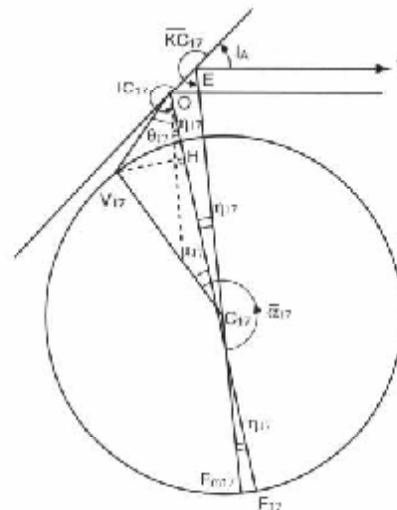


Figure 18.18

Considérons la direction EC_{17} coupant l'épicycle en l'apogée moyen Fm_{17} et la direction OC_{17} rencontrant l'épicycle à l'apogée vrai F_{17} .

Il est clair que l'anomalie vraie $\alpha_{17} = \widehat{F_{17}C_{17}V_{17}}$ est donnée par $\alpha_{17} = \widehat{\alpha_{17}} - \eta_{17}$.

$\widehat{\alpha_{17}}$ a été obtenu en 6) et η_{17} en 8). On a donc :

$$\alpha_{17} = 207^\circ 36' 41'' - 1^\circ 49' 24''$$

$$\alpha_{17} = 205^\circ 47' 17'' \quad 9)$$

Posons $\mu_{17} = \widehat{OC_{17}V_{17}} = \alpha_{17} - 180^\circ$

$$\mu_{17} = 25^\circ 47' 17'' \quad 10)$$

Abaissons de V_{17} la perpendiculaire $V_{17}H$ sur $C_{17}O$.

$$HV_{17} = r \sin \mu_{17}$$

$$\text{et } \tan \theta_{17} = \frac{HV_{17}}{OH} = \frac{r \sin \mu_{17}}{OH}$$

mais $OH = OC_{17} - HC_{17} = OC_{17} - r \cos \mu_{17}$, d'où

$$\tan \theta_{17} = \frac{r \sin \mu_{17}}{OC_{17} - r \cos \mu_{17}}$$

OC_{17} est donné par 7), $r = 43^{\circ}10'$ (col. 4 du tableau 18.12) et μ_{17} par 10).

Nous trouvons :

$$\theta_{17} = 42^{\circ}43'14'' \quad (11)$$

de sorte qu'on a dans le cas de la fig. 18.18 :

$$I_{C_{17}} = I_A + \bar{K}_{C_{17}} + \eta_{17}$$

I_A est donné par 1), $\bar{K}_{C_{17}}$ par 6), η_{17} par 8).

On trouve : $I_{C_{17}} = 281^{\circ}17'39''$.

On a enfin :

$I_{V_{17}} = I_{C_{17}} - \theta_{17}$ où θ_{17} est donné par 11) ;

$$I_{V_{17}} = 238^{\circ}34'25'' \quad (12)$$

On peut aussi calculer OV_{17} par :

$$OV_{17} = \frac{OH}{\cos \theta_{17}} = \frac{OC_{17} - HC_{17}}{\cos \theta_{17}}$$

$$OV_{17} = \frac{59^{\circ}12'3'' - 43^{\circ}10' \cos 25^{\circ}47'13''}{\cos 42^{\circ}43'14''}$$

On trouve : $OV_{17} = 27^{\circ}40'34'' \quad (13)$

Rappelons que la figure 18.16 a été faite en affectant aux longueurs R , OM , ME , r exprimée en parties la longueur 0,9 mm à chaque partie.

On a donc : $R = 60^p = 60 \times 0,9 = 54 \text{ mm}$ et

$$OV_{17} = 27^{\circ}40'34'' = 27,6761 \times 0,9 = 24,90 \text{ mm}$$

On vérifie bien sur la fig. 18.16 que $OV_{17} = 24,9 \text{ mm}$ et que $I_{V_{17}} \approx 238^{\circ} \frac{1}{2}$.

b) Utilisation des tables Alm. XI-II

Nous avons donné l'extrait utile des tables Alm XI-II concernant Vénus dans notre table 18.8.

b1) Calcul de η_{17} .

Entrons avec l'argument $\bar{K}_{C_{17}} = 228^{\circ}53'15''$ (relation 6 du § 18.5.2 e)

$$\eta_{17} = C_3(\bar{K}) + C_4(\bar{K})$$

$$\text{Par interpolation : } C_3 = 1^{\circ}49' + \frac{5'}{3} \times 0^{\circ}53'15''$$

$$C_4 = -0^{\circ}3'$$

$$\text{d'où : } \eta_{17} = 1^{\circ}47'29'' \quad (14)$$

Ce résultat diffère de $-1'55''$ de celui obtenu en 8).

b2) Calcul de α_{17} , anomalie vraie ou corrigée.

$$\alpha_{17} = \bar{\alpha}_{17} - \eta_{17}$$

D'après 6) $\bar{\alpha}_{17} = 207^{\circ}36'41''$ et η_{17} est donné par 14), d'où on déduit :

$$\alpha_{17} = 205^{\circ}49'12'' \quad (15)$$

b3) Calcul de $C_8(\bar{K})$

Entrons colonne 2 avec $\bar{K}_{C_{17}} = 228^{\circ}53'15''$

Par interpolation :

$$C_8(\bar{K}) = 38^{\circ}50' - \frac{2^{\circ}32'}{3^{\circ}} \times 0^{\circ}53'15''$$

$$= 38^{\circ}50' - 0^{\circ}45'$$

$$C_8(\bar{K}) = 38^{\circ}05' \quad (16)$$

b4) Calcul de θ

Comme $C_8(K)$ est positif on utilise la formule

$$\theta(\alpha, \bar{K}) = C_6(\alpha) + C_8(\bar{K}) \times C_7(\alpha) \quad (17)$$

Entrons maintenant dans la table avec l'argument $\alpha_{17} = 205^{\circ}49'12''$. On a par interpolation :

$$C_6(\alpha) = 40^{\circ}28' + \frac{1^{\circ}50'}{3} \times 1^{\circ}49'12'' = 41^{\circ}34'44''$$

$$C_8(\alpha) = 1^{\circ}48' - \frac{5'}{3^{\circ}} \times 1^{\circ}49'12'' = 1^{\circ}44'58''$$

La formule 17) donne :

$$|\theta_{17}(\alpha, \bar{K}_{C_{17}})| = 41^{\circ}34'44'' + \frac{38^{\circ}05'}{60''} \times 1^{\circ}44'58''$$

$$|\theta_{17}| = 42^{\circ}41'21'' \quad (18)$$

Ce résultat diffère de $-1'53''$ de celui obtenu en 11) mais comme θ interviendra avec le signe $-$, l'erreur sera de $+1'53''$

En utilisant les tables Alm-XI-II, on a donc :

$$I_{V_{17}} = I_A + \bar{K}_{C_{17}} + \eta_{17} - \theta_{17}$$

$$I_{V_{17}} = 50^{\circ}35' + 228^{\circ}53'15'' + 1^{\circ}47'29'' - 42^{\circ}41'21''$$

$$I_{V_{17}} = 238^{\circ}34'23'' \quad (19)$$

L'écart avec le résultat obtenu en 12) n'est que de $-2''$, comme il fallait s'y attendre ; en effet il se produit une compensation entre une erreur $-1'55''$ sur η et une erreur $+1'53''$ sur $-\theta$, ce qui fait bien $2''$ d'écart.

