CALCUL d'un point GPS approché

Claude Million

I - Introduction

Le calcul de la position des points relevés par le procédé GPS correspond à une multilatération par laquelle on mesure les distances d'un point de position inconnue à n points de positions connues qui sont les satellites.

La position des points connus est calculée à partir des messages d'éphémérides que transmettent chacun des satellites reçus. Ces positions sont donc nécessairement extrapolées.

Les éphémérides diffusées sont fournies aux satellites par les stations de poursuite militaires du système GPS ainsi que la correction d'horloge de chaque satellite donnée au moment de la mise à jour du message, ainsi que les paramètres permettant d'extrapoler ces données instantanées.

Les calculs de «multilatération» fournissent les trois coordonnées du point de réception inconnu et la correction de l'horloge du récepteur qui exprimée en mètres peut être assimilée à une quatrième coordonnée B. Les inconnues du point seront donc X,Y,Z, et B.

Le problème est que les relations d'observation reliant les mesures aux inconnues ne sont pas linéaires.

Pour compenser les multiples mesures qui sont généralement surabondantes on doit réaliser une linéarisation des observations ce qui est bien connu mais, aussi, disposer d'une valeur approchée de la position du point inconnu.

Au début de l'utilisation un tant soit peu courante des récepteurs GPS, on demandait à l'opérateur d'entrer manuellement une valeur approchée de la position du nouveau point, car, en itérant, le logiciel pouvait calculer des points approchés de plus en plus proches de la réalité ; puis on s'est aperçu que la position du point approché pouvait être «très approchée à quelques milliers de km près» quand on s'était avisé qu'un appareil utilisé précédemment aux Etats-Unis puis transporté en Allemagne, avec pour point approché le dernier point relevé, pouvait ne pas être initialisé de nouveau.

Par la suite, chacun a travaillé dans son coin à l'abri des logiciels de calcul pour lesquels les utilisateurs ne connaissaient pas les «sources», c'est un de ces bricolages qu'on voudrait décrire ici, ce n'est donc pas, et sans doute de très loin, la seule solution, mais c'est probablement la meilleure.

II - La transformation linéaire directe

Pour simplement faciliter la lecture des équations on prend un satellite particulier pour origine des coordonnées pour ce satellite on peut écrire l'équation d'observation suivante :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = (P - B)^2 \qquad (1)$$

Avec X, Y, Z, coordonnées du point inconnu et P pseudodistance mesurée, enfin B biais d'horloge, le tout exprimés en mètres, c'est-à-dire y compris le biais d'horloge B.

Avec P = p.C, et B = b.c, où p est la mesure du récepteur qui est exprimée en temps, et c vitesse de la lumière dans le vide. De même, b est le biais d'horloge inconnu exprimé en temps.

Si on écrit la même relation pour tout autre satellite s on aura :

$$(X - X_s)^2 + (Y - Y_s)^2 + (Z - Z_s)^2 = (P_s - B)^2 \qquad (2)$$

Avec les mêmes notations sinon que l'indice s se rapporte à chaque satellite s autre que celui pris pour origine des coordonnées.

En développant et en soustrayant 1 de 2 les termes carrés des inconnues disparaissent et on tombe sur une relation linéaire, les doubles produits entre les inconnues et les coordonnées connues, la résolution est donc possible.

$$2.X_s.X + 2.Y_s.Y + 2.Z_s.Z - 2\,(P_s - P).B = P_s^2 - P^2 + X_s^2 + Y_s^2 + Z_s^2 \qquad (3)$$

Comme on a quatre inconnues, on doit donc disposer des observations sur, au moins, cinq satellites pour établir quatre différences du type de (3).

III - Résolution

Il s'agit de résoudre un système de relations linéaires 4X4 non-symétrique. On dispose, très couramment, de sous-programmes de résolution matricielle pour les compensations par les moindres carrés ; seulement, dans ce cas, les relations à résoudre sont symétriques, c'est-à-dire que les termes $a_{ij} = a_{ji}$. On a contourné cette difficulté en normalisant notre système qui, dès lors, devient symétrique. Ceci est d'autant plus facile que les programmes de compensation par les moindres carrés comportent, aussi, des «modules» de normalisation (1).

On doit, pour rester concret, entrer dans des détails pratiques : Dans les récepteurs SERCEL de la série NR 10X, X étant un chiffre de 0 à 9, les sorties brutes des mesures se présentent comme suit :

%R 588 3924750

*1	68964247844	85884552	2	36	189	3
*2	68951919585	60070879	6	43	221	0
*3	68807354416	540696	12	52	72	0
*4	68863913324	2266724	13	49	78	0
*5	68917151229	99958660969	20	46	104	0
*6	68905374444	99995991506	21	47	74	0
*7	68872600291	58234961	23	48	120	0

Sur la première ligne %R indique qu'il s'agit d'une série de mesures de distances, le nombre qui suit est la semaine GPS qui est suivie, elle aussi, de l'heure satellite de départ du signal en dixièmes de seconde, chaque ligne suivante précédée d'une étoile (*) correspond au signal reçu par un satellite, dont l'identification se trouve dans la quatrième colonne de nombres, la première colonne n'indique que le numéro du canal de réception, la seconde l'heure d'arrivée du signal, le premier chiffre étant celui des secondes, en heure du récepteur, évidemment ; enfin la troisième à la mesure de la phase du signal.

