

GÉOMÉTRIE ET GÉODÉSIE

Par André Fontaine

RÉSUMÉ

Ce panorama historique des problèmes posés par la mesure de la Terre a pour objectif de montrer tout l'intérêt qu'il y a de conserver les méthodes de la géodésie pour le traitement des observations GPS. En effet, seules ces méthodes permettent à tous les utilisateurs locaux de disposer pour toute la France et même l'Europe, d'un jeu unique de coordonnées planimétriques qui donnent directement les distances horizontales ramenées au niveau zéro. On évite ainsi la correction d'homothétie variable due aux hauteurs du géoïde au dessus de l'ellipsoïde, qui perturbe l'homogénéité des coordonnées géométriques et qui débouchera sans nul doute sur un désordre néfaste.



Cet article voudrait seulement remettre en mémoire quelques notions connues, mais qui, après plusieurs siècles d'application pratique, se sont estompées derrière les réalisations dont elles sont le fondement. En particulier, on a un peu

oublié que la géodésie et la cartographie n'ont pas pour objectif de décrire la surface topographique, mais d'en construire un modèle mieux adapté aux occupations des hommes qu'une stricte représentation géométrique. Faute de se souvenir de ce point primordial et en raison des résultats issus du traitement des données satellitaires, on trouve jusque dans des textes normatifs des explications et des définitions dont le moins qu'on puisse dire est qu'elles manquent profondément de rigueur.

On va donc essayer dans ces quelques paragraphes de débrouiller l'écheveau des fils de la géodésie et de la géométrie, qui ne sont embrouillés qu'à cause de l'emploi de termes mal choisis. Par exemple, en ce qui concerne les calculs de positions de points à la surface de la Terre calculées à partir de mesures sur satellites, il serait plus heureux de parler de "géométrie spatiale" plutôt que de "géodésie spatiale", ce qui éviterait l'incompréhension qui entoure parfois l'usage des coordonnées cartésiennes ainsi obtenues. Réciproquement le modèle géodésique ne conduit à une représentation géométriquement correcte de la surface topographique qu'à condition de se borner à une zone de superficie restreinte.

LA GÉODÉSIE

La mesure des terres apparut dès les premières sociétés administrées et elle engendra la géométrie. En quoi donc la mesure de la Terre est-elle fondamentalement si différente qu'on ait crû bon de créer un nouveau

mot ? Le terme "géodésie" naît au 17^{ème} siècle avec les premières triangulations, ce qui montre qu'historiquement a été taxé de travail géodésique le fait de déterminer les positions relatives de points éloignés en les reliant entre eux par divers mesurages (d'angles ou de distances) de portée limitée. Pour déduire les coordonnées des points finaux de celles des points initiaux, on raboute les résultats des observations effectuées aux points intermédiaires.

La géodésie a comme première caractéristique de progresser à petits pas pour aller loin.

Mais la Terre est ronde et, dans cette démarche, il faut tenir compte de sa courbure. Les calculs en sont compliqués; faut-il pour autant introduire un mot nouveau puisqu'il existe une géométrie dans l'espace ou une géométrie des surfaces ? Que s'est-il donc passé ?

La précision des mesures s'étant améliorée, on a été obligé d'admettre que la surface topographique ne devait plus être considérée comme une surface géométrique simple (sphère), ce qui sautait aux yeux mais avait pu être négligé jusque là. Pourquoi, dès lors, ne pas en être venu à une détermination directe des coordonnées cartésiennes des points de la surface topographique par calcul des différences de coordonnées (dX, dY, dZ) entre les différents points de cette surface ? Pour deux raisons simples :

on ne disposait pas des appareils capables de le faire avec précision,

la connaissance géométrique de la surface topographique était sans intérêt pratique.

Etant donné les seuls instruments optiques disponibles aux 17^{ème} et 18^{ème} siècles, calculer des différences de coordonnées cartésiennes eut demandé de pouvoir déterminer les cosinus directeurs de la direction du point visé. Or, très rapidement, on s'aperçut qu'en raison de la réfraction atmosphérique, cette mesure était imprécise dans le plan vertical du point de station passant par le point visé. Il fallut donc se contenter du mesurage d'angles de plans verticaux; la verticale jouait un rôle primordial.