Notre comparaison entre le calcul direct de η et θ et l'obtention de ces valeurs par les Tables Alm XI-II nous permet d'avoir une idée sur la précision de ces tables, qui dans l'exemple donné présentent des erreurs de l'ordre de $2''$.

Mais il y a en outre l'erreur sur I_A due à la mauvaise valeur de la précession adoptée par Ptolémée, les erreurs sur les autres paramètres I_{A0} , \bar{V}_0 , \bar{V}_E .

Neugebauer dans HAMA (Bibl. 9) a comparé les résultats obtenus, pour les 17 positions de Vénus étudiées en 18.5.2, en utilisant les critères de Ptolémée et les résultats issus de calculs modernes : les erreurs s'échelonnent entre $+4'$ pour la position V_{15} et $-2^{\circ}5'$ pour la position V_7 . Pour la position V_4 proche de la « station » l'erreur est de $-1^{\circ}31'$. Ainsi en moyenne l'erreur est de l'ordre du degré.

18.5.4 Le modèle cinématique de Mercure

Selon les Chaldéens on avait pour Mercure :

$N = 46$ années

$R = 46$ rotations complètes de Mercure

$M = 145$ périodes synodiques

Il en résulte que la période synodique est :

$$\alpha_{Me} = \frac{46 \times 360^\circ}{145} = 114,207 \text{ jours environ.}$$

La vitesse en anomalie est approximativement :

$$(\dot{\nu}_e)_{Me} = \frac{360^\circ}{114,207} = 3^\circ,152$$

Nous avons à titre d'exemple développé l'étude de l'orbite de Vénus, nous nous contenterons d'exposer l'essentiel en ce qui concerne Mercure, pour lequel Ptolémée définit le modèle cinématique suivant. Au lieu d'avoir l'équant E symétrique de O par rapport à M, Ptolémée choisit l'équant E au milieu de OM. D'autre part au lieu d'avoir le centre du déférent fixe en M, comme pour la 2^e inégalité de la Lune (n° 17.1), il fait décrire au centre I du déférent un cercle de centre M et de rayon : $MI = ME = e$, dans le sens rétrograde, donc dans le sens horaire (fig. 18.19). Il définit la position de I par rapport à la ligne apsidale πA du déférent par l'angle :

$$\widehat{AMI} = \bar{K} = \widehat{AEC}$$

Si \bar{K} est compté dans le sens direct pour C, il l'est dans le sens rétrograde pour I : \bar{K} varie uniformément avec le temps : $\Delta \bar{K} = \bar{\nu}_s (t - t_0)$.

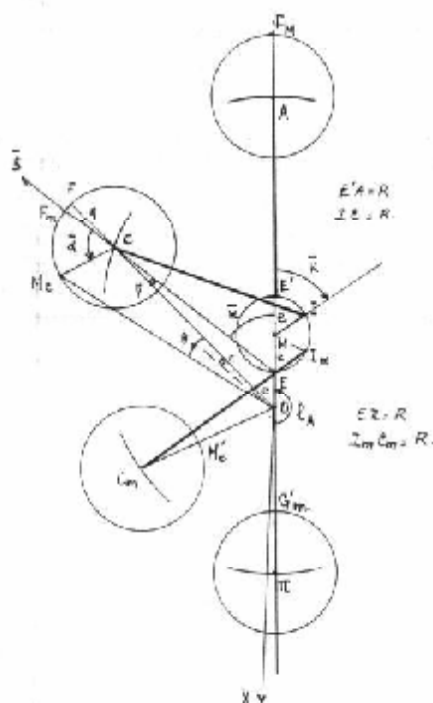


Figure 18.19

Comme pour Vénus la vitesse de ce mouvement est $\bar{\nu}_c = \bar{\nu}_s$, vitesse moyenne du Soleil car C se déplace encore sur le déférent de manière à se trouver toujours aligné depuis E avec le Soleil moyen S. Le point I est le centre du déférent de rayon $R = 60^\circ$. À l'intersection de celui-ci et de la direction EC, définie par $\bar{K} = \widehat{AEC}$, se trouve le centre de l'épicycle C. Sur la figure 18.19 nous n'avons tracé que très partiellement un arc de déférent, mais nous avons représenté en trait épais la longueur du rayon $IC = R$.

Comme pour Vénus, Ptolémée définit l'apogée moyen F_m à l'intersection de EC et de l'épicycle. À partir de la direction CF_m il porte l'angle $\bar{\alpha} = \widehat{F_m C M_m}$, dans le sens direct, variant de façon uniforme avec le temps et se calculant par $\bar{\alpha} = \alpha_0 + \Delta \bar{\alpha}$ où :

$$\Delta \bar{\alpha} = \bar{\nu}_a (t - t_0), \text{ où } t_0 \text{ est l'époque.}$$

La vitesse $\bar{\nu}_a$, dont nous avons donné l'ordre de grandeur ci-dessus, est portée dans la colonne 5 du tableau 18.5. L'intersection de la direction CM_E et de l'épicycle donne la position cherchée de la planète Mercure à l'instant t.

Le mouvement se produit de façon que, lorsque C se trouve sur la ligne apsidale à l'apogée A du déférent, le point I se trouve en E' symétrique de E par rapport à M. On a donc :

$$OA = 3e + R.$$

De même lorsque C se trouve au périégée π du déférent, le point I doit se trouver en E. On a donc :

$$O\pi = R - e$$

Par des observations adéquates dont nous ne donnerons pas le détail Ptolémée a trouvé pour Mercure :

$$e = 3^\circ \text{ et } r = 22^\circ 30'$$

(voir col. 2 et 4 du tableau 18.12)

18.5.5 Distances maximale et minimale de Mercure à la Terre

La distance maximale de Mercure à l'observateur terrestre O a lieu pour C en A et pour Mercure à l'apogée F_m de l'épicycle (voir fig. 18.19) :

$$D_M = OF_m = OE' + E'A + AF_m = 3e + R + r, \text{ soit : } D_M = 9^\circ + 60^\circ + 22^\circ 30' = 91^\circ 30'$$

