

Causerie Historique

EPPUR, SI MUOVE !

OU

À PROPOS DE GALILÉE

par Robert VINCENT

*Ingénieur de l'Ecole Centrale des Arts et Manufactures
Président honoraire de l'Association Française de Topographie*

RÉSUMÉ

Les preuves mécaniques de la rotation de la Terre ont déjà par le passé fait l'objet de nombreuses publications. Mais l'auteur, en brossant l'histoire des expériences sur la déviation de la chute d'un corps et sur la rotation du pendule, lâchés l'un comme l'autre sans vitesse relative par rapport à la Terre, tente d'ajouter ici sa contribution sur des aspects peu ou pas explicités jusqu'à présent, en montrant que, dans le référentiel terrestre, des phénomènes sont *indépendants* de la rotation de la Terre :

- dans sa chute, un corps "abandonné à sa pesanteur" *se dirige à chaque instant vers le nadir du lieu où il se trouvait au moment du lâcher;*
- dans ses oscillations, la boule du pendule décrit une *hypocycloïde* et son *azimut varie à chaque instant uniformément comme celui des étoiles situées à l'horizon du lieu.*

ABSTRACT

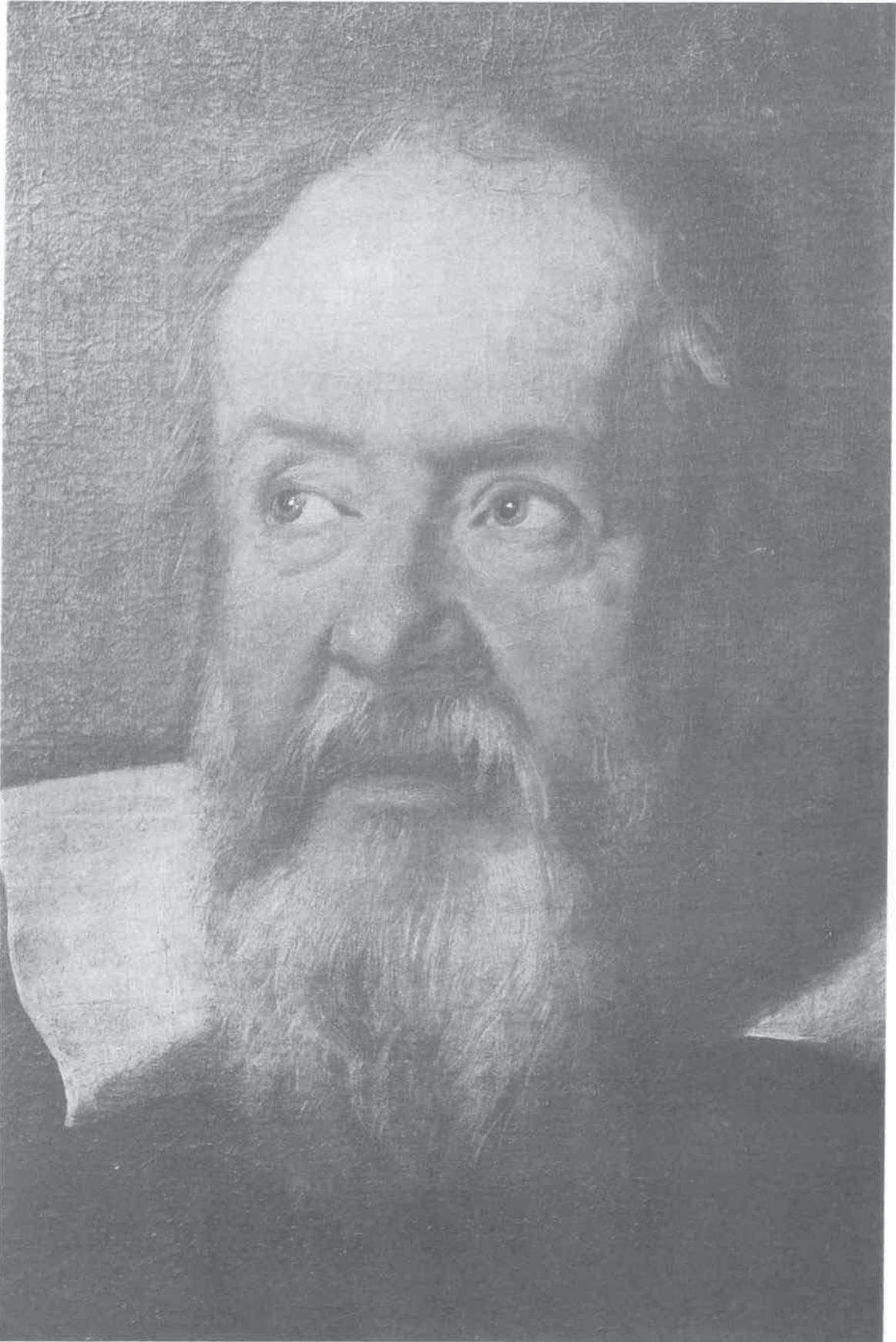
The mechanical evidences of the Earth rotation have already been the subject of many publications in the past. But, by painting the history of experiments on a body fall variation and on the pendulum rotation, both released without relative speed with regard to Earth, the author is trying to bring his participation on aspects that were not very clarified up to now, by showing that in Earth reference system, some phenomena are independent of the Earth rotation :

- within its fall, a body "abandoned to its own gravity" *makes at every moment for the nadir of the place where it was at the time of the release,*
- within its swings, the pendulum ball makes an *hypocycloid*, and *its azimuth uniformly varies at every moment, as the one of stars on the place horizon.*

ZUSAMMENFASSUNG

Die mechanische Beweise der Erdumdrehung waren schon in der Vergangenheit Gegenstand vieler Veröffentlichungen. Aber der Verfasser, die Geschichte der Experimente über die Abweichung des Fallens eines Körpers und die Umdrehung des Pendels, losgelassen einer wie der andere ohne verhältnismässige Geschwindigkeit, skizzierend, versucht hier einen Beitrag über die bis jetzt weniger oder nicht ausgedrückten Ansichten vorzubringen, indem er zeigt dass im irdlichen Bezugssystem die Erscheinungen unabhängig der Erdumdrehung sind :

- in seinem Fallen, ein in seiner Schwere überlassenen Körper *richtet sich nach dem Fusspunkt des Ortes wo er war im Moment der Loslassung,*
- in seinem Schwingen, beschreibt die Pendelkugel eine *Unterkreisellinie (hypozykloid)* und *sein Azimut verändert sich gleichmässig jeden Augenblick wie der der im Horizont des Ortes befindlichen Sternen.*



Le meilleur portrait de Galilée âgé, par Sustermans, peintre flamand vivant à la cour des Médicis.
(Galerie des offices - Florence).

EPPUR, SI MUOVE !

Et pourtant, elle est mobile!

Cette célèbre phrase est prêtée à Galilée, après qu'il eût été forcé de faire amende honorable pour avoir proclamé, comme Copernic en avait fait l'hypothèse un siècle plus tôt, que la Terre n'était pas immobile au centre de l'Univers, contestant ainsi la lettre des Écritures.

Galilée réfutait avec autant d'esprit que de force les objections que lui faisaient entre autres les aristotéliens - appelés aussi péripatéticiens en raison de ce qu'Aristote enseignait en marchant ! - opposés à la thèse de la rotation de la Terre sur elle-même et autour du Soleil. La principale objection fut de tout temps l'absence de parallaxe annuelle des étoiles qui aurait dû être décelable si la Terre tournait autour du Soleil. On n'imaginait pas que les étoiles fussent si éloignées ! Logique avec ses conceptions, Galilée avait prédit l'existence de ces parallaxes stellaires. Une autre objection était que si la Terre tournait sur elle-même, un corps en tombant serait dévié vers l'Ouest puisque, pendant le temps de la chute, le sol se serait déplacé vers l'Est !

Les instruments astronomiques les plus précis étaient alors entre les mains de Tycho Brahe, l'aîné de Galilée de 18 ans et le plus habile des astronomes de son temps. Or, celui-ci n'accepta jamais le système de Copernic pour les objections citées ci-dessus, mais aussi parce qu'en contradiction avec les affirmations de la Bible.

Galilée ne pouvait donc espérer convaincre que par des preuves terrestres, sans recours aux observations astrales. Deux siècles plus tard, ces preuves qui lui manquaient alors, ont été apportées par des expériences tout à fait probantes que nous nous proposons d'évoquer ici.

Avant Galilée, on croyait que la vitesse d'un corps qui tombe était proportionnelle à son poids d'une part, et à l'espace parcouru d'autre part.

En arrivant un matin de 1583 dans la cathédrale de Pise, Galilée, qui avait alors 19 ans, considérant le balancement des lustres à chandelles, tous de même hauteur, que le sacristain venait d'allumer, et constatant que les grosses comme les petites mettaient le même temps pour faire une oscillation, en conclut que, quel que soit leur poids, les corps tombent également vite, et plus tard, étudiant le mouvement du pendule, énonça que la durée d'oscillation était proportionnelle à la racine carrée de sa longueur.

Par l'étude du roulement de balles dans des gouttières inclinées, il énonça en 1590 que la vitesse de chute des corps était proportionnelle au temps et l'espace parcouru à son carré.

En introduisant les mathématiques pour l'explication des lois physiques, Galilée jetait ainsi, il y a quatre siècles, les bases de la mécanique moderne.

Galilée attachera son nom aux premières lunettes [7]. Pourtant Giovanni Battista Della Porta (1535-1615), noble napolitain, fit construire vers 1590 des lunettes d'approche, sans doute trop rustiques pour intéresser

d'emblée les scientifiques. Elles étaient constituées par l'assemblage d'une lentille convexe (objectif convergent) et d'une lentille concave (oculaire divergent) de même diamètre. L'idée fut reprise en 1604 à Middelbourg en Hollande et fit l'objet d'une construction avec demande de brevet en 1606, mais la qualité de l'optique reste médiocre. De là, la connaissance se répandit rapidement en Europe à partir de 1608.