Vers la même époque, la théorie de la gravitation

avait fait apparaître une notion nouvelle, la différence de potentiel, qui est liée au travail reçu ou fourni quand on passe d'un point à un autre et dont la connaissance est, du point de vue des activités humaines, bien plus intéressante que celle de coordonnées géométriques.

Tout naturellement, on fut conduit à prendre une surface équipotentielle comme référence et à découper la géodésie en deux parties indépendantes. A tout point de la surface topographique, on associe :

une longitude et une latitude, ces deux coordonnées étant calculées de façon telle que les distances, mesurées dans l'espace et ramenées à l'horizontale au niveau zéro, soient conservées sur la surface de référence, en l'occurrence d'abord assimilée à une sphère, puis à un ellipsoïde de révolution

une altitude, cette troisième coordonnée étant égale à la distance du point dans l'espace à la surface de référence.

Cette partition en planimétrie et altimétrie constitue le véritable acte de naissance de la géodésie. Les grandeurs définies ci-dessus n'ont plus les caractéristiques de coordonnées géométriques dans un trièdre de référence orthonormé. Pour simplifier le langage, on parlera d'*espace géodésique* pour désigner l'ensemble des longitude, latitude et altitude d'un point et d'*espace géométrique* pour désigner l'ensemble de ses trois coordonnées cartésiennes.

Il faut toujours garder à l'esprit que la géodésie attribue à tout point de la surface topographique un *point correspondant* sur la surface de référence sans qu'on connaisse le vecteur qui joint ces deux points. De là, vient toute l'impossibilité du passage de la géodésie à la géométrie.

DEUX SIECLES DE TRANQUILITÉ

Les bases posées au milieu du 18^{ème} siècle, la géodésie s'est développée et a fourni aux usagers les coordonnées qui répondaient à leur attente. Il était clair pour tous que l'ellipsoïde de référence choisi n'était qu'un artifice de calcul pour tenir lieu de surface équipotentielle de niveau zéro, laquelle prit au début du 19^{ème} siècle le nom de géoïde. Cet artifice, parfaitement en accord avec la précision des mesures, présentait l'avantage d'une élaboration facile de cartes et de plans. Sur de vastes territoires les géodésiens calculèrent des réseaux géodésiques et localement, à partir des coordonnées qu'ils diffusaient, les géomètres firent en toute quiétude de la géométrie. " *Tout était pour le mieux dans le meilleur des mondes*".

LA GÉODÉSIE TRIDIMENSIONNELLE

Les progrès en précision et l'imagination des géodésiens poussèrent à ne pas en rester là et à s'intéresser à la forme du géoïde. Rien de plus justifié. Au cours de la première moitié du 20^{ème} siècle commencèrent à se répandre des cartes de hauteur du géoïde par rapport à un ellipsoïde de référence. Ces cartes, établies par diverses méthodes, le furent à l'IGN par astrogéodésie.

D'un autre côté, certains remarquèrent : "tous les mesurages géodésiques portent sur des éléments géométriques simples (angles entre plans verticaux ou distances); alors pourquoi toutes ces corrections pour se ramener à des calculs sur l'ellipsoïde de référence et pourquoi ne pas faire appel aux formules de la géométrie dans l'espace ?". Aussitôt pensé, aussitôt fait; ainsi pris corps la géodésie tridimensionnelle.

Mais tant qu'on considère qu'on travaille sur une surface, lieu des points tels :

qu'ils sont situés sur la normale à l'ellipsoïde de référence en leurs points correspondants à une distance de cette dernière surface égale à leur altitude,

que les différences des coordonnées planimétriques de leurs points correspondants sur l'ellipsoïde donnent directement les distances horizontales au niveau zéro,

on ne change rien aux hypothèses de la géodésie et les résultats obtenus par voie tridimensionnelle sont rigoureusement identiques à ceux établis par ce qu'on pourrait appeler la méthode de calcul traditionnelle. On en trouve un exemple à l'IGN dans la dernière compensation du réseau tunisien.

Même si la géodésie tridimensionnelle ne touche en rien aux concepts fondamentaux, l'emploi des formules simples de la géométrie dans l'espace tend à accréditer l'idée que l'espace géodésique est identique à un espace géométrique.