On pourrait penser qu'on a la distance minimale lorsque C est en π et que Mercure est au périégée G'_m de l'épicycle et l'on aurait ainsi (voir fig. 18.19) :

$$d = OG'_m = E\pi - EO - \pi G'_m = R - e - r \\ d = 60^\circ - 3^\circ - 22^\circ 30' = 34^\circ 30'$$

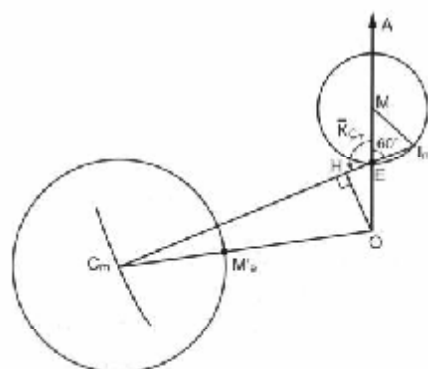


Figure 18.20

Mais Ptolémée a observé (voir fig. 18.20) que Mercure peut se trouver plus proche de O lorsque C_m est tel que $\bar{K}_{C_m} = \widehat{AEC_m} = 120^\circ$. Abaissons de O la perpendiculaire OH sur C_mE .

$$OH = e \sin 60^\circ = 3^\circ \sin 60^\circ = 3^\circ \times \sin 60^\circ = 2^\circ 35' 53''$$

$$EH = e \cos 60^\circ = 3^\circ \cos 60^\circ = 3^\circ \times 0,5 = 1^\circ 30'$$

$$C_mE = IC_m - EI_m = EH.$$

Or $El_m = ME = e$ puisque le triangle MEl_m est équilatéral, d'où : $C_m H = l_m C_m - El_m - EH$, soit :
 $C_m H = R - e - e \cos 60^\circ = 60^\circ - 3^\circ - 1^\circ 30' = 55^\circ 30'$
 $OC_m = \sqrt{C_m H^2 + OH^2}$. On trouve :

$$OC_m = 55^\circ 34'$$

Dans ces conditions si Mercure se trouve sur l'épicycle de centre C_m au point M'_e de la figure 18.20 la distance minimale de Mercure à O est :

$$d_m = OC_m - r = 55^\circ 34' - 22^\circ 30' = 33^\circ 4'$$

On voit bien que $d_m < d$.

$$\text{Le rapport } \frac{D_M}{d_m} = \frac{91^\circ 30'}{33^\circ 4'} = 2,767.$$

18.5.6 Calcul de la longitude éclipstique de Mercure à un instant donné

On trouvera les paramètres de Mercure relatifs à l'époque t_0 dans le tableau 18.6 ; comme ceux de Vénus ils ont été déterminés par un calcul à rebours à partir d'observations de Mercure en 264 avant J.C. et en 139 après J.C. Les deux positions ont permis le calcul de \bar{v}_a .

Le calcul de la longitude éclipstique de Mercure s'effectue comme celui de Vénus à partir de la Table Alm XI-II de Mercure, où sont tabulés aussi les coefficients C_3 C_4 C_5 C_6 C_7 C_8 .

L'angle $\eta = C_3 + C_4$ est l'angle sous lequel on voit EO depuis C (fig. 18.19).

L'angle θ est l'angle sous lequel on voit CM_e depuis O ; toutefois à la différence des autres planètes la distance minimale $\theta_m = C_6 + C_7$ n'est pas obtenue pour le périhélie, mais comme nous venons de la voir pour $K = \pm 120^\circ$. On a encore :

$$l_{M_0} = l_A + K - \eta + \theta \text{ dans le cas de la fig. 18.19.}$$

Dans d'autres cas de figures il faut prendre garde aux signes de η et de θ .

De manière analogue à Vénus, on peut calculer l'apogée de la trajectoire de Mercure à l'époque :
 $t_0 = -746$ ans ; on trouve $l_{A,0} = 181^\circ 10' = 1^\circ 10'$ (voir tableau 18.6 col. 2).

18.6 Les planètes supérieures

18.6.1 Les données chaldéennes

Ptolémée utilisa d'abord les données chaldéennes qui pour les trois planètes supérieures étaient :

Planète	Nombre d'années	Nombre de rotations sidérales	Nombre de périodes synodiques
Mars	N = 79	R = 42	M = 37
Jupiter	N = 71	R = 6	M = 65
Saturne	N = 59	R = 2	M = 57

Mars. La durée de révolution synodique s'obtient par :

$$\sigma_M = \frac{79 \times 365}{37} = 779,3 \text{ jours environ.}$$

La vitesse journalière en anomalie est :

$$(\bar{v}_a)_M = \frac{360}{779,3} = 0,462^\circ/\text{jour environ.}$$

La vitesse journalière en longitude est :

$$(\bar{v}_l)_M = \frac{42 \times 360}{79 \times 365} = 0,524^\circ/\text{jour environ.}$$

Jupiter. La durée de révolution synodique s'obtient par :

$$\sigma_{Jup} = \frac{71 \times 365}{65} = 398,7 \text{ jours environ.}$$

La vitesse journalière en anomalie est :

$$(\bar{v}_a)_{Jup} = \frac{360}{398,7} = 0,903^\circ/\text{jour environ.}$$

La vitesse journalière en longitude est :

$$(\bar{v}_l)_{Jup} = \frac{6 \times 360}{71 \times 365} = 0,0833^\circ/\text{jour environ.}$$

Saturne. La durée de révolution synodique s'obtient par :

$$\sigma_{sat} = \frac{59 \times 365}{57} = 377,8 \text{ jours environ.}$$

La vitesse journalière en anomalie est :

$$(\bar{v}_a)_{sat} = \frac{360}{377,8} = 0,952^\circ/\text{jour environ.}$$

La vitesse journalière en longitude est :

$$(\bar{v}_l)_{sat} = \frac{2 \times 360}{59 \times 365} = 0,0334^\circ/\text{jour environ.}$$

Toutes les vitesses indiquées ci-dessus sont des vitesses moyennes, justifiant donc le trait barre au-dessus.

Ptolémée affina ces données et obtint les chiffres des trois dernières lignes du tableau 18.5 que nous avons données en système sexagésimal et en système décimal.