Pour traduire les temps en distances il faut remarquer que l'unité du premier chiffre de la seconde colonne représente exactement 299.792.458 m, par conséquent le dernier représente environ 3 cm. Le décalage entre l'heure du récepteur et celle du satellite est trop grand pour que, converti en mètres, on l'introduise dans les calculs ; on prend le parti d'ignorer les secondes et les dixièmes de secondes de l'heure du récepteur, il n'y a aucun inconvénient à prendre les dixièmes de seconde indiqués par l'heure satellite de départ du signal, d'autant que le temps de parcours du signal est toujours inférieur au dixième de seconde : Il est compris entre 20.200 et 25.800 km. Mais ceci n'est pas sans poser quelque problème comme va le montrer le lot de mesures suivant, faites à l'autre terme de la base, au même instant :

%R 588 3924750

*1	94223638697	922286106	6	45	164	0
*2	94079066642	99884395201	12	54	81	0
*3	94135631944	99493176885	13	49	126	0
*4	94188862406	99059353964	20	48	105	0
*5	94177083831	99677049256	21	47	70	0
*6	94144309932	397535728	23	52	90	0

En effet, si on abandonne les deux premiers chiffres de la mesure (les secondes et les dixièmes de secondes du récepteur) et si on ne calcule des pseudodistances qu'avec les chiffres suivants, on n'obtient pas des valeurs réalistes (2.400 km), c'est-à-dire voisines des valeurs des distances géométriques (20.200, 25.800 km), en sorte que, selon le cas, on ajoute, ou on retranche, un dixième de seconde soit 29.979.245,80 m.

IV - Un exemple

On va donner un exemple de calcul, mais, pour simplifier le travail et le réduire à la partie qu'on vient de traîter, on a, au préalable, calculé les données qui ne sont pas, dans la pratique aussi facilement accessibles.

Ces données sont les positions des satellites au moment du départ du signal ; elles sont calculables à partir des messages des satellites : les éphémérides, l'état de l'horloge du satellite, c'est-à-dire son décalage par rapport au temps GPS, donnée absolument nécessaire pour calculer la position réelle du satellite au moment du départ du signal, les messages relatifs aux corrections ionosphériques et troposphériques ne sont pas utilisés, car ils supposent connue la position du point de réception, alors que c'est cette position que nous cherchons à calculer. Les résultats seront entachés de toutes les erreurs de réfraction.

Ces données sont X, Y, Z les positions du satellite de base et des satellites courants en coordonnées géocentriques, T le décalage, exprimé en mètres, de l'horloge du satellite par rapport au temps GPS, et P la pseudodistance mesurée entre le récepteur et le satellite.

	satellite de base	satellites courants			
	0	1	2	3	4
X :	-6.448.540,98	2.751.436,63	12.143.659,04	14.058.197,19	20.440.353,60
Y :	19.669.923,17	24.139.377,57	-6.394.983,53	18.190.177,59	-16.936.828,89
Z :	16.399.518,79	10.380.267,36	22.793.115,73	13.167.308,26	-1.228.530,10
T :	-9.781,84	-77.426,20	8.460,82	160.091,68	21.447,95
P:	28.907.423,13	28.537.831.12	24.203.876,49	25.899.469,89	27.495.502,13

Les résultats :

X : 4.334.135,27

Y : -112.767,21

Z : 4.661.787,99

B : 3 .494.945,70 (décalage de l'horloge du récepteur par rapport au temps GPS, noter qu'on fait déjà une première correction, avant calcul, voir immédiatement plus haut).

Ce qui se traduit, en termes de coordonnées géographiques, par :

Latitude : 47°05'30"03

Longitude : 358°30'34"44

Altitude : -348,57 m (L'altitude est trop faible car les distances sont trop longues du fait de la réfraction).

Pour contrôle, après compensation on a obtenu :

Latitude : 47°16'06"6442

Longitude : 358°30'32"5887

Altitude : 119,34 m

(1) Ces sous-programmes sont dus à Y. EGELS.

V - Conclusions

Bien qu'on détourne de leur objet des outils logiciels des moindres carrés, ce n'est pas pour cela qu'on obtient un résultat correct du point de vue stochastique.

En effet, comme on fait intervenir quatre fois le satellite de base pour une seule fois les satellites courants, on lui donne donc un poids correspondant au nombre d'utilisations. Cela nous a mené à rechercher le meilleur satellite de base : Ce serait celui qui serait le moins entaché des erreurs de réfraction, donc le plus haut au-dessus de l'horizon, donc celui dont la distance au récepteur est la plus courte ; ce qui est très facile, mais n'avait pas été fait dans l'exemple donné.

Le programme utilisé est très simple, on va donner la liste des sous-programmes dont les noms suffisent à expliquer ce qu'ils font :

Programme CalculPointInitial ;
CreeMatriceNormale; (matrice 4X4)
RemiseaZero; (les termes de la matrice sont mis à 0)
Faire cinq fois :
LecturedesDonnees ;
Si i différent de O Faire :
Relations; (calcule les relations d'observation (3))
Normalisation; (normalise les relations et place les termes en les sommant dans la matrice normale)
Resolution ;
AfficheCoordonneesGeographiques ;
Fin.