LA GÉOMÉTRIE SPATIALE

Le grand bouleversement est tombé du ciel. Dès les débuts des lancements de satellites artificiels, les Américains mirent sur orbite des satellites ballons capables de réfléchir la lumière du soleil ou des satellites à flashes qui furent les uns et les autres photographiés sur le fond des étoiles. On avait ainsi par l'intermédiaire de ces points hors de l'atmosphère des relais pour atteindre des points éloignés à la surface de la Terre; on put même franchir les mers et les océans. Apparemment, rien de très révolutionnaire. Pourtant, ces méthodes optiques sortaient du champ de la géodésie. En effet,

on ne progressait pas à petits pas,

les mesures sur photographies donnaient les cosinus directeurs de la direction du satellite, puisque la réfraction pour un objet hors de l'atmosphère est calculable avec précision (réfraction astronomique).

Les nécessités qui avaient présidé à la naissance de la géodésie étaient supprimées : on faisait de la géométrie. Mais en même temps, on incluait ces nouvelles techniques dans la géodésie qu'on qualifiait de spatiale. On peut chercher les raisons de l'emploi de ce vocabulaire défectueux dans les conditions de l'époque :

d'une part, la mise en œuvre des nouvelles méthodes demandait des moyens importants dont seuls disposaient les services d'Etat,

d'autre part, pour pratiquer et contrôler la géométrie spatiale, il fallait s'appuyer sur des coordonnées

AERIAL, toutes vues aériennes.

consultez l'Annuaire Electronique

Nom : AERIAL

Loc. : AIX

Dépt. : 13



connues, homogènes sur des territoires étendus et nécessairement issues des réseaux géodésiques existants.

Quoiqu'on sut que cette opération était en toute rigueur impossible, on détermina à partir des points géodésiques des points dont on admit qu'ils étaient sur la surface topographique. Comme on possédait des cartes de la hauteur du géoïde par rapport à l'ellipsoïde de référence, on ajouta cette hauteur à l'altitude du point pour obtenir la cote de la surface topographique par rapport à l'ellipsoïde, ce qui était juste. Mais on posa aussi que le point correspondant et le point de la surface topographique étaient situés tous deux sur la même normale à l'ellipsoïde à une distance égale à cette cote, ce qui était faux. Cette méthode fut employée pour calculer des coordonnées trirectangulaires déduites des coordonnées géodésiques et ainsi de les comparer à celles de la géométrie spatiale, car on estimait que les erreurs introduites étaient inférieures à l'imprécision des réseaux géodésiques.

Ce qui n'était qu'un pis-aller fut peu à peu érigé en panacée si ce n'est en vérité. Pourtant cette méthode revient à faire sur toutes les distances une homothétie parasite et variable qui altère les longueurs dans une proportion égale au rapport de la hauteur du géoïde sur le rayon de la Terre, ce qui dans bien des cas a des effets loin d'être négligeables. Ainsi, le réseau Europe 50 souvent pris pour base des comparaisons est associé à un géoïde dont les hauteurs dépassent 30 mètres dans le sud de l'Espagne, de l'Italie et de la Grèce. Par exemple, dans l'étude des compensations d'un réseau européen de géométrie spatiale, qui comportait des photographies de flashes et des mesures de distances par échos laser sur satellite, il était conclu à l'existence d'une altération des longueurs de 1/200 000 par rapport au réseau Europe 50 alors que cette valeur est justement égale à celle qui résulte de l'homothétie parasite apportée aux points du sud de l'Europe.¹

On en vint même pour comparer deux réseaux géodésiques entre eux, par exemple la Nouvelle Triangulation de la France et l'Europe 50, par commencer à les transformer en coordonnées trirectangulaires pour calculer en chaque point leurs écarts linéaires et diffuser presque officiellement la moyenne de ces écarts comme étant le vecteur à utiliser pour passer d'un système à l'autre. Pourtant, les projections stéréographiques polaires de chacun des deux réseaux à partir d'un point commun au centre de la France auraient fourni un résultat aussi simple (un vecteur en coordonnées planes cartésiennes) et plus correct puisque non entaché de l'homothétie parasite inhérente aux coordonnées trirectangulaires issues de coordonnées géodésiques.