18.6.2 Les modèles cinématiques successifs

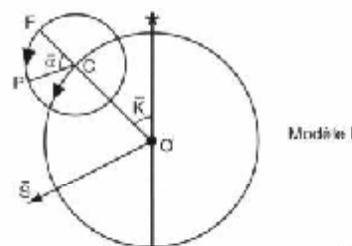


Figure 18.21

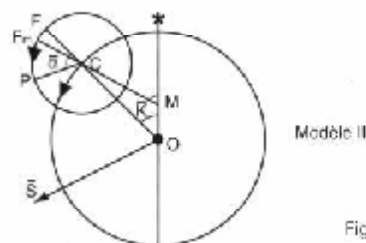


Figure 18.22

Nous avons déjà donné en 18.2 un modèle très simplifié du mouvement d'une planète supérieure : il n'y avait pas d'excentricité et on avait constamment CP parallèle

à \overline{OS} . Ce modèle peut être schématisé par la figure 18.21 : c'est le modèle I. Si on désigne par u la longitude du Soleil moyen par rapport à l'apogée A , on a :

$$\overline{u} = \overline{K} + \overline{\alpha}.$$

$$\bar{u} = \bar{K} + \bar{\alpha}. \quad 1)$$

Le modèle 1 implique une symétrie parfaite d'où devrait résulter l'égalité des arcs de rétrogradation dans tout le zodiaque, alors que l'expérience prouve que ces arcs sont inégaux. Un premier affinement du modèle consiste à excenter le centre du déferent en M (fig. 18.22), d'où le modèle II pour lequel on a encore la relation 1) $\bar{u} = \bar{K} + \bar{\alpha}$.

Remarquons que si nous dérivons membre à membre la relation 1) par rapport au temps, on a :

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{d\bar{K}}{dt} + \frac{d\bar{\alpha}}{dt}, \text{ c'est-à-dire ;}$$

qui n'est autre que la relation 12) du n° 18.3.3. Cette relation peut être tirée aussi de la relation 3) du n° 4.41 A : $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{A} - \frac{1}{S}$. En effet on peut écrire celle-ci :

$$\frac{2\pi}{A} = \frac{2\pi}{S} + \frac{2\pi}{a}, \text{ équivalente à 2).}$$

Nous avons montré aussi en 18.3.1 l'identité entre : $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{A} - \frac{1}{S}$ et la relation $N = R + M$, qui est bien satisfaite pour les données chaldéennes des trois planètes supérieures.

Mais le modèle II (fig. 18.22) ne donna pas entièrement satisfaction à Ptolémée et comme la relation 1) : $\bar{u} = \bar{K} + \bar{\alpha}$ n'implique nullement le fait que la distance de C au centre de rotation doive rester constante, Ptolémée introduisit pour les planètes supérieures l'équant E, symétrique de O par rapport à M comme pour Vénus, de sorte que le modèle finalement retenu par Ptolémée pour les planètes supérieures est le modèle III de la figure 18.23.

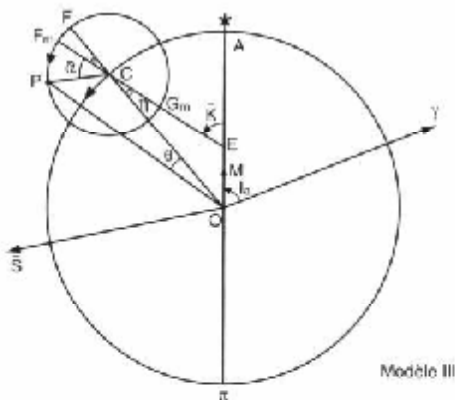


Figure 18.23

Soit O l'observateur terrestre et la direction Oy du point vernal. Nous verrons en 18.6.3 comment Ptolémée obtient la longitude l_A de la ligne des apsides du différent ; dans le même paragraphe nous verrons aussi comment il détermine l'excentricité $e = OM = ME$ permettant de situer M et E sur la ligne apsidale du déferent.

La direction EC fait avec la ligne des apsides un angle \bar{K} qui varie uniformément avec le temps.

À l'instant t on a : $\bar{K} = \bar{K}_0 + \Delta\bar{K}$, où \bar{K}_0 est la valeur de \bar{K} à « l'époque » t_0 , toujours la même et $\Delta\bar{K} = \bar{v}$, $(t - t_0)$.

Nous avons vu en 18.3.3 comment Ptolémée obtenait la valeur de : $v_j = \bar{v}_c$ pour Saturne.

Il procède de façon analogue pour les autres planètes supérieures dont les vitesses \bar{v}_i ou \bar{v}_c sont précisées dans le tableau 18.5.

Le déferent a son centre en M et pour rayon :

$$MC = R = 60^{\mu}$$

La direction EC rencontre le déférent au point C centre de l'épicycle, de rayon r . Nous verrons en 18.6.4 comment Ptolémée détermine la valeur de ce rayon. Une fois tracé l'épicycle on définit la position de l'apogée moyen F_m et du périège moyen G_m comme intersections de CE avec l'épicycle. On mène par C une parallèle CP à la direction OS du Soleil moyen. De cette condition dépend la valeur de l'anomalie moyenne $\bar{\alpha} = \widehat{F_mCP}$.

Nous indiquerons en 18.6.5 comment Ptolémée obtient la vitesse moyenne en anomalie \bar{v}_a .

Pour un instant t il calcule :

$$\bar{a} = \bar{a}_0 + \Delta a.$$

α_0 est la valeur à « l'époque » t_0 et

$$\Delta \alpha = \bar{v}_a (t - t_0).$$

Il y a donc une grande analogie avec le mouvement de Vénus ; comme pour cette planète Ptolémée utilise pour le calcul de la longitude des planètes supérieures les tables Alm XI-II qui donnent les valeurs des angles η et θ de la fig. 18.23 (voir § 18.6.7).

Nous verrons aussi comment Ptolémée détermine les paramètres f_{A_0} , α_0 et f_{C_0} à « l'époque » t_0 (voir § 18.6.6).

Le modèle III qui vient d'être décrit et qui fait intervenir le Soleil moyen \bar{S} subsistera jusqu'à Copernic inclus. Kepler le premier introduira le Soleil vrai à la place du Soleil moyen.

Dans les trois modèles I,II,III, fig. 18.21, fig. 18.22 et 18.23 nous avons dirigé la ligne des apsides vers une étoile pour montrer que la ligne des apsides est sidérale-
ment fixe, donc, selon la conception de Ptolémée, elle participe au mouvement de précession des équinoxes.

18.6.3 Détermination des excentricités et des longitudes de l'apogée des planètes supérieures

a) Utilisation du modèle II

Ptolémée partit du modèle II, où E et M sont confondus et il observa trois oppositions concrétisées par le schéma de la figure 18.24, où la planète P située sur OC est en opposition avec le Soleil moyen \bar{S} . Dans le cas d'une opposition vraie fig. 18.25 a) la planète apparaît selon un cercle parce que l'hémisphère d'éclairement du Soleil et celui de visibilité depuis l'observateur terrestre sont confondus.

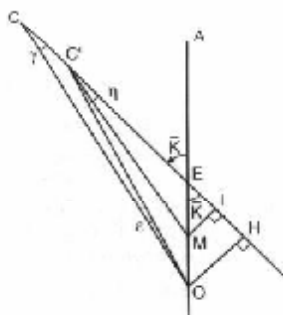


Figure 18.28

Abaïssons de O et de M les perpendiculaires OH et MI sur EC.