En France, les envoyés extraordinaires du roi Henri IV auprès des États généraux de Hollande, considérant l'intérêt stratégique de l'invention, mais n'ayant pu, pour cette raison, s'en procurer une réalisation, envoyèrent à leur monarque dès le 28 Décembre 1608 une lettre par un messenger qui, de plus, avait été mis au courant de la construction des lunettes. Le roi répondit aussitôt, le 16 Janvier 1609 : *Je recevrai avec plaisir les lunettes dont vous me parlez, bien que j'aie beaucoup plus besoin en ce moment d'un instrument pour voir clair dans les choses qui me touchent de près que dans celles qui sont éloignées.* Le bon roi Henri, hélas, voyait juste ! Il fut assassiné l'année suivante.

En Italie, l'invention arrive en 1609 et des lentilles parfaites sont fabriquées à Venise avec les meilleurs verres. Galilée peut ainsi construire des lunettes d'une puissance inégalée ; il dirige alors sa lunette vers la Lune et y observe montagnes, vallées, cratères et plaines, puis vers la voûte céleste où il découvre un très grand nombre d'étoiles, ensuite vers Vénus et en décèle les phases annoncées par Copernic, et surtout le 7 Janvier 1610 vers Jupiter et lui découvre trois satellites puis un quatrième le 13 Janvier. Il a sous les yeux un système solaire en miniature qui le conforte dans sa conception de l'univers.

Remarquons toutefois que cette lunette, que nous appelons depuis lunette de Galilée, ne permet que des observations qualitatives. Plus tard, Kepler eut l'idée de substituer à la lentille divergente, un oculaire convergent situé en arrière du plan focal de l'objectif sur lequel se forme alors une image réelle. Ce dispositif, appelé lunette astronomique, est doté en 1662 par Cornelio Malvasia (1603-1664) d'un réticule. Ensuite, en 1667, Adrien Auzout (1622-1691) et l'abbé Jean Picard (1620-1682) montent une telle lunette, à la place de l'alidade à pinnules, sur un cercle gradué, ce qui permet à ce dernier d'exécuter la première triangulation précise en 1669-70 pour la mesure de l'arc de méridien entre Sourdon, près d'Amiens, et Malvoisine, au Sud de Paris près de la Ferté-Alais [11].

Il faut bien remarquer, dans le cadre de notre propos, que les lois de la mécanique que Galilée avait découvertes, pouvaient tout aussi bien concerner une Terre immobile dans l'espace. Il ne puisait donc pas là sa conviction du mouvement de la Terre.

D'ailleurs, si la certitude de l'immobilité de la Terre fit place peu à peu à la certitude de son mouvement, ce fut au prix d'une naïveté commode qui impliquait que ce mouvement ne modifiait en rien les lois de la mécanique terrestre ; c'est ainsi que Gassendi (1592-1655) fit sa célèbre expérience de la chute d'un boulet du haut du mât d'une galère à rames, lancée à quatre nœuds dans le port de Marseille en 1642, juste après la mort de

Galilée. Comme le boulet était arrivé à l'endroit même où il tombait lorsque le navire était à l'ancre, ainsi que l'avait prévu Galilée, on en déduisit que si un corps lâché du haut d'une tour tombait bien à son pied, cela ne prouvait pas pour autant l'immobilité de la Terre.

C'était ne pas savoir distinguer dans le mouvement instantané de la Terre - ou tout au moins pendant le temps d'une expérience - comme on le ferait aujourd'hui, une composante de translation et une autre de rotation.

Le mouvement de translation uniforme ne modifie en rien les lois de la mécanique : Galilée en a énoncé le principe et en hommage à lui, nous appelons *référentiel galiléen* tout espace en translation uniforme. Un tel mouvement ne pourra pas être mis en évidence par des observations internes terrestres, mais seulement par des observations astronomiques : Ce furent les découvertes de l'aberration astronomique annuelle observée par Hooke dès 1669 et expliquée par Bradley en 1728, puis de la parallaxe annuelle des étoiles, d'autant plus décelable qu'elles sont plus proches, par Bessel en 1838 : ce sont *les preuves astronomiques du mouvement orbital de la Terre*.

Par des expériences terrestres, c'est-à-dire sans recours à un repère extérieur, on peut seulement espérer mettre en évidence la rotation du globe. Tel sera l'objet de notre propos et nous verrons que ces expériences sont très délicates à mettre en œuvre : ce sont *les preuves mécaniques de la rotation terrestre*. Quant à la théorie, celle des mouvements composés dont l'un est une rotation, elle fut explorée par Clairaut (1713-1765), admis à 18 ans à l'Académie des Sciences, laquelle l'envoya en 1736 en Laponie avec Maupertuis (1698-1759) pour y déterminer la longueur d'un degré de méridien [11]. Il fallut attendre pour que la théorie se fasse jour que Gaspard-Gustave Coriolis (1792-1843) publie ses célèbres mémoires dans le journal de l'École Polytechnique : *Sur le principe des forces vives dans les mouvements relatifs des machines* en 1832 et *Sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps* en 1835 et aussi que Denis Poisson (1781-1840) étudie dans ce même journal deux années plus tard en 1837, la déviation à droite des projectiles, dans l'hémisphère boréal, sans d'ailleurs jamais citer le théorème de Coriolis ! Il est vrai que dans sa théorie, Coriolis n'avait pas attiré l'attention sur son application possible à la rotation terrestre.

Les expériences que nous allons évoquer ici sont la manifestation de la rotation de la Terre. Les phénomènes ci-dessus étudiés par Galilée se trouvent modifiés du fait de cette rotation, mais de très peu. On dirait, en langage mathématique, que ces modifications sont du deuxième ordre et, pourtant, comme souvent en physique, ils sont essentiels pour la confirmation de théories nouvelles importantes. L'histoire des sciences est ainsi jalonnée par des anomalies apparentes dans des observations de phénomènes. Une des plus célèbres est l'irrégularité constatée des éclipses des satellites de Jupiter qui ne trouva son explication que par la découverte de la vitesse finie de la lumière par Römer, à l'Observatoire de Paris, en 1676.

La première preuve expérimentale en date de la rotation de la Terre est la déviation vers l'Est de la chute d'un corps.

De nombreux expérimentateurs ont cherché, parfois sans y arriver avec certitude, à mettre en évidence cette preuve visible de la rotation terrestre, par des observations minutieuses. Pierre Simon de Laplace (1749-1827) en a indiqué la valeur en 1796.

Pendant ce temps, d'autres savants étudiaient le pendule sans se douter qu'il pouvait conduire au même résultat, avec une sûreté beaucoup plus grande et sous une forme incomparablement plus frappante. C'est Léon Foucault (1819-1868) qui, en 1851, par l'expérience de son pendule, a donné la deuxième preuve expérimentale en date, de beaucoup la plus connue, et qui l'année suivante en a donné une troisième preuve spectaculaire avec son gyroscope.

Nous évoquerons d'abord les réalisations expérimentales avant d'en esquisser les théories.

Nous allons montrer que les trajectoires, aussi bien du corps dans sa chute que du pendule dans ses oscillations, sont, si l'on veut bien se référer à des repères sidéraux, *indépendantes* de la rotation de la Terre, l'attraction de celle-ci n'intervenant que sur la vitesse de chute du corps et sur la période d'oscillation du pendule suivant les lois bien connues.

EXPÉRIENCES

La chute d'un corps

Quand Isaac Newton (1642-1727) réfléchit en voyant tomber la pomme, il ne remarqua pas que le fruit ne suivait pas tout à fait une verticale. La faible hauteur de chute ne permettait pas de mettre en évidence le phénomène que nous allons étudier et de toute façon le vent, qui sans doute avait décroché la pomme, l'aurait masqué.

Pourtant l'idée que la rotation de la Terre pourrait se manifester dans l'observation de la chute d'un corps paraît avoir été émise pour la première fois par Newton qui, dans une lettre écrite le 28 Novembre 1679 au Docteur Robert Hooke, membre comme lui et secrétaire de la Société royale de Londres, fait observer que *si on laisse tomber un corps d'une hauteur suffisante, il devra, par suite de la rotation du globe, tomber à l'Est de la verticale de son point de départ, parce que la force centrifuge, dirigée de l'Ouest à l'Est, est plus grande au sommet de la tour qu'à la base*. Nous verrons ce qu'il faut penser de cette formulation. Hooke, est alors chargé par la Société royale d'organiser une expérience. Celui-ci affirme alors, sans "divulguer" son raisonnement, que *la chute du corps pesant ne devait pas se faire directement à l'Est, comme l'a supposé M. Newton, mais au Sud-Est, et même plus au Sud qu'à l'Est*. Cette annonce d'une déviation australe, bien qu'étayée par aucune théorie, créa-t-elle un préjugé ? En tout cas elle fut, comme nous le verrons, souvent observée par la suite. Hooke n'opéra que sur une chute de 27 pieds (9 mètres !) et n'obtint sans doute pas de résultats probants puisqu'ils ne furent pas publiés. Pourtant il

était certainement motivé : il avait même fait figure de précurseur cinq ans auparavant, en publiant dès 1674, un opuscule qui avait pour titre : *an attempt to prove the motion of the earth (une tentative pour prouver le mouvement de la Terre)* dans lequel il affirme notamment que *les corps célestes s'attirent avec d'autant plus de force qu'ils sont plus près les uns des autres*, en ajoutant qu'il n'avait pas recherché suivant quelle loi. Dommage pour sa renommée ! Son nom restera néanmoins attaché à la loi sur l'élasticité parfaite, ainsi qu'à la première observation de l'aberration stellaire, comme nous l'avons dit.

Cassini, à l'Observatoire de Paris au 18^{ème} siècle, aurait mis à profit la disposition des lieux : un puits descendant jusqu'aux Catacombes, à 28 mètres de profondeur, est situé sous une ouverture de l'édifice donnant sur la terrasse supérieure, à la hauteur de 28 mètres également, permettant une chute de 56 mètres.

Puis en 1790 et en Juin et Août 1791, J.-B. Guglielmini, un jeune abbé italien, tenta par deux fois l'expérience à la tour penchée *degli Asinelli* de Bologne, là même où, cent cinquante ans auparavant, le Père Riccioli (1598-1671) avait opéré, en vue de contredire Galilée, en voulant montrer qu'il n'y avait pas de déviation ! La hauteur disponible au milieu de l'escalier tournant de la tour était de 240 pieds (78 mètres) et d'innombrables précautions furent prises, jusqu'à opérer de nuit pour se mettre à l'abri des vibrations occasionnées par la circulation des véhicules sur le pavage du voisinage ! Le résultat fut de 16,7 mm vers l'est, en accord à 0,4 mm près avec la théorie d'après Guglielmini, et 11,75 mm vers le sud, avec des impacts remarquablement groupés. Cette expérience pourrait paraître satisfaisante si ce n'était que la référence à la verticale fut établie 6 mois plus tard en hiver.