LA TENTATION DE L'ABANDON DE LA GÉODÉSIE

Depuis quelques années, grâce au système GPS, la géométrie spatiale a atteint une précision qui surclasse les réseaux géodésiques actuels. La tentation est donc grande d'oublier tous les errements passés, de déclarer périmées les réalisations anciennes et de les remplacer

par des réseaux géométriques.

La situation est totalement inverse de celle du 18^{ème} siècle, on ne ferait plus que de la géométrie. Cependant on rencontre quelques difficultés, car il est impensable que, pour les travaux les plus courants (implantation d'ouvrages, adduction d'eau, réseaux urbains,...), les géomètres ne disposent plus des données habituelles qui leur sont indispensables : les distances horizontales au niveau zéro et les altitudes. Pour les altitudes, on peut admettre que, pour l'instant, on continuera à les déterminer par nivellement de précision. Pour les distances horizontales au niveau zéro, on projette (au sens géométrique de ce verbe) le point de la surface topographique sur un ellipsoïde de référence, mais on se heurte alors en sens inverse à l'homothétie parasite due à la hauteur du géoïde et les coordonnées planimétriques ainsi calculées donnent une distance qu'il faut localement corriger de cette homothétie.

La géométrie spatiale est capable de progresser à grands pas et de fournir des coordonnées cartésiennes dans un système unique pour toute la Terre, mais son utilisation dans les travaux d'aménagement oblige à prévoir un découpage en facettes peu étendues, si on désire appliquer la même homothétie au sein de chacune d'elles. Quelle que soit la simplicité de cette opération, elle n'en revient pas moins à la création de systèmes locaux avec tous les inconvénients bien connus que comporte cette solution.

LE RETOUR AUX SOURCES

La géodésie, comme on l'a déjà expliqué, consiste à découper le géoïde en une multitude de petites facettes et à les rassembler sur une surface de référence, un ellipsoïde de révolution; on applique ainsi le géoïde, surface inconnue, sur une surface mathématiquement bien définie. Grâce à cette méthode, on avait pu déterminer pour des territoires étendus un seul système de coordonnées géodésiques, qui conservait les distances horizontales au niveau zéro entre les points correspondants, mais qui ne permettait pas de remonter à une connaissance précise de la surface topographique. La géométrie spatiale ayant les propriétés contraires, on a intérêt à cumuler les qualités des deux méthodes.

Actuellement, l'IGN procède à la détermination d'environ 1 000 points répartis dans tout l'hexagone. Même s'il s'agit de mesurages à partir des satellites GPS, donc de l'obtention de coordonnées géométriques, on constate qu'on est revenu à une progression à petits pas. On ouvre ainsi la porte à une utilisation géodésique des résultats des mesures. Rien n'empêche en effet de transformer les dX, dY, dZ, calculés à partir des observations entre les points, en distances horizontales au niveau zéro et en azimuts, pour introduire ces deux types de données dans une compensation particulière et obtenir des coordonnées planimétriques munies des vertus géodésiques. Cette façon de procéder a d'ailleurs été utilisée pour la compensation des observations relatives à la figure de mise en place du tunnel sous la Manche.

¹ voir la brochure IGN, Groupe de Recherche de Géodésie Spatiale, intitulée "Compensations RCP G", par A. Fontaine, février 1973

Une dernière question se pose : en admettant le 1/1 000 000 comme précision à respecter, l'application du géoïde sur l'ellipsoïde, qui ne peut s'effectuer sans déformation, est-elle compatible avec cette précision ? Supposons que pour aller d'un point A à un point B, on emprunte deux chemins, la ligne directe ou le passage par un point C tel que le triangle ABC soit équilatéral. Prenant la distance AB égale à 64 kilomètres, on montre facilement que ces deux parcours, posés égaux sur le géoïde, ont un écart de 5 millimètres, lorsqu'on les calcule sur une surface dont le rayon de courbure diffère de 1 kilomètre par rapport à celui du géoïde, ce qui représente une précision légèrement supérieure au 1/10 000 000 pour une différence de courbure assez facile à atteindre.

Donc, même avec des mesures GPS, la géodésie reste la meilleure méthode pour déterminer à l'échelle d'un pays et probablement de l'Europe un système unique de coordonnées planimétriques utilisables localement sans correction par les géomètres.

CONCLUSIONS

Rendons à la géométrie ce qui appartient à la géométrie et à la géodésie ce qui appartient à la géodésie.