Calcul de $\eta = \widehat{OC'E}$. On résoud le triangle OEC' où $OE = 2e$, $\widehat{C'EO} = 180^\circ - \bar{K}$, $OC' = \sqrt{OH^2 + HC'^2}$

$$OH = 2e \sin \bar{K}, HC' = HI + IC'$$

$$IH = IE = e \cos \bar{K}$$

$$IC' = \sqrt{MC'^2 - IM^2}$$

$$\text{Or } MC' = R \text{ et } IM = e \sin \bar{K},$$

$$\text{d'où : } IC' = \sqrt{R^2 - e^2 \sin^2 \bar{K}}$$

$$HC' = e \cos \bar{K} + \sqrt{R^2 - e^2 \sin^2 \bar{K}}, \text{ et}$$

$$OC' = \sqrt{OH^2 + HC'^2} \begin{cases} OH = 2e \sin \bar{K} \\ HC' = e \cos \bar{K} + \sqrt{R^2 - e^2 \sin^2 \bar{K}} \end{cases} \quad 1)$$

Des trois éléments maintenant connus du triangle OEC' on déduit :

$$\frac{\sin \eta}{OE} = \frac{\sin \bar{K}}{OC'}$$

$$\text{d'où : } \eta = \arcsin \frac{2e \sin \bar{K}}{OC'} \quad 2)$$

où OC' est donné par 1).

Calcul de $\gamma = \widehat{OCE}$.

$$\text{On a : } \sin \gamma = \frac{OH}{OC}$$

$$OH = 2e \sin \bar{K} \text{ et } OC = \sqrt{OH^2 + HC^2}$$

$$HC = HE + EC = 2e \cos \bar{K} + R,$$

$$\text{d'où : } OC = \sqrt{4e^2 \sin^2 \bar{K} + (2e \cos \bar{K} + R)^2} \quad 3)$$

On en déduit :

$$\gamma = \arcsin \frac{OH}{OC} \begin{cases} OH = 2e \sin \bar{K} \\ OC \text{ donné par 3)} \end{cases} \quad 4)$$

Ayant obtenu η par 2) et γ par 4) on en déduit $\varepsilon = \eta - \gamma$.

Ce type de calcul assez lourd est répété pour $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ d'où on déduit les angles corrigés $\delta'_1, \delta'_2, \delta'_3$.

Avec les angles $\bar{\Delta K}_3, \bar{\Delta K}_1$ situant C_2 et C_3 par rapport à C_1 , déjà déterminé par la valeur de \bar{K}_1 , avec les angles corrigés δ'_1 et δ'_3 , Ptolémée réitère son calcul de relèvement et obtient une nouvelle excentricité

$$e' \text{ et les nouveaux angles } K'_1 = \widehat{AEC'_1} \\ K'_2 = \widehat{AEC'_2} \\ K'_3 = \widehat{AEC'_3}$$

Il obtient alors de nouvelles positions C''_1, C''_2, C''_3 sur un nouveau déférent puisque e' est différent de e . Il calcule les corrections $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3$ selon le même processus que ci-dessus, d'où de nouveaux angles $\delta''_1, \delta''_2, \delta''_3$. Si ceux-ci sont égaux aux angles observés c'est que le modèle défini par e' et les angles K' convient. S'il n'en est pas ainsi il réitère à nouveau pour calculer un nouveau modèle défini par e'' différent de e' et de nouveaux angles K''_1, K''_2, K''_3 . Avec ces nouveaux paramètres il calcule les corrections $\varepsilon''_1, \varepsilon''_2, \varepsilon''_3$, toujours selon le même processus, d'où de nouveaux angles : $\delta'''_1, \delta'''_2, \delta'''_3$. Si ceux-ci sont égaux aux angles observés $\delta_1, \delta_2, \delta_3$, c'est que le modèle défini par e'' et les angles K'' convient ; dans le cas contraire il réitère encore.

Pour Saturne par exemple il a suffi à Ptolémée de deux réitérations. La première avait donné les résultats déjà énoncés plus haut que nous répétons ici à gauche. La 2^e réitération lui a donné les valeurs portées à droite.

Première approximation Deuxième approximation

$$\begin{array}{ll} 2e' = 7^\circ 8' & 2e'' = 6^\circ 50' \\ K'_1 = 57^\circ 43' & K''_1 = 56^\circ 30' \\ K'_2 = -19^\circ 51' & K''_2 = -18^\circ 38' \\ K'_3 = -55^\circ 52' & K''_3 = -57^\circ 5' \end{array}$$

Pour Jupiter il a suffi aussi à Ptolémée de deux approximations, pour Mars il lui en fallut trois.

Pour Saturne à partir de la valeur de K''_3 et compte-tenu de la longitude éclipique de C_3 , Ptolémée déduit la position de la ligne apsidale par rapport à la direction du point vernal et il trouva pour la longitude de l'apogée de Saturne en 136 :

$$l_a = 233^\circ 00' \quad 5)$$

Revenons à la figure initiale 18.24 correspondant à la position C_1 du centre de l'épicycle sur la fig. 18.26.

Dès lors qu'il a obtenu $K'_1 = \widehat{AEC'_1}$, il peut comme nous l'avons vu plus haut calculer l'angle $\eta = \widehat{EOC}$, de sorte que α_{app} de la fig. 18.24 est donné par :

$$\alpha_{\text{app}} = 180^\circ - \eta$$

Ptolémée obtint pour Saturne le 8 juillet 136 :

$$\alpha_{\text{app}} = 174^\circ 44' \quad 6)$$

18.6.4 Détermination du rayon de l'épicycle (figure 18.29)

Pour chacune des trois planètes supérieures Ptolémée se servit d'une observation de la planète peu après l'une des oppositions précédentes. Soit $\nu = \widehat{POP}$ l'angle accessible à l'observation, définissant la longitude de la planète par rapport au périégée. Dans le triangle CPO désignons par x et y les angles en C et en M. Abaissons de C sur OP prolongé la perpendiculaire CH et désignons par w l'angle \widehat{CPH} tel que $w = x + y$.

$$x = \widehat{OCP} = \widehat{OCE} - \widehat{ECP} = \eta - (180^\circ - \alpha)$$

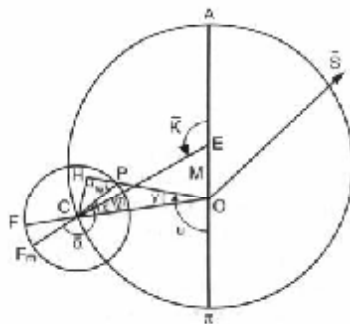


Figure 18.29

L'angle $\widehat{\pi OC} = u - y$ est extérieur au triangle CEO de sorte que : $u - y = 180^\circ - \bar{K} + \eta$, d'où :
 $y = u - 180^\circ + \bar{K} - \eta$ 7)

On obtient w par $w = x + y$
 $w = \eta - (180^\circ - \bar{\alpha}) + (u - 180^\circ + \bar{K} - \eta)$,
d'où : $w = \bar{\alpha} + u + \bar{K}$ 8)

Désignons par r le rayon de l'épicycle ; on a :
 $CH = OC \sin y = r \sin w$,
d'où : $r = OC \frac{\sin y}{\sin w}$ 9)

La longueur OC est donnée par 3), y par 7), w par 8).