Dès 1796, Pierre Simon de Laplace énonce son célèbre théorème en indiquant la valeur de la déviation vers l'Est, mais sans nous en laisser la démonstration. Il indique ainsi que la déviation n'a lieu que vers l'Est et, comme nous le verrons dans la partie théorique, que sa valeur n'est que les deux tiers de celle qui serait obtenue par la seule prise en compte de l'excès de vitesse du point du lâcher par rapport au point de chute.

Il applique aussitôt sa formule à l'expérience de Bologne et trouve une déviation théorique vers l'est de 11 millimètres, c'est-à-dire curieusement les deux tiers environ de la valeur théorique sur laquelle Guglielmini avait tablé cinq ans plus tôt ! La bonne concordance des résultats de Guglielmini avec une valeur théorique fautive - celle obtenue par le seul excès de vitesse du point du lâcher par rapport au point de chute - jette une ombre supplémentaire sur les résultats de 1791.

Ensuite, en 1802, le Dr Johann Friedrich Benzenberg (1777-1846), qui habite alors à Hambourg à côté de la tour Saint-Michel dont la construction haute de 130 mètres venait d'être achevée en 1780, pense pouvoir disposer d'une bonne hauteur de 340 pieds (100 m), mais doit y renoncer en raison des courants d'air et se contenter de 235 pieds (76 mètres) pour réaliser une série de 31 expériences du 14 au 26 Octobre. Après avoir *trié* les valeurs qui lui paraissaient entachées

d'erreurs (!), avec cette fois l'avantage de connaître le résultat théorique calculé par la formule exacte, la moyenne des résultats de Benzenberg fut ainsi de 9,0 mm vers l'est et de 4 mm vers le sud. Carl Friedrich Gauss (1777-1855) refit la théorie et trouva la même formule que Laplace, confirmée encore par Olbers (1758-1840) : si la déviation vers l'est était théoriquement de 8,91 mm, en bon accord avec le résultat de l'expérience, par contre il n'y a pas de déviation théorique vers le sud. La dispersion des résultats enlève de toute façon beaucoup de valeur au résultat de l'expérience.

En 1804, pas découragé pour autant, Benzenberg opère du 7 au 10 Octobre dans un puits de charbonnage abandonné à Schlebusch, *zur alten Rosskunst*, dans le comté de Mark, profond de 262 pieds (85 mètres). Pour la moyenne de 29 chutes, l'expérience donne 11,3 mm vers l'est et pratiquement rien vers le sud, en regard d'une valeur théorique de 10,37 mm vers l'est. Les résultats peuvent paraître satisfaisants mais la dispersion des points de chute est encore plus grande qu'à Hambourg, sans aucune accumulation dans le voisinage de la moyenne. Sans doute en butte avec le vent ou les courants d'air, Benzenberg préconise d'exécuter l'expérience à Paris, au Panthéon qui venait d'être achevé en 1790 !

Benzenberg fut chargé, en 1807, de la direction des opérations cadastrales pour la triangulation de la Bavière.

En 1831, dans le *Dreibrüderschacht* (puits des Trois Frères) d'une mine près de Freiberg, Reich, professeur de physique à l'académie royale de Saxe, réussit une chute de 158,5 mètres en prenant un luxe de précautions : il installe une sorte de cheminée en bois qu'il calfeutre soigneusement pour éviter tout courant d'air et les mesures sont même retardées pour attendre l'arrivée de France d'un mètre authentique ! Reich observe 107 chutes réparties en 6 séries du 23 Août au 8 Septembre 1831. Comme Benzenberg, il *élimine* du calcul de la moyenne toutes les observations dont le résultat s'écarte par trop de la moyenne générale et comme Benzenberg il trouve une moyenne qui se rapproche bien du résultat donné par la théorie ! La moyenne ainsi trouvée donne une déviation de 28,4 mm vers l'est, pour 27,5 mm en théorie, et 4,37 mm vers le sud. Mais les écarts à la moyenne, malgré les éliminations signalées, sont très élevés et leur répartition n'a rien de gaussienne.

Ces expériences marquent de toute façon un bel acharnement sur la seule preuve alors envisageable de la rotation terrestre. La fièvre sur cette technique va retomber en 1851, lorsque Foucault fera son expérience du pendule comme nous le verrons plus loin.

Dans le bulletin de la Société Astronomique de France, Ph. Gilbert [3] fait paraître en 1896 un article très documenté sur ces expériences de Guglielmini, de Benzenberg et de Reich, où, après avoir fait l'analyse critique de chacune d'elles, il conclut : "*ces expériences sont vraiment insuffisantes eu égard au rôle important qu'on leur a assigné dans la Science; elles sont à refaire.*"

Nous avons vu que le raisonnement simpliste par

lequel il n'est tenu compte que de l'excès de vitesse du point du lâcher par rapport au point de réception en raison de la rotation de la Terre, est erroné. Il a néanmoins pris en défaut certains esprits et non des moindres : la formulation de la lettre de Newton à Hooke évoquée ci-dessus peut s'interpréter dans ce sens. Olbers s'égarait également avant d'être ramené à la raison par Gauss.

Camille Flammarion, fondateur de la Société Astronomique de France en 1887, fut également séduit par ce faux raisonnement. Il avait écrit, dans son *Astronomie populaire* (1879) [2], dans le chapitre "Preuves positives des mouvements de la Terre" (pages 76 et 77) :

"Comme la vitesse de rotation est d'autant plus grande que l'on est plus éloigné du centre de la Terre, une pierre posée à la surface du sol est animée vers l'Est d'une vitesse un peu plus grande qu'une pierre du fond d'un puits. Or l'excès de cette vitesse ne pouvant pas être anéanti, si on laisse tomber une petite boule de plomb dans un puits, elle ne descend pas juste suivant la verticale, mais s'en écarte un peu vers l'Est. La déviation dépend de la profondeur du puits ; elle est, à l'équateur, de 33 millimètres pour 100 mètres de profondeur." et il ajoute un peu plus loin : *"Une balle de plomb qui tombe du haut des tours de Notre-Dame ne suit pas juste la verticale, mais tombe à 15 millimètres vers l'Est, différence entre la vitesse au pied et au sommet."* (La hauteur des tours est de 75 mètres).

On ne peut pas se tromper plus clairement ! Bien entendu un faux raisonnement conduit à des valeurs numériques erronées. Les vraies valeurs sont les 2/3 des valeurs annoncées comme nous l'avons déjà dit et comme nous le vérifierons ci-après dans l'exposé de la théorie.

En 1902, Edwin H. Hall organise une expérience dans la tour du laboratoire Jefferson à l'université de Harvard, sur une hauteur de 23 mètres seulement, mais très soignée. Le titre même du compte rendu, *Do falling bodies move south ?* (les corps chutent-ils vers le Sud ?) indique que le but n'était plus de prouver la rotation de la terre par l'observation de la déviation vers l'Est, ce qui est alors bien entendu admis, mais de décider, par l'expérience, de l'existence ou non de la déviation australe, annoncée comme nous l'avons dit en 1679 par Hooke sans démonstration, souvent observée, mais qu'aucune théorie n'est venue étayer. Le résultat des 948 chutes donne une déviation de 1,50 mm vers l'Est, pour une valeur théorique de 1,77 mm, et une déviation de 0,05 mm vers le Sud donc non rigoureusement nulle, bien qu'insignifiante.

Puis en 1903, Camille Flammarion [3], à Paris au Panthéon, motivé sans doute par l'article de Ph. Gilbert de 1896, profitant de l'occupation des lieux pour la répétition de l'expérience du pendule de Foucault sur laquelle nous reviendrons plus loin, et peut-être soucieux d'effacer l'erreur figurant dans son *Astronomie populaire*, fit alors une série d'expériences sur la chute des corps du 20 Avril au 14 Mai. La déviation observée, pour une chute de 68 mètres, a été de 7,6 mm vers l'Est et de 0,5 mm vers le Nord (moyenne des 6 dernières séries) ce qui, compte tenu de la dispersion des points d'impact

des billes lâchées, peut être considéré comme en plein accord avec la théorie (8,1 mm vers l'Est).

Enfin, vers 1958, au moment de la mise au point par le Cabinet Gilbert d'un largueur de billes pour des applications topographiques dans des puits [7], Robert Taton a poussé l'expérience jusque dans un puits de mine de 580 mètres de profondeur, où la déviation vers l'Est atteint 20 centimètres.

Le pendule de Foucault

Léon Foucault (1819-1868), fils d'un éditeur parisien et véritable autodidacte, perfectionna les procédés photographiques de Daguerre et travailla ensuite avec Fizeau et Arago. Il gagna sa vie dès 1844 comme journaliste au *Journal des Débats* en tenant la gazette scientifique. Il se fit ensuite connaître en 1850 par la détermination de la vitesse de la lumière dans différents milieux par la méthode du miroir tournant et par sa découverte sur les courants induits dans les masses métalliques, donnant ainsi l'explication du "magnétisme de rotation" d'Arago.

Léon Foucault fit ensuite sa retentissante expérience avec son pendule en 1851 et présenta son gyroscope en 1852. Nous allons y revenir plus en détail. En 1857, Léon Foucault attachait son nom à la taille des miroirs paraboliques des télescopes. Il fut nommé, en tant qu'astronome, membre titulaire du Bureau des longitudes en 1862 et fut élu à l'Académie des Sciences en Janvier 1865.

En 1851 donc, Léon Foucault étudie le plan d'oscillation du pendule. Avant lui, certains scientifiques avaient déjà mentionné l'effet que la rotation de la Terre pouvait avoir sur un pendule : le marquis de Poli (ou Poléni) dès 1742 dans les *Philosophical Transactions*, puis Poisson l'a également considéré en 1837 (C.R. Académie des Sciences), le jugeant toutefois trop faible pour pouvoir le mettre en évidence par l'expérience.