On propose donc de calculer et de gérer pour chaque point deux types de coordonnées, utilisés indépendamment l'un de l'autre,

- des coordonnées cartésiennes géométriques, X, Y, Z,
- des coordonnées géodésiques : d'un côté une altitu-

de, de l'autre des coordonnées planimétriques résultant d'une compensation particulière des observations de la géométrie spatiale.

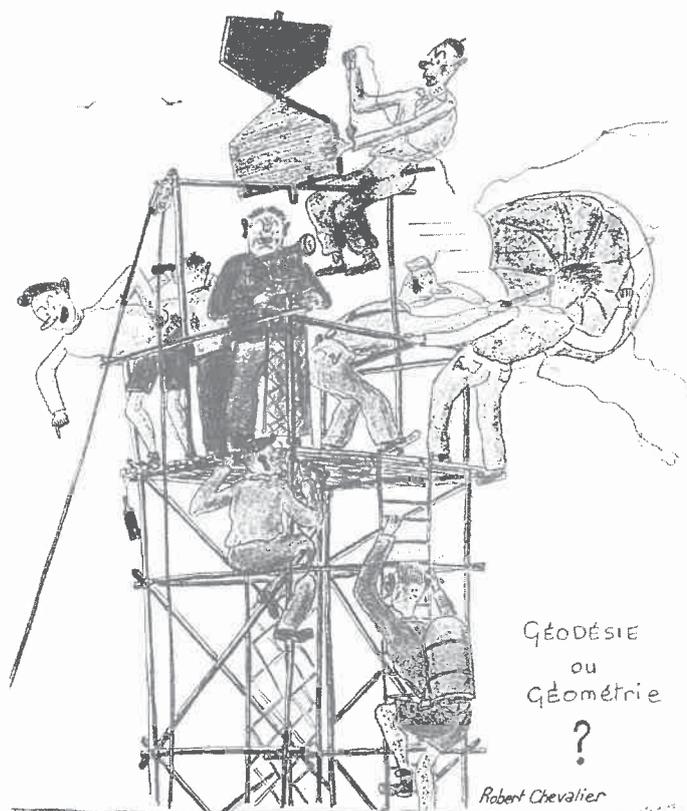
Ainsi, le plus grand nombre des utilisateurs, disposant d'un réseau géodésique très précis, n'aura pas à changer ses procédés de calcul, que ce soit à partir des mesures traditionnelles (angles, distances) ou à partir des mesures GPS de géométrie spatiale transformées en distances horizontales et azimuts. De plus, les coordonnées géodésiques n'étant pas influencées par la forme et la position du géoïde resteront stables quelles que soient les améliorations qui, dans l'avenir, ne manqueront d'être apportées à la détermination de cette surface.

Les utilisateurs pour qui la géométrie est indispensable (trajectoires des satellites, mouvements tectoniques, études des océans, ...) trouveront eux aussi les coordonnées qui leur conviennent.

Seuls les services publics chargés actuellement d'élaborer et de gérer les réseaux géodésiques verront leurs tâches très légèrement accrues, encore qu'il ne faille pas exagérer cette surcharge puisqu'il s'agira à partir des mêmes observations d'effectuer deux compensations séparées, ce qui à l'ère des ordinateurs est pratiquement négligeable.

Ainsi, on voit qu'aujourd'hui rien ne s'oppose à cumuler les propriétés complémentaires de la géodésie et de la géométrie pour le plus grand bien de tous.

Octobre 1994



REPertoire DES ANNONCEURS N° 61

AERIAL	32
ALGADE	24
BSPLINE	40
BURNAT	46
CARL-ZEISS	38-39
DIEUTEGARD	74
DOREL	75
ECOLE CHEZ SOI	16
EUROBORNES	16
GEOID	29
GEOIDE SYSTEMES	19-21
GEOMETRI-INFORMATIQUE ..	45
HEWLETT-PACKARD	70
JS INFO	28
LEICA	2
MGI	42
PENTAX	48
SETAM-INFORMATIQUE	12
SNCF	9
SOKKIA	52
TELLURA	22
TOPCON-SLOM	37
GEOTRONICS	2° couv.
ARO-FRANCE	3° couv.
TOPO CENTER	4° couv.