Ainsi est calculé le rayon r de l'épicycle pour chaque planète.

Avec $R = MC = MA = 60^p$, Ptolémée a obtenu :
pour Mars $r = 39^\circ 30'$
Jupiter $r = 11^\circ 30'$
Saturne $r = 6^\circ 30'$ } valeurs que l'on trouve dans notre tableau 18.12

18.6.5 Détermination des mouvements moyens en anomalie

À la fin du § 18.6.3b nous avons vu que Ptolémée avait déterminé pour la planète Saturne à la date $t_2 = 8$ juillet 136 la valeur 6)

$$\alpha_2 = \alpha_{app} = 174^\circ 44'$$

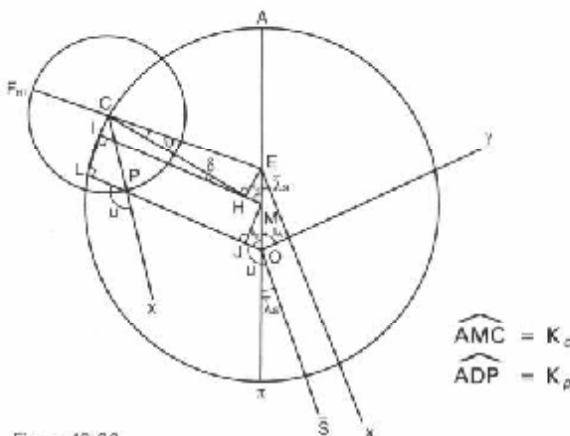


Figure 18.30

Il s'agit maintenant de déterminer pour la même planète une valeur de l'anomalie α_1 à une date antérieure t_1 . Ptolémée choisit le 1^{er} mars = 288.

Considérons la position C du centre de l'épicycle et la direction CP de la planète parallèle à OS, (fig. 18.30) S étant le Soleil moyen. Nous désignons par $\bar{\lambda}_S$ l'angle de la direction de OS avec la ligne des apsides, compté à partir du périhélie π . Cet angle $\bar{\lambda}_S = \widehat{\pi OS} = \widehat{\pi ES}$ croit uniformément avec le temps ; il peut être calculé puisqu'on connaît la vitesse moyenne \bar{v}_S du Soleil en longitude et la position du Soleil moyen \bar{S}_0 à « l'époque » t_0 .

De même l'angle $\bar{K} = \widehat{AEC}$ varie uniformément avec le temps et peut être calculé comme l'angle $\widehat{AEC}_1 = \bar{K}_{u_1}$ au § 18.5.2 b. La seule différence est que la vitesse de C pour Vénus est égale à \bar{v}_S , alors qu'ici $\bar{v}_1 = \bar{v}_e$ a été déterminée comme indiqué pour Saturne au § 18.3.3 (formule 11)).

Joignons MC, désignons par K_c l'angle \widehat{AMC} .

Joignons OP ; désignons par K_p l'angle \widehat{AOP} , ce dernier angle pouvant être observé.

Abaïssons de M la perpendiculaire MJ sur OP, Abaïssons de C la perpendiculaire CL sur OP, prolongé, Abaïssons de M la perpendiculaire MI sur CL.

Les perpendiculaires ainsi tracées forment le rectangle MJLI. Désignons par u l'angle :

$u = \widehat{SOP} = \widehat{SPX}$ où PX est parallèle à OS et par Ψ l'angle ECM. On peut écrire :

$$\bar{\lambda}_S = \gamma \widehat{OS} = \gamma \widehat{OA} + \widehat{AO\pi} + \pi \widehat{OS}$$

$$\bar{\lambda}_S = I_A + 180^\circ + \bar{\lambda}_S$$

$$\text{Or } I_p = \gamma \widehat{OP} = \gamma \widehat{OA} + \widehat{AOP}$$

$$I_p = I_A + K_p$$

Comme $u = \widehat{SOP} = x \widehat{PL}$, on a :

$$u = I_S - I_p$$

$$\text{soit : } u = 180^\circ + \bar{\lambda}_S - K_p \quad 10)$$

$\bar{\lambda}_S$ se calcule en fonction du temps, K_p est observé.

Or $IC = CL - IL = r \sin u - e \sin K_p$; en effet $IL = MJ = e \sin K_p$.

Si on désigne par δ l'angle CMI, on a :

$$\sin \delta = \frac{IC}{CM}$$

$$\text{d'où : } \delta = \arcsin \frac{r \sin u - e \sin K_p}{R} \quad 11)$$

Dans 11) r, e, R sont connus, u est donné par 10), K_p est observé.

Ayant ainsi obtenu δ on calcule :

$$K_c = K_p - \delta \quad 12)$$

$$EH = e \sin K_c \quad 13)$$

Dans le triangle CHE rectangle en H on a :

$$\sin \Psi = \frac{EH}{CH}$$

$$CH = CM - HM = R - e \cos K_c$$

En utilisant cette formule et les tables Alm XI-II *Neugebauer* (Bibl 5) a calculé pour Mars, comme il l'a fait pour Vénus, les longitudes écliptiques de 22 positions de Mars, correspondant à une boucle de rétrogradation de la planète, de 10 en 10 jours en l'année - 297.

Il a comparé ces longitudes à celles d'un calcul moderne : les écarts sont tous positifs et s'échelonnent de $+0^{\circ}27'$ à $+2^{\circ}5'$.

18.7 Stations et rétrogradations des planètes inférieures et supérieures

En 9.22 nous avons démontré le théorème d'*Apollonius* concernant la rétrogradation des planètes ; nous avons vu que pour qu'il y ait rétrogradation il faut que :

$$v_a > \frac{R-r}{r} v_c$$

Comme les mouvements en anomalie et en longitude sont uniformes nous pouvons mettre une barre sur v_a et sur v_c .

Pour Vénus on sait que $\bar{v}_a = 0,61651^{\circ}/\text{jour}$
et que $\bar{v}_c = 0,98564^{\circ}/\text{jour}$
(voir tableau 18.5). D'après le tableau 18.12 $R = 60^{\circ}$ et $r = 43^{\circ}10'$, de sorte que :

$$\frac{R-r}{r} = \frac{60^{\circ} - 43^{\circ}10'}{43^{\circ}10'} = 0,38996$$

$$\frac{R-r}{r} \bar{v}_c = 0,38437^{\circ}/\text{jour}$$

On vérifie qu'on a bien :

$$\bar{v}_a > \frac{R-r}{r} \bar{v}_c$$

Il y a donc bien rétrogradation pour Vénus : on démontre qu'il en est de même pour les autres planètes.