Foucault met au point un appareillage minutieusement élaboré avec Gustave Froment (1815-1865), ancien élève de l'École Polytechnique, un des plus habiles constructeurs d'instruments de précision de son siècle, à qui revient une part importante des succès de Foucault dans la présentation de son pendule et, nous le verrons plus loin, de son gyroscope l'année suivante.

Foucault fait ses premières expériences concluantes dans l'hôtel particulier où il habite à Paris, à l'angle des rues de Vaugirard et d'Assas. En 1894, un immeuble en pierre de taille fut construit sur cet emplacement, mais l'architecte, voulant rappeler l'évènement qui frappa tellement les esprits à l'époque, figura dans des cartouches hauts de deux étages, de part et d'autre du pan coupé à l'angle des deux rues (figure 1), un pendule sur la façade rue de Vaugirard et l'inscription suivante sur la façade rue d'Assas : *" Ici s'élevait un hôtel où mourut, le 11 Février 1868, Jean Bernard Léon FOUCAULT, membre de l'Institut, né à Paris le 19 Septembre 1819. C'est dans cet hôtel qu'il réalisa en 1851 la célèbre expérience qui démontre la rotation de la Terre par l'observation du pendule"*.

Léon Foucault opère dans sa cave de la rue d'Assas



Rue de Vaugirard Figure 1 Rue d'Assas

avec un pendule ne dépassant pas deux mètres et une boule de 5 kilogrammes. Il note sa première expérience : *Mercredi, 8 Janvier 1851, 2 heures du matin : le pendule a tourné dans le sens du mouvement diurne de la sphère céleste.* Il installe ensuite, sur la proposition d'Arago, un pendule de 11 mètres dans la salle de la méridienne à l'Observatoire de Paris, muni d'une sphère d'acier de 19 kilogrammes : la durée de fonctionnement, de plus d'une demi-heure, permet de mesurer les déplacements. Arago en fit la première communication à l'Académie des Sciences, lors de la séance du 3 Février 1851.

Le prince Louis Napoléon Bonaparte, alors Président de la République, demande en Mars 1851 à Léon Foucault de réaliser une démonstration publique de son expérience. Le site doit être prestigieux et permettre une suspension de grande hauteur. Le Panthéon, qui était un monument civil - il n'avait été donné au culte que de 1821 à 1830 - répondait à ces critères. Foucault y fait ainsi sa célèbre démonstration sous la coupole de l'édifice conçu par Soufflot (figure 2).

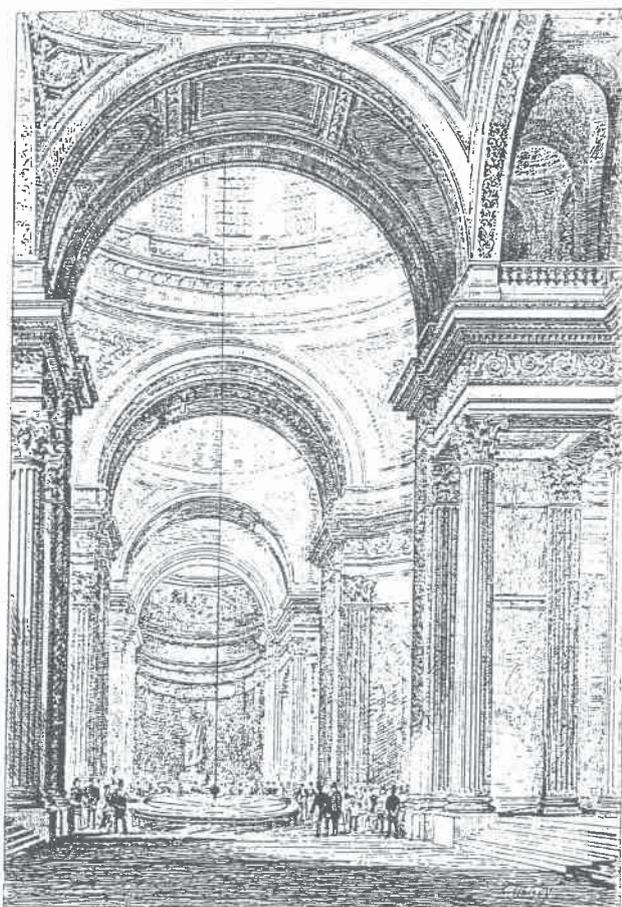
Une boule de 28 kilogrammes, constituée par une enveloppe de laiton renfermant une masse de plomb, munie d'une pointe à sa partie inférieure, est suspendue à un fil d'acier de 67,24 mètres de longueur et de 1,4 mm de diamètre. Au repos, elle occupe le centre d'un plateau circulaire divisé en degrés, légèrement surélevé pour le confort des observateurs. Un petit talus de sable fin est disposé à la périphérie du plateau. La boule est écartée de 3 mètres de sa position de repos en l'attachant à un fil de chanvre. Ce fil est alors brûlé à la flam-

me d'une allumette, de façon à libérer la boule qui commence ses oscillations avec une période :

$$T = 16,5 \text{ secondes environ.}$$

À chaque passage, dans un sens comme dans l'autre, la pointe de la boule entame chaque fois un peu plus le petit talus de sable aux deux extrémités du diamètre du plan d'oscillation. Les brèches s'agrandissent avec le temps, si bien qu'en quelques minutes elles sont larges de plusieurs centimètres.

Foucault met ainsi en évidence que le plan d'oscillation du pendule pivote autour de la verticale, dans le sens du mouvement diurne des astres donc inverse de celui de la Terre, d'un peu plus de 11° par heure et de 68° pendant les 6 heures d'amortissement du mouvement. Un tour complet demanderait un peu moins de 32 heures (31 h 47 min 16 sec en théorie).



Astronomie Populaire

Figure 2

L'expérience du Panthéon est prolongée pendant plusieurs mois : chaque jour, le pendule est relancé à heure fixe, jusqu'à ce que l'édifice soit rendu au culte après le coup d'État du 2 Décembre 1851.

L'expérience est alors très vite répétée de nombreuses fois pendant l'année 1851, dans les cathédrales de Reims, d'Amiens puis en des latitudes nettement différentes comme à Marseille.

À Rome, dans l'église Saint-Ignace, le père Angelo Secchi (1818-1878), alors directeur de l'Observatoire du Collège romain, se trouve en butte avec l'apparition systématique, après un certain temps, d'un mouvement

elliptique dont le grand axe tourne dans le même sens que la Terre, donc à l'opposé de la rotation initiale et qui finit par masquer complètement le phénomène de Foucault. Il est ainsi le premier à se rendre compte que le pendule, lâché en repos relativement à la Terre, reçoit en fait une vitesse latérale de rotation - celle de la Terre elle-même - par rapport à son point de suspension, vitesse à l'origine d'un mouvement absolu elliptique comme nous le verrons plus loin. Très faible au début, ce mouvement s'amplifie avec l'amortissement des oscillations.

En 1852, du 28 Mai au 14 Juin, le Dr Garthe, reprend l'expérience dans la voûte du chœur du célèbre *Dom* (cathédrale) de Cologne en suspendant à la *cardan* un pendule de 50 mètres. La démonstration permet de vérifier, par les mesures de 36 expériences très soignées, que la rotation horaire observée du "plan" du pendule est de $11^{\circ}38'30''9$, en accord fort remarquable avec la valeur théorique de $11^{\circ}38'50''3$ pour la latitude de la cathédrale et d'après la loi du sinus de la latitude.

En 1855, un pendule est installé à l'Exposition universelle de Paris. Foucault lui adjoint un dispositif destiné à entretenir le mouvement. C'est ce pendule qui est de nos jours installé à Paris, sous les hautes voûtes du chœur de la chapelle du XIIe siècle de l'ancienne abbaye Saint-Martin-des-Champs (en restauration actuellement jusqu'en 1996), faisant partie aujourd'hui du Musée National des Techniques au Conservatoire National des Arts et Métiers [13]. Pour le deuxième centenaire de la fondation du Conservatoire, célébré le 10 Octobre 1994, un timbre-poste fut émis avec pour thème le pendule de Foucault; c'est dire l'impact du phénomène encore de nos jours (fig.3). On remarquera que la trajectoire du pendule, hypocycloïdale comme nous le verrons dans la partie théorique, a bien été représentée par le graveur de la figurine.



Figure 3 : Timbre du bicentenaire du CNAM

L'expérience est reprise au Panthéon en 1902. Le monument était à nouveau redevenu un édifice civil pour les grandioses funérailles de Victor Hugo en 1885. Le centenaire de la naissance du poète fait l'objet, le 26 Février 1902, de fêtes tout aussi grandioses au Panthéon. C'est l'occasion pour la Société Astronomique de France [3] de renouveler l'expérience du pendule réalisée 51 ans plus tôt par Léon Foucault, en l'exécutant au même endroit.

L'inauguration du pendule du Panthéon a lieu le 22 Octobre 1902, en une cérémonie solennelle, sous la présidence du Ministre de l'Instruction publique qui est

reçu par Henri Poincaré, membre de l'Institut et du Bureau des longitudes et Président de la Société Astronomique de France, et par Bouquet de Grye, Président de l'Académie des Sciences, et en présence de plus de deux mille personnes qui se pressent dans l'immense nef.

Pour la réédition de l'expérience du pendule, la boule est suspendue par une *corde à piano* de 67 mètres de longueur et de 0,72 mm de diamètre, offerte obligeamment par la maison Pleyel : le mécénat d'entreprise est né!

En Avril 1993, pour les 175 ans de l'Université, la Société Astronomique de Liège [14] renouvelle pour la quatrième fois la célèbre expérience dans l'ancienne église Saint-André, avec une boule de 28,4 kg et une suspension de 35,5 mètres de hauteur. Elle avait déjà été présentée en 1943, 1953 et 1979.

Le Gyroscope

L'influence perturbatrice qu'exerce la rotation de la Terre sur les corps en mouvement à sa surface, est d'autant plus sensible que leur vitesse est plus grande.

C'est le cas du gyroscope qui est une troisième preuve en date de la rotation de la Terre mais qui, elle, a reçu des applications pratiques.

Il est juste de rappeler qu'un allemand, Johann Gottlieb Friedrich von Bohnenberger (1765-1831), qui fut professeur de mathématiques et d'astronomie à Tübingen et auteur d'un traité d'astronomie, avait conçu et réalisé, dès 1817, un appareil qui porte son nom et dont il disait "On peut le transporter dans des directions arbitraires et avec des vitesses quelconques, et pourtant l'axe de la sphère garde une direction constante. Si l'on a commencé à le diriger vers le Nord, il se dirige dans toutes les positions vers le Nord, comme une aiguille aimantée". Rappelant ces propos en Juin 1851, Johann Christian Poggendorff (1796-1877), éminent professeur d'histoire de la physique à l'université de Berlin [1], impressionné par l'expérience du pendule de Foucault qui venait d'être présentée au mois de Mars précédent, faisait ce commentaire "En vertu de ce phénomène, la machine de Bohnenberger deviendrait, en même temps, un appareil pour la démonstration de la rotation de la Terre (peut-être pour la détermination de la latitude), si, ce qui ne me semble pas impossible, on lui communiquait un mouvement continu par un ressort".

Léon Foucault reprend l'idée. Après huit mois de lutte contre des difficultés d'exécution presque insurmontables dont il vient à bout grâce encore à l'aide et à l'habileté de son fidèle Froment, il réalise un appareil en forme de tore suspendu "à la cardan". Une des principales difficultés de la réalisation est le calage rigoureux du centre de gravité et d'inertie du tore en un point fixe, centre du cardan, lié à la Terre, surtout du fait que la mise en rotation du tore se fait en dehors, sur un lanceur.

L'appareil s'avère bien avoir la propriété exceptionnelle, étant en rotation rapide, de garder une direction fixe par rapport aux étoiles. De plus, si l'axe du tore est assujéti à rester horizontal, il oscillera de part et d'autre du méridien et finira par se stabiliser dans la direction

du Nord. Si l'axe du tore est assujéti à rester dans le plan méridien du lieu, il s'inclinera dans la direction de l'axe du monde et indiquera ainsi la latitude du lieu. La réalisation de l'appareil est tellement délicate que son application pratique se fera attendre pour remplacer la boussole dans les navires en fer. Il est devenu aujourd'hui indispensable pour la navigation aérienne et le guidage des fusées.

Le 27 Septembre 1852, fort de la renommée acquise par la démonstration de son pendule, Léon Foucault présente son appareil à l'Académie des Sciences et lui donne le nom de *gyroscope*, en forgeant à cette occasion ce nouveau mot qui littéralement signifie *instrument d'observation de la rotation (de la terre)*. En même temps, il présente sa *théorie des phénomènes gyroscopiques*.

THÉORIES

Nous n'aborderons pas ici cette théorie du gyroscope.

Avant d'évoquer les deux autres expériences nous commencerons par établir quelques données numériques utiles pour corroborer les résultats expérimentaux :

Soit $\vec{\omega}$ la vitesse angulaire de rotation de la Terre autour de son axe des pôles, représentée par un vecteur rotation porté par l'axe des pôles et dirigé dans le sens Sud-Nord. Un tour complet (2π radians) étant effectué en un jour sidéral de 23 heures 56 minutes 4 secondes, nous avons :

$$\tau = 86164 \text{ secondes}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau}$$

$$\text{d'où : } \omega = 7,29212 \cdot 10^{-5} \text{ radian / seconde.}$$

En un lieu de latitude φ à la surface de la Terre, comptée positivement dans l'hémisphère Nord et négativement dans l'hémisphère Sud, on peut projeter le vecteur rotation $\vec{\omega}$ sur la verticale et sur l'horizontale méridienne du lieu. Les deux composantes sont respectivement (figure 4) :

* $\vec{\omega}_v = \omega \cdot \sin \varphi$ sur la verticale du lieu, comptée positivement vers le haut.

Ceci revient à dire que tout point de l'horizon du lieu se déplace à cette vitesse angulaire sur le grand cercle horizon de la sphère céleste du lieu.

ω_v varie de $+\omega$ au pôle Nord à $-\omega$ au pôle Sud en passant par 0 à l'équateur,

* $\vec{\omega}_h = \omega \cdot \cos \varphi$ sur l'horizontale méridienne du lieu, comptée positivement vers le Nord.

Ceci revient à dire que le zénith du lieu se déplace à cette vitesse angulaire sur le grand cercle vertical Est-Ouest de la sphère céleste du lieu.

ω_h est nulle aux pôles et passe par son maximum $+\omega$ à l'équateur.

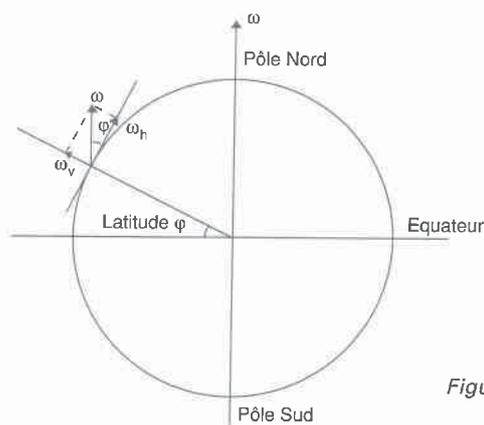


Figure 4

Pour la latitude de Paris (Panthéon $\varphi = 48^\circ 50' 46''$ ou 54,2735 grades) :

$$\omega_v = 5,49057 \cdot 10^{-5} \text{ radian / seconde.}$$

$$\omega_h = 4,79882 \cdot 10^{-5} \text{ radian / seconde.}$$

Nous allons maintenant entrer, pour l'étude théorique des phénomènes, dans le domaine de la *cinématique* qui est la partie des mathématiques où l'on étudie le mouvement des corps, c'est-à-dire leur position définie par les coordonnées "x", "y", "z", en fonction du temps "t" et par conséquent leur vitesse et leur accélération. Certains préfèrent parler de *dynamique*. Cela implique de parler de masse et de force au lieu d'accélération. Or nous savons que la masse des corps n'intervient pas dans les expériences décrites, comme Galilée lui-même l'a énoncé : tous les corps tombent également vite, quel que soit leur poids. Nous en resterons donc à l'abstraction cinématique.

La chute d'un corps

Tout d'abord, faisons les trois remarques suivantes :

Dans ce qui suit, nous considérerons que l'accélération de la pesanteur "g" est constante dans tout le champ d'une expérience.

En toute rigueur, pour une expérience de chute d'un corps lâché d'une tour par exemple, la pesanteur va légèrement croître pendant la chute jusqu'au sol. Inversement, pour une chute dans un puits, si l'on fait l'hypothèse d'une Terre de densité homogène, la pesanteur va légèrement décroître tout au long de la chute. Les variations de g sont de toute façon très faibles et en tenir compte ne modifierait pas les conclusions qui vont suivre.

D'autre part, il y a lieu de remarquer :

- que l'accélération de la pesanteur \vec{g} est la somme géométrique de la gravité, attraction de la Terre vers son centre de gravité, et de l'accélération centrifuge due à sa rotation, de sorte que les corps, mais aussi le fil à plomb, ne tombent pas exactement vers le centre de la Terre ;

- que cela est toutefois sans incidence sur le résultat des expériences de chute d'un corps puisqu'on rapportera toujours la trajectoire de chute à la ligne du fil à plomb. C'est la raison pour laquelle nous nous permettrons, quand nous parlerons de l'accélération \vec{g} , de dire par concision qu'elle est dirigée vers le centre de la Terre.

deux à l'Ouest de la position initiale du fil à plomb.

Le corps en chute libre se trouvera ainsi moins à l'Ouest que le fil à plomb, et se sera donc écarté de lui vers l'Est, à l'instant "t", de la quantité $X = x - x'$,

$$\text{d'où : (7) } \quad x = + \frac{1}{3} \omega_h \cdot \vec{g} \cdot t^3$$

On notera que l'expression de x' (équation 4) donne la valeur changée de signe de la déviation due au seul excès de vitesse du point du lâcher par rapport au point de réception en raison de la rotation de la Terre : $+\omega_h \cdot h \cdot t$. En comparant (6) et (7) : $X = - (2/3) x'$

On voit ainsi que **la déviation réelle X n'en est que les deux tiers.**

Plaçons-nous maintenant dans le **référentiel terrestre** (figure 7) :

Les équations (5) et (7) sont les formules paramétriques de la trajectoire du corps dans sa chute, en fonction du temps "t", X étant l'abscisse comptée positivement vers l'Est à partir du fil à plomb et "h" la hauteur de chute depuis le point du lâcher. En éliminant le paramètre "t" entre ces deux formules, on obtient l'équation cartésienne de la trajectoire :

$$\text{(8) } \quad x = + \frac{1}{3} \omega_h \sqrt{\frac{8h^3}{g}}$$

Cette formule est bien celle énoncée par Laplace en 1796.

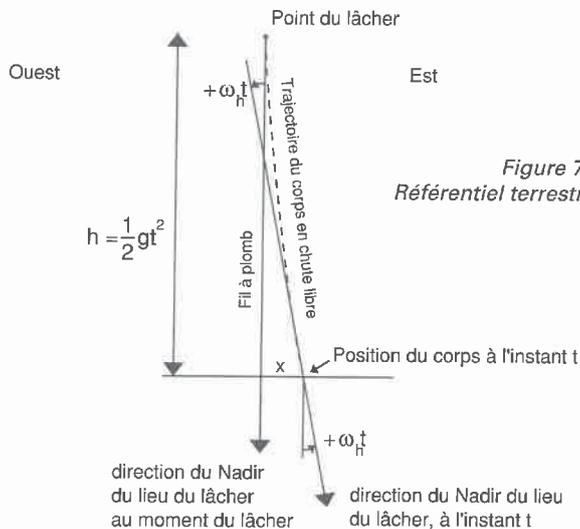


Figure 7 :
Référentiel terrestre

Poursuivons maintenant notre étude par quelques considérations :

En comparant les équations (7) et (3), on peut écrire :

$$\text{(9) } \quad X = - 2 x$$

et en déduire, en appelant " \vec{V} " la vitesse horizontale vers l'Est par rapport au fil à plomb et " $\vec{\Gamma}$ " l'accélération correspondante :

$$\text{(10) } \quad \vec{V} = - 2 v = \omega_h \cdot g \cdot t^2$$

$$\text{(11) } \quad \vec{\Gamma} = - 2 \gamma = 2 \omega_h \cdot g \cdot t$$

Cette dernière équation montre que, dans le référentiel terrestre, *tout se passe comme si* dans sa chute, le corps était soumis, à l'instant "t", à une accélération *apparente* $\vec{\Gamma}$, horizontale et vers l'Est, égale au double du produit de la vitesse de chute " $\vec{g}t$ " à ce même instant et de la composante horizontale $\vec{\omega}_h$ de la vitesse angulaire du référentiel dans lequel la chute est observée.