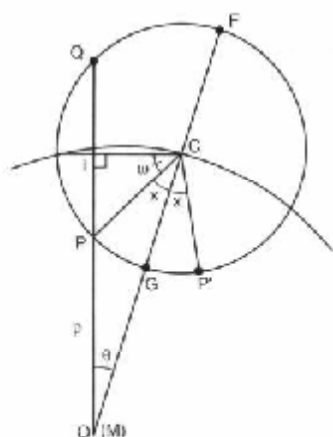


Figure 18.32

a) Centre de l'épicycle à moyenne distance

Reproduisons fig. 18.32 les éléments de la figure 9.13 du § 9.2.2. Posons $\widehat{PCO} = x$ et supposons que le centre de l'épicycle soit à moyenne distance lorsque $OC = HC = R = 60^{\circ}$.

Nous avons vu en 9.22 qu'on avait la relation

$$\frac{OP}{PI} = \frac{\bar{v}_a}{\bar{v}_c}$$

lorsque le point P est stationnaire. Nous poserons :

$$q = \frac{OP}{PI} = \frac{\bar{v}_a}{\bar{v}_c} \quad 1)$$

Or $OP \cdot OQ = R^2 - r^2$ et $OQ = OP + 2PI$, d'où :

$$OP(OP + 2PI) = R^2 - r^2 \quad 2)$$

Posons $OP = p$ et exprimons PI en fonction de p et de q . D'après 1) on a :

$$PI = \frac{p}{q} \quad 3)$$

En portant dans 2) cette valeur de PI , on a :

$$p \left(p + \frac{2p}{q} \right) = p^2 \left(1 + \frac{2}{q} \right) = R^2 - r^2$$

$$\text{d'où : } p = \sqrt{\frac{(R^2 - r^2)q}{q + 2}} \quad 4)$$

$$\text{Ainsi d'après 3) : } PI = \sqrt{\frac{(R^2 - r^2)}{q(q + 2)}} \quad 5)$$

D'autre part on a :

$$\sin \omega = \frac{PI}{r} \quad 6)$$

d'où on tire la valeur de ω :

$$\sin(\omega + x) = \frac{OI}{OC} = \frac{OP + PI}{R} = \frac{p + PI}{R}$$

$$\sin(\omega + x) = \frac{p + PI}{R} \quad 7)$$

On en déduit l'angle $\theta = \widehat{COP}$ par

$$\theta = 90^{\circ} - (\omega + x). \quad 8)$$

Les relations 6 et 7 donnent ω et $\omega + x$, d'où on pourra déduire l'angle x . On déterminera ainsi l'anomalie vraie du point stationnaire P par :

$$\alpha_p = 180^{\circ} - x. \quad 9)$$

Nous savons qu'il y a un 2^e point stationnaire P' symétrique de P par rapport à OC ; son anomalie vraie est :

$$\alpha_{p'} = 180^{\circ} + x. \quad 10)$$

Prenons l'exemple de Vénus que nous avons étudié en détail. En remplaçant \bar{v}_a et \bar{v}_c par leurs valeurs dans 1) on a : $q = \frac{\bar{v}_a}{\bar{v}_c} = \frac{0,61651}{0,98564} = 0,625492$, ou en système sexagésimal $q = 0,37^{\circ}31''$.

Si on remplace q par cette valeur dans 4) on obtient la valeur de p , puis par 5) celle de PI , par 7) l'angle x , par 8) l'angle θ .

Dans l'Alm XII-5 Ptolémée donne les valeurs ci-après à moyenne distance, à gauche, à distance minimale à droite.

	Moyenne distance	Distance minimale
q	$0,37^{\circ}31''$	$0,37^{\circ}31''$
p	$20^{\circ}20'11''$	$18^{\circ}45'16''$
PI	$32^{\circ}31'29''$	$33^{\circ}13'36''$
x	$12^{\circ}52'24''$	$11^{\circ}44'24''$
θ	$28^{\circ}14'6''$	$27^{\circ}55'49''$
Δt	$41^{(2/3)}$	$40^{(2/3)}$
Δl	$15^{\circ}17'34''$	$14^{\circ}4'38''$

Nous avons porté à la suite : le temps de rétrogradation Δt , et la différence de longitude Δl entre les deux stations obtenus comme suit : pour le temps de rétrogradation à moyenne distance, on a :

$$\Delta t' = \frac{2x}{v_u} = \frac{2 \times 12^\circ 52' 24''}{0^\circ,61651} = 41 / 76 \ 196$$

Ptolémée indique $41^{1/2}$.

La différence de longitude Δl entre les deux stations n'est pas l'angle 2θ car pendant le temps Δt le centre de l'épicycle s'est déplacé en longitude de :

$$2\delta = \Delta t \times \bar{v}_e$$

$$\delta = \frac{2x}{v_e} \times \bar{v}_e = \frac{2x}{q}$$

de sorte que l'axe de rétrogradation est :

$$\Delta l = 2(\theta - \delta)$$

Avec les données numériques de Vénus, à moyenne distance, on a :

$$\delta = \frac{x}{q} = \frac{12^\circ 52' 24''}{0,37' 31''} = 20^\circ 35' 18''$$

$$\Delta l = 2(28^\circ 14' 6'' - 20^\circ 35' 18'') = 15^\circ 17' 37''$$

Ptolémée indique $\Delta l = 15^\circ 17' 34''$.

b) Centre de l'épicycle à distance minimale et à distance maximale de O.

Ptolémée calcule ensuite les éléments de rétrogradation à distance minimale et à distance maximale. Contentons-nous d'indiquer que la distance minimale pour Vénus est $OC_m = R - e + 0^\circ 5' = 58^\circ 50'$ et qu'il obtient pour les valeurs des différents paramètres ceux que nous avons porté à droite de ceux qui concernaient la distance moyenne. Or c'est près de la distance minimale pour OC qu'ont lieu les deux stations P et P' de la trajectoire de Vénus de la figure 18.6.

Les deux stations sont proches des positions 4 et 12 de la planète, d'où un intervalle de temps $\Delta t' = (12 - 4) \times 5$ jours = 40 jours proches des $40^{1/3}$ correspondant à la valeur minimale de OC.

D'autre part si on mène de O les tangentes à la boucle en 4 et 12 on mesure au rapporteur un angle un peu supérieur à 14° , ce qui est conforme à la valeur de Δl de droite.

L'angle $\theta = \widehat{C_4 E 4}$ mesuré graphiquement est de 28° qui correspond très sensiblement à la valeur θ de droite.

Pour le point stationnaire p la valeur de l'angle x est d'environ 12° , d'où :

$$\alpha_p = 180^\circ - x \approx 168^\circ$$

Cette valeur est proche de $\bar{\alpha}_4 = 167^\circ 32' 18''$ soulignée en 18.5.2 a) pour la position V_4 ou 4 de Vénus qui semble donc être légèrement antérieur à p.

Sur le graphique de la figure 18.16 on mesure : $O 4 = 16,9$ mm très proche de la valeur de la distance minimale $p = 18^\circ 45' 16''$ correspondant à $16,88$ mm ($1^\circ = 0,9$ mm).

Enfin sur la figure 18.6 nous avons tracé l'épicycle de rayon r et de centre C_4 qui donne la position V_4 ou 4 de Vénus. Comme c'est M le centre du déferent il nous faut remplacer O par M pour l'application de la relation

$$1) q = \frac{OP}{\rho l} = \frac{\bar{v}_e}{v_e}$$

Joignons M4 qui rencontre l'épicycle en Q : soit l le milieu de Q : le rapport $q = \frac{OP}{\rho l}$ devient ici $q' = \frac{M4}{4l}$

Graphiquement on mesure $M4 = 18$ mm
 $4l = 29,2$ mm

d'où $q' = \frac{18}{29,2} = 0,617$, qui diffère légèrement de $q = 0,625492$.

À remarquer toutefois que si nous tenons compte du fait que le point stationnaire est un peu avant 4, la longueur MP sera supérieure à 18 mm, ce qui augmentera le rapport q' et le rapprochera de $q = 0,625492$.

18.7.1 Tables Alm XII-8 des stations des planètes

Nous reproduisons ci-après en notre tableau 18.33 un extrait des tables Alm XII-8 donnant les valeurs des anomalies α des points stationnaires (anomalies vraies ou corrigées) en fonction du paramètre \bar{K} définissant la position du centre C de l'épicycle. L'extrait a été choisi pour Vénus et pour les valeurs de \bar{K} encadrant celles qui correspondent à la boucle décrite par la planète fig. 18.16.

Tableau 18.33. Extrait de la table Alm XII-8 des stations des planètes
Vénus

1	2	3	4	anomalies corrigées
Nombres communs \bar{K}	Première station α	Deuxième station α		
150°	210°	168° 10'	191° 50'	
156	204	168 14	191 46	
162	198	168 17	191 43	
168	192	168 19	191 41	
174	186	168 20	191 40	
180	180	168 21	191 39	

On sait d'après 18.5.2.c) que :

le 26 oct - 305 pour V_3

$$\bar{K}_{C_3} = 159^\circ 54' \quad \bar{\alpha}_3 = 164^\circ 27' 21''$$

le 31 oct - 305 pour V_4

$$\bar{K}_{C_4} = 164^\circ 49' \quad \bar{\alpha}_4 = 167^\circ 32' 18''$$

le 5 nov - 305 pour V_5

$$\bar{K}_{C_5} = 169^\circ 45' \quad \bar{\alpha}_5 = 170^\circ 37' 16''$$

Les tables donnant l'anomalie vraie calculons

$$\alpha_3 = \bar{\alpha}_3 + \eta_3 \quad \alpha_4 = \bar{\alpha}_4 + \eta_4 \quad \alpha_5 = \bar{\alpha}_5 + \eta_5$$

le mode de calcul de $\eta_3 \eta_4 \eta_5$ étant le même que celui de η_{17} en 18.5.3. On trouve respectivement :

$$\eta_3 = 0^\circ 50' \quad \eta_4 = 0^\circ 38' \quad \eta_5 = 0^\circ 26' \text{ d'où :}$$

$$\alpha_3 = 165^\circ 17' \quad \alpha_4 = 168^\circ 10' \quad \alpha_5 = 171^\circ 3'$$

En système décimal on a donc au voisinage de la station P :

$$\begin{array}{ccc} V_3 & V_4 & V_5 \\ \bar{K}_{C_3} = 159,9^\circ & \bar{K}_{C_4} = 164,82^\circ & \bar{K}_{C_5} = 169,75^\circ \\ \alpha_3 = 165,28^\circ & \alpha_4 = 168,17^\circ & \alpha_5 = 171,05^\circ \end{array}$$

Portons les valeurs de \bar{K} en abscisses et celles de α en ordonnées pour obtenir le graphe de la figure 18.34

donnant d'une part la courbe (Γ_1) représentant les positions V_3, V_4, V_5 d'après les coordonnées ci-dessus, d'autre part la courbe (Γ_2) représentant graphiquement pour les premières stations de Vénus les données de notre table 18.33 (table Alm XII-8).

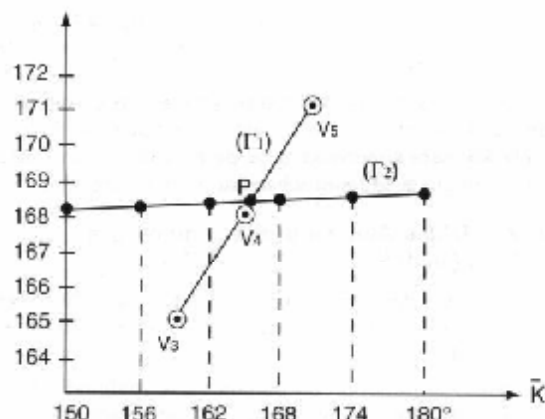


Figure 18.34

On voit que les deux courbes (Γ_1) et (Γ_2) se rencontrent au point P situé un peu après V_4 ; la 1^{ère} station de Vénus se produit donc peu après t_4 tel que :

$t_4 = t_1 + (4 - 1)5 = t_1 + 15$ jours. Comme t_1 est le 16 octobre - 305 (voir n° 18.5.2) t_4 correspond au 31 octobre - 305.

Un graphe analogue pour la deuxième station nous amènerait à calculer :

$$\begin{matrix} \bar{K}_{C11} & \bar{K}_{C12} & \bar{K}_{C13} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \end{matrix}$$

pour obtenir une courbe (Γ'_1) .

En utilisant les colonnes 2 et 4 relatives aux secondes stations on construit une courbe (Γ'_2) qui rencontre (Γ'_1) en un point P' situé au $\frac{1}{5}$ de l'intervalle $V_{12} V_{13}$

de sorte que la seconde station se produit au jour correspondant à V_{12} plus un jour puisque l'intervalle entre deux positions successives de Vénus est de 5 jours. Or $t_{12} = t_1 + (12 - 1) \times 5$; $t_2 = t_1 + 55$ jours. Comme t_1 est le 16 octobre - 305 il est facile de voir que $t_{12} = 10$ décembre - 305 de sorte que la station a eu lieu le 11 décembre de la même année.

On pourrait aussi calculer :

d'une part $l_{V2}, l_{V3}, l_{V4}, l_{V5}$

d'autre part $l_{V11}, l_{V12}, l_{V13}$.

On constaterait que l_{V4} est supérieur à l_{V3} et à l_{V5} et que l_{V12} est supérieur à l_{V11} et à l_{V13} .