On peut écrire :

$$\text{(12) } \quad \vec{\Gamma} = 2 \vec{\omega} \wedge \vec{g} \cdot t$$

ou encore

$$\text{(13) } \quad \vec{\Gamma} = 2 \vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

v étant la vitesse de chute à l'instant t

Nous retrouvons ici l'accélération de Coriolis.

Revenons à l'équation (10) que l'on peut écrire :

$$\text{(10')} \quad \frac{dX}{dt} = \omega_h \cdot g \cdot t^2$$

$$\text{Or : } \quad dh = g \cdot t \cdot dt$$

d'où

$$\text{(14) } \quad \frac{dX}{dh} = \omega_h \cdot t$$

Cette équation montre qu'à l'instant "t", la tangente à la trajectoire de la chute d'un corps fait avec le fil à plomb, un angle dX/dh égal à celui $+\omega_h t$ dont a précisément tourné le grand cercle vertical Est-Ouest de la voûte céleste entre les instants "0" et "t". La tangente, en un point quelconque de la trajectoire, perce donc la voûte céleste en deux points invariants par rapport aux étoiles pendant la chute. Ces points étaient au zénith et au nadir du lieu du lâcher, à l'instant du lâcher.

Cette propriété peut s'énoncer comme suit :

Dans le référentiel terrestre, un corps "abandonné à sa pesanteur" se dirige à chaque instant vers le nadir du lieu où il se trouvait au moment du lâcher.

Cette propriété est bien indépendante de la vitesse de rotation de la Terre.

Nous avons ainsi montré, dans le cas de la chute d'un corps, que l'étude de la trajectoire nous permettait de retrouver une application du théorème de Coriolis et aussi de conclure à l'invariance dans le référentiel universel de la direction du mobile lâché sans vitesse relative dans le référentiel terrestre.

Le pendule de Foucault

Plaçons-nous d'abord dans un **référentiel galiléen**, en convenant d'affecter du signe "-" ce qui tourne dans le sens est-sud-ouest-nord.

Prenons un système de coordonnées planimétriques ayant comme origine le point de suspension du pendule et pour axe des abscisses la direction du point du lâcher, à l'instant du lâcher.

Lorsque le pendule est lâché, sans lui communiquer de vitesse relative par rapport à la Terre, le vecteur de

longueur "a" (amplitude) joignant la verticale du point de suspension à la masse du pendule reçoit néanmoins la composante de la vitesse angulaire de la Terre + ω_v dans le référentiel galiléen, qui correspond à une vitesse initiale de "lancement" $a \cdot \omega_v$ perpendiculaire au vecteur, c'est-à-dire selon la direction positive des ordonnées.

Nous sommes en présence de la combinaison de deux mouvements pendulaires de même période T, puisque la longueur l du pendule leur est commune et qui sont, en posant :

$$T = 2\pi / \alpha \quad \text{ou} \quad \alpha T = 2\pi \quad \text{avec} \quad \alpha = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

* un mouvement pendulaire principal suivant l'axe des abscisses, d'amplitude a, d'abscisse a et de vitesse nulle à l'instant 0, d'abscisse nulle et de vitesse maximale $a \cdot \alpha$ au quart de la période (soit à l'instant $t = T/4$, $\alpha t = \pi/2$), et dont l'équation est :

$$(P 1) \quad x = a \cos \alpha t$$

* un mouvement secondaire, perpendiculaire au premier, suivant l'axe des ordonnées et décalé d'un quart de période, d'ordonnée nulle et de vitesse maximale $a \cdot \omega_v$ à l'instant 0 du lâcher, ce qui lui donne une amplitude b qui est à l'amplitude a comme le sont entre elles les vitesses maximales des deux mouvements :

$$(P 2) \quad b / \omega_v = a / \alpha$$

et dont l'équation est :

$$(P 3) \quad y = b \sin \alpha t$$

La combinaison des deux mouvements est un mouvement qui a pour équations absolues paramétriques :

$$(P 4) \quad \begin{aligned} x &= a \cos \alpha t \\ y &= b \sin \alpha t \end{aligned}$$

C'est une ellipse fixe dans le référentiel galiléen (figure 8). Il convient de noter que le pendule parcourt l'ellipse en ayant toujours la verticale du point de suspension à sa gauche dans l'hémisphère boréale.

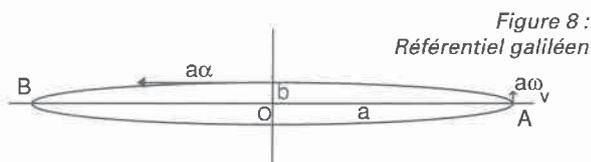


Figure 8 : Référentiel galiléen

Dans les conditions de l'expérience de Foucault au Panthéon :

$$\alpha = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{9,808}{67,24}} = 0,38192 \text{ radian / seconde}$$

et $\omega_v = 5,49057 \cdot 10^{-5}$ radian / seconde.

d'où : (P 5) $b / a = \omega_v / \alpha = 5,49057 \cdot 10^{-5} / 0,38192 = 1/6956$

ce qui, pour un grand axe d'oscillation de 6 mètres, donne un petit axe de 0,8 millimètre, c'est-à-dire difficilement observable. Néanmoins, une observation minutieuse réussie du phénomène serait déjà en elle-même une preuve de la rotation terrestre.

L'ellipse est donc très aplatie et nous sommes en présence d'un pendule conique qui ne se trouve *jamais*

sur la verticale du point de suspension et en passe au plus près à la distance "b".

Pour observer cette ellipse, il faudrait mettre sous le pendule un plateau tournant dans le sens contraire de la rotation de la Terre, à la vitesse angulaire $-\omega_v$. L'ellipse semblerait alors immobile sur le plateau.

La période de rotation du plan du pendule est

$$\tau' = \frac{2\pi}{\omega_v} = \frac{2\pi}{\omega \sin \varphi} = \frac{\tau}{\sin \varphi}$$

C'est donc la durée du jour sidéral τ , divisée par le sinus de la latitude du lieu. Pour la latitude du Panthéon :

$$\tau' = 114436 \text{ secondes}$$

$$\text{On a : } \frac{T}{\tau'} = \frac{T}{2\pi} \cdot \omega_v = \frac{\omega_v}{\alpha}$$

qui d'après (P 2) est égal au rapport b/a

On voit ainsi que le rapport b/a des demi-axes de l'ellipse est égal au rapport T / τ' de la période d'oscillation du pendule à la période de la rotation de son "plan".

Dans le cas du pendule du Panthéon, c'est au bout de 6956 oscillations que le "plan" du pendule aura fait un tour complet.

Imaginons que l'on donne une impulsion angulaire initiale $-\omega_v$, c'est-à-dire une vitesse $-a \omega_v = -b \alpha$ perpendiculaire au plan du pendule. L'oscillation transversale serait ainsi annulée et le pendule ainsi lancé aurait un mouvement rectiligne suivant l'axe des abscisses : mouvement du pendule simple.

Ce raisonnement montre que, dans ses oscillations, l'azimut de la boule d'un tel pendule simple est fixe dans le référentiel galiléen.

Ceci peut s'exprimer par la relation différentielle :

$$(P 6) \quad dy/dx = 0$$

En différenciant les formules (P 4) et en posant :

$$(P 7) \quad r^2 = a^2 \sin^2 \alpha t + b^2 \cos^2 \alpha t$$

la vitesse de déplacement du pendule sur sa trajectoire elliptique est :

$$(P 8) \quad V_e = ds/dt = \alpha \cdot r$$

avec ds élément d'arc infinitésimal de l'ellipse :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

et comme dy est négligeable dans une ellipse très aplatie, on a : $ds \approx dx$ et l'équation (P 8) devient :

$$(P 9) \quad V_e \approx dx/dt = -a \alpha \sin \alpha t$$

D'autre part, on sait que le rayon de courbure ρ en un point d'une ellipse est :

$$(P 10) \quad \rho = r^3/ab = (a^2 \sin^2 \alpha t + b^2 \cos^2 \alpha t)^{3/2}/ab$$

ρ est minima pour $\alpha t = n \cdot \pi$, ($\sin \alpha t = 0$ et $\cos \alpha t = 1$), à chaque "extrémité" des oscillations et vaut alors b^2/a .

ρ est maxima pour $\alpha t = (2n+1)\pi/2$, ($\sin \alpha t = 1$ et $\cos \alpha t = 0$), au milieu de chacune des oscillations et vaut alors a^2/b .

Les accélérations longitudinale et transversale sur l'ellipse sont, en dérivant deux fois les équations (P 4) du mouvement :

$$(P 11) \quad \Gamma_{ex} = d^2x/dt^2 = -\alpha^2 x = -a \alpha^2 \cos \alpha t$$

$$(P 12) \quad \Gamma_{ey} = d^2y/dt^2 = -\alpha^2 y = -b \alpha^2 \sin \alpha t \\ = -a \alpha \omega_v \sin \alpha t$$

On a bien une accélération centrale, dirigée vers la verticale du point de suspension, base même de la théorie du pendule conique.

L'accélération transversale Γ_{ey} est due à la présence d'une vitesse absolue transversale initiale $a \cdot \omega_v$.

Dans ce qui précède, nous avons négligé l'influence du petit mouvement vertical de la boule du pendule, lors de chacune de ses oscillations. Victor Puiseux (1820-1883) en a donné l'incidence : l'ellipse du mouvement absolu n'est plus tout à fait fixe, mais tourne lentement, dans le sens de parcours, à la vitesse angulaire :

$$(P13) \quad \Omega = \frac{3 a \cdot b \cdot \alpha}{8 l^2}$$

Or, d'après (P2) : $b \alpha = a \omega_v$

$$\text{d'où : } (P14) \quad \Omega = \frac{3 a^2}{8 l^2} \omega_v$$

Sous cette dernière forme, on voit que cette rotation est proportionnelle au carré du rapport a/l d'ouverture maximum du pendule, qu'il convient donc de ne pas rendre trop grand en limitant l'amplitude.

Sous la forme (P13), on voit que la rotation est proportionnelle à la surface de l'ellipse (πab). Or, dans l'amortissement du mouvement du pendule, si a diminue, par contre b augmente beaucoup plus, de sorte que la vitesse de la rotation de Puiseux Ω augmente avec le temps et comme elle est de sens contraire à la rotation de Foucault, elle peut parvenir à masquer cette dernière.

Plaçons-nous maintenant dans le **référentiel terrestre** :

D'après ce qu'on vient de voir, on serait tenté de penser que l'ellipse va tourner à la vitesse angulaire $-\omega_v$. Il n'en est rien !

Pour s'en convaincre, il suffit de voir qu'au moment du lâcher, la vitesse relative de la boule du pendule par rapport à la Terre est nulle et donc que la tangente à la trajectoire qu'elle va prendre est dirigée vers la verticale du point de suspension. Pourtant la trajectoire va passer à la distance "b" de ce point en la laissant sur sa gauche dans l'hémisphère boréal, comme dans le mouvement elliptique galiléen : elle sera donc incurvée et se poursuivra jusqu'au point opposé où la vitesse relative va s'annuler avec une tangente venant de la verticale du point de suspension, puis repartira dans l'autre sens avec cette même tangente - nous aurons donc là un point de rebroussement dans la trajectoire - pour passer à nouveau à la distance "b" de la verticale, en la laissant encore sur sa gauche, c'est-à-dire à l'opposé pratiquement du passage dans l'autre sens et ainsi de suite : nous allons montrer que la trajectoire du pendule dans

le référentiel terrestre, comme l'a énoncé Henri Beghin (1876-1969) [5], est une *hypocycloïde* (figure 9).

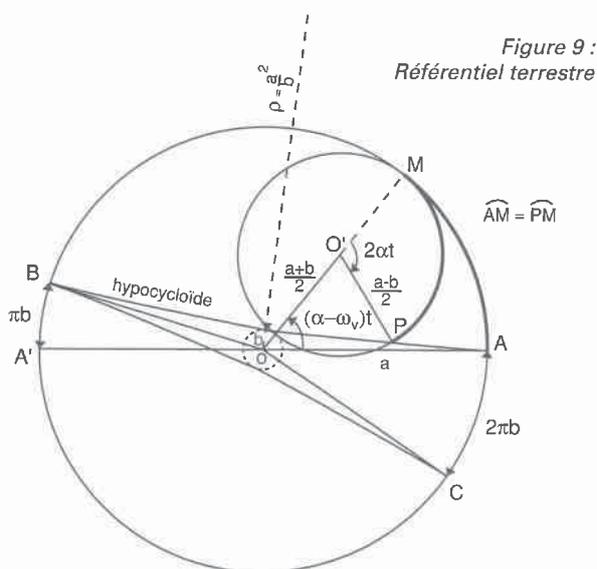


Figure 9 : Référentiel terrestre

Les axes OX, OY du référentiel terrestre tournent à la vitesse $+\omega_v$ dans le référentiel galiléen. À l'instant t un point de coordonnées absolues x, y sur l'ellipse, a pour coordonnées X, Y dans le référentiel terrestre :

$$X = x \cos \omega_v t + y \sin \omega_v t \\ Y = y \cos \omega_v t - x \sin \omega_v t$$

$$(P15) \quad X = a \cos \alpha t \cos \omega_v t + b \sin \alpha t \sin \omega_v t \\ Y = b \sin \alpha t \cos \omega_v t - a \cos \alpha t \sin \omega_v t$$

$$X = [(a+b)/2] \cos (\alpha - \omega_v) t + [(a-b)/2] \cos (\alpha + \omega_v) t \\ Y = [(a+b)/2] \sin (\alpha - \omega_v) t - [(a-b)/2] \sin (\alpha + \omega_v) t$$

Soit \vec{OP} le vecteur joignant l'origine des coordonnées au pendule P :

$$\vec{OP} = \vec{OO'} + \vec{O'P} \text{ avec :}$$

$\vec{OO'}$ vecteur de longueur $(a + b) / 2$, tournant à la vitesse $\alpha - \omega_v$

$\vec{O'P}$ vecteur de longueur $(a - b) / 2$, tournant en sens contraire à la vitesse $-(\alpha + \omega_v)$

Les deux vecteurs font donc entre eux, à l'instant t , un angle $2\alpha t$.

Au bout du temps t , les arcs :

\widehat{AM} du cercle de centre O, de rayon a , d'angle au centre $(\alpha - \omega_v) t$, donc de longueur

$$a (\alpha - \omega_v) t = a \alpha t - a \omega_v t$$

\widehat{MP} du cercle de centre O', de rayon $(a-b)/2$, d'angle au centre $2\alpha t$, donc de longueur

$$[(a-b)/2] \cdot 2\alpha t = a \alpha t - b \alpha t$$

ont même longueur puisque d'après (P2) : $b \alpha = a \omega_v$

La trajectoire du point P est donc celle du point d'un cercle de rayon $(a-b)/2$ roulant sans glissement à l'intérieur d'un cercle de centre O et de rayon a . C'est une hypocycloïde.

On notera que si l'on était tenté de négliger b (très petit devant a) on aurait, en faisant $b=0$, un point d'un

cercle de rayon $a/2$ roulant sans glissement à l'intérieur d'un cercle de rayon a : il décrit alors un diamètre fixe. C'est dire que l'hypocycloïde décrite par le pendule est un ensemble de segments presque rectilignes, mais c'est aussi souligner l'importance de la vitesse absolue initiale du pendule lors du lâcher : $a \omega_v (= b \alpha)$ pour expliquer sa rotation.

En différentiant les équations (P15) du mouvement hypocycloïdal, on obtient :

$$dX/dt = - (a\alpha - b\omega_v)\sin\alpha t \cdot \cos\omega_v t + (b\alpha - a\omega_v)\cos\alpha t \cdot \sin\omega_v t$$

$$dY/dt = + (a\alpha - b\omega_v)\sin\alpha t \cdot \sin\omega_v t + (b\alpha - a\omega_v)\cos\alpha t \cdot \cos\omega_v t$$

$$\text{Or d'après (P2) : } b\alpha - a\omega_v = 0$$

$$dX/dt = - (a\alpha - b\omega_v) \sin \alpha t \cdot \cos \omega_v t$$

$$dY/dt = + (a\alpha - b\omega_v) \sin \alpha t \cdot \sin \omega_v t$$

Soit dS l'élément d'arc infinitésimal de l'hypocycloïde :

$$dS^2 = dX^2 + dY^2 \quad \text{d'où :}$$

$$dS/dt = - (a\alpha - b\omega_v) \sin \alpha t = - a\alpha (1 - \omega_v^2/\alpha^2) \sin \alpha t$$

$$S = a (1 - \omega_v^2/\alpha^2) \cos \alpha t$$

$$dY/dX = - \tan \omega_v t$$

Nous sommes dans le cas d'un pendule simple, d'amplitude : $a (1 - \omega_v^2/\alpha^2)$ légèrement plus petite que "a" et dont le mouvement serait entraîné dans une rotation ayant son centre instantané confondu avec le pendule et une vitesse angulaire $-\omega_v$ égale et de signe contraire à celle de la Terre.

L'équation différentielle (P 6) s'écrit donc dans le référentiel terrestre

$$(P 16) \quad dY / dX = - \tan \omega_v t$$

La tangente à la trajectoire *hypocycloïdale* d'oscillation du pendule tourne ainsi par rapport à la Terre, à la vitesse angulaire *uniforme* $-\omega_v$. Cette vitesse angulaire est celle de la variation d'azimut de tous les astres au moment où ils franchissent l'horizon du lieu (lever ou coucher).

Cette propriété peut s'énoncer comme suit :

Dans le référentiel terrestre, l'azimut de la boule du pendule varie à chaque instant uniformément comme celui des étoiles situées sur l'horizon du lieu.

Cette propriété est bien indépendante de la vitesse de rotation de la Terre.

Il convient de relever ici que l'expression parfois utilisée : "le plan d'oscillation du pendule est fixe par rapport aux étoiles" est erronée. Cela n'est vrai qu'aux pôles. Ailleurs, le "plan" du pendule contient quasiment la verticale du lieu qui décrit sur la voûte céleste un petit cercle centré sur le pôle et de rayon égal à la colatitude.

La vitesse de déplacement du pendule sur sa trajectoire hypocycloïdale est :

$$(P17) \quad V_h = dS/dt = - (a\alpha - b\omega_v)\sin\alpha t$$

$$= - a\alpha(1 - \omega_v^2/\alpha^2) \sin\alpha t$$

$$V_h \approx - a \alpha \sin \alpha t$$

L'accélération longitudinale sur l'hypocycloïde est, en différentiant :

$$(P 18) \quad \Gamma_{hx} = - (a\alpha - b\omega_v) \alpha \cdot \cos \alpha t$$

$$\Gamma_{hx} = - a (\alpha^2 - \omega_v^2) \cos \alpha t \approx - a \alpha^2 \cos \alpha t$$

Cette accélération est égale à celle Γ_{ex} du mouvement elliptique (P 11).

Nous venons de voir que le vecteur vitesse V_h tourne à la vitesse angulaire $-\omega_v$:

Le rayon de courbure de la trajectoire est ρ tel que $\rho \omega_v = V_h$

$$\text{d'où (P 19) } \rho = a (\alpha / \omega_v) \sin \alpha t = (a^2 / b) \sin \alpha t$$

ρ est nul pour $\alpha t = n\pi$: à chaque extrémité des oscillations, il y a un point de rebroussement.

ρ est maxima pour $\alpha t = (2n+1) \pi/2$ au milieu de chacune des oscillations et vaut alors a^2/b .

L'accélération transversale sur l'hypocycloïde est :

$$(P 20) \quad \Gamma_{hy} = \omega_v^2 \cdot \rho = - \omega_v V_h = + a\alpha(1 - \omega_v^2/\alpha^2)\omega_v \cdot \sin\alpha t$$

$$\Gamma_{hy} = + b (\alpha^2 - \omega_v^2) \sin \alpha t \approx + b \alpha^2 \sin \alpha t$$

Cette accélération est égale et de signe contraire à l'accélération transversale Γ_{ey} sur l'ellipse (P 12) et les rayons de courbure des deux courbes au même point milieu des oscillations sont aussi égaux à : a^2/b mais de sens opposés. L'hypocycloïde tourne sa convexité vers le point de suspension qui pourtant imprime au pendule une accélération centrale. Cela peut paraître paradoxal :

Comparons la avec l'accélération transversale sur l'ellipse (P 12):

$$\Gamma_{ey} = - b \alpha^2 \cdot \sin \alpha t$$

$$\text{La différence vaut : } \Gamma_c = \Gamma_{hy} - \Gamma_{ey} = + 2 b \alpha^2 \cdot \sin \alpha t$$

$$\Gamma_c = 2 a \alpha \cdot \omega_v \cdot \sin \alpha t$$

Cette dernière équation montre qu'entre les observations du mouvement du pendule dans le référentiel galiléen et dans le référentiel terrestre, *tout se passe comme si* le pendule recevait, à l'instant "t", en plus de l'accélération pendulaire centrale, une accélération *apparente* Γ_c , horizontale et vers la droite dans le sens du déplacement, égale au double du produit de la vitesse à ce même instant et de la composante verticale ω_v de la vitesse angulaire du référentiel dans lequel le mouvement est observé. On peut écrire :

$$\vec{\Gamma}_c = 2 \vec{\omega}_v \cdot \vec{V}$$

$V = - \alpha a \sin \alpha t$ étant la vitesse à l'instant t et l'on peut écrire :

$$\vec{\Gamma}_c = 2 \vec{\omega} \wedge \vec{V}$$

Nous retrouvons ici l'accélération de Coriolis.

Il convient de remarquer que pour obtenir l'accélération transversale du mouvement hypocycloïdal dans le référentiel terrestre en partant de l'accélération de Coriolis, celle-ci doit bien entendu être ajoutée géométriquement à l'accélération transversale du mouvement absolu elliptique. Si l'on considérait par erreur que le mouvement absolu galiléen était celui rectiligne d'un pendule simple, donc sans accélération transversale, on

trouverait bien un mouvement hypocycloïdal, mais son accélération transversale et la courbure de sa trajectoire en fonction du temps seraient deux fois trop grandes, ce qui donnerait un pendule tournant deux fois trop vite !

En d'autres termes, il est tout à fait remarquable que le pendule, bien qu'ayant reçu, au moment de son lâcher, la vitesse de rotation absolue initiale $+\omega_v$ de la Terre, soit animé, sur sa trajectoire hypocycloïdale, d'une rotation relative uniforme de vitesse $-\omega_v$.

Pour expliquer le phénomène, Foucault avait admis en 1851 ce qu'il appela lui-même le *postulat effronté* suivant : " *Quand la verticale, toujours comprise dans le plan d'oscillation, change de direction dans l'espace, les positions successives du plan d'oscillation sont déterminées par la condition de faire entre elles des angles minima : autrement dit et en langage vulgaire, lorsque la verticale sort du plan d'impulsion primitive, le plan d'oscillation la suit en restant aussi parallèle que possible.*"

En réalité, nous avons vu que l'on ne peut parler de *plan d'oscillation* et encore moins de *verticale toujours comprise dans le plan d'oscillation* que comme des images commodes et que dans le référentiel terrestre, le plan défini par le vecteur vitesse du pendule et son point de suspension, ne reste pas vertical : il n'est vertical qu'aux extrémités des oscillations et s'écarte de la verticale au maximum au milieu des oscillations d'un angle b/l , proportionnel à l'amplitude du mouvement pendulaire. Foucault était trop rigoureux pour se permettre de telles approximations en toute connaissance de cause et il n'aurait pu négliger cette inclinaison prise par le pendule s'il l'avait connue, alors qu'elle est l'essence même du phénomène. Il n'avait donc sans doute pas clairement perçu la teneur du phénomène qui pourtant peut s'expliquer relativement aisément par l'application du théorème que Coriolis avait énoncé 16 ans plus tôt en 1835. Mais en 1843, Coriolis était décédé à 51 ans et l'on peut raisonnablement penser que son théorème n'était pas encore assimilé en 1851 - au fait, l'est-il bien de nos jours ? - et que, compte tenu du retentissement de l'expérience de Foucault, Coriolis, s'il avait vécu, aurait donné sur le champ l'explication rigoureuse. De même, Poisson qui en 1837, nous l'avons dit, avait bien mis en évidence l'influence de la rotation terrestre sur la déviation vers la droite des projectiles, était également décédé entre temps, en 1840, et n'a donc pu, lui aussi, apporter une véritable explication.

Nous avons ainsi montré, dans le cas du pendule, que l'étude de la trajectoire nous permettait de retrouver une application du théorème de Coriolis et aussi de conclure à l'invariance dans le référentiel universel de la direction du mobile lâché sans vitesse relative dans le référentiel terrestre.

Nous arrivons à la même conclusion qu'avec l'étude de la chute d'un corps.

CONCLUSION

Nous avons vu que les directions des trajectoires du corps en chute libre et du pendule pendant ses oscillations, sont liées au référentiel sidéral qu'est l'ensemble de l'Univers et non à la Terre qui n'agit que par sa gravitation et n'est, en l'occurrence, qu'un support matériel pour observer les phénomènes décrits.

Dès que nos corps sont lâchés sans vitesse relative par rapport à la Terre, on peut dire qu'ils ne conservent que la composante de translation du mouvement terrestre et se trouvent affranchis, pour les degrés de liberté que nous leur accordons, de la rotation de notre planète.

La théorie de la Relativité explique cette liaison du corps en chute libre ou de la boule du pendule au référentiel sidéral par l'interaction entre toutes les masses présentes dans l'univers, que l'on appelle l'inertie de la matière.

Cette étude montre que ces deux expériences prouvent bien que c'est la Terre que nous voyons tourner sous le corps en chute libre et sous le pendule de Foucault.

Quand Galilée fut condamné, à tout le moins au silence, c'est donc avec raison qu'il frappa du pied sur le sol, non pas de dépit, mais bien pour désigner l'objet de toutes ses réflexions : la Terre, en ajoutant *in petto* : EPPUR SI MUOVE ! Et pourtant, elle est mobile !

BIBLIOGRAPHIE

(ORDRE CHRONOLOGIQUE)

[1] **Histoire de la Physique**, par Johann Christian Poggendorff 1878 (traduction française de E. Bibart et G. de la Quesnerie 1883) 582 pages. Réimpression 1993 Jacques Gabay ISBN 2-87647-093-4, 151 bis rue Saint-Jacques 75005 Paris

[2] **Astronomie populaire**, par Camille Flammarion (1879)

[3] **Bulletin de la Société Astronomique de France**, 3 rue Beethoven 75016 Paris :

- 1896 : Les preuves mécaniques de la rotation de la Terre, par Ph. Gilbert, (Novembre : pages 348 à 359 et Décembre : pages 381 à 393)

- 1897 : Sur la déviation des graves, par Maurice Fouché, (pages 246 à 253)

- 1902 : Le pendule du Panthéon, par Camille Flammarion (Novembre : pages 465 à 480)

- 1903 : Expériences sur la déviation de la chute des corps faites au Panthéon (pages 329 à 335).

[4] **La rotation de la Terre, ses preuves mécaniques anciennes et nouvelles** par le Père J.G. Hagen : Spec. Astr. Vaticana (189 pages) - 1911 -

[5] **Cours de Mécanique théorique et appliquée** (Tome 1, Chapitre XI § 201), professé à l'École Polytechnique, par Henri Beghin, Gauthiers-Villars, Paris, 1952.

[6] Les Preuves de la Rotation de la Terre, par Henri Beghin : Conférence faite au Palais de la Découverte, Paris, 23 Avril 1955 (24 pages).

[7] Revue Géomètre, 40 avenue Hoche 75008 Paris - ISSN 0295422.

- Octobre 1959 : Appareil Gebi, par Clément Abel (pages 515 à 520)

- Avril, Mai, Juin 1979 : Les premières lunettes, par Roland Lesprit (23 p)

- N° 4 - 1983 : Une histoire d'appareils, par Clément Abel (pages 51 à 56)

[8] Plaquette de la Société Astronomique de France : Galilée et la pensée contemporaine, pour le quatrième centenaire de sa naissance, par Paul Couderc : 24 pages (Janvier 1966).

[9] Oscillations et stabilité selon Foucault, par Paul Acloque, Éditions du CNRS, Paris 1981, 150 pages, ISBN 2-222-02849-3, diffusé par la Documentation française.

[10] Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences - C.N.R.S. Paris

- nouvelle série N°4, 1982 : Histoire des expériences pour la mise en évidence du mouvement de la terre, par Paul Acloque, 141 pages

[11] Mesurer la Terre, 300 ans de Géodésie française, par Jean-Jacques Levallois. Publié par l'Association Française de Topographie, 136 bis rue de Grenelle, 75007 Paris -1988-ISBN 2-907586-00-6

- Chapitre I - Les précurseurs, l'œuvre de Picard (pages 13 à 19)

- Chapitre III - La Terre est un sphéroïde aplati (pages 31 à 47).

[12] Revue XYZ de l'Association Française de Topographie, 136 bis rue de Grenelle, 75007 Paris -ISSN 0290-9057.

- N° 58 - 1994, 1er trimestre : À propos de Coriolis, par Robert Genty (pages 60 à 64)

[13] Le pendule de Foucault au Musée National des Techniques du Conservatoire des Arts et Métiers, 32 pages, 270 rue Saint-Martin 75003 Paris -1990- ISBN 2-908207-04-4

[14] Le Ciel, revue de la Société Astronomique de Liège, avenue de Cointe 5, 4000 Liège - ISSN 0771-3010.

- Numéro spécial - 1993 : Autour du pendule de Foucault, par Joseph Barsics, Yves De Rop, André Lausberg, Jean Manfroid, 46 pages.

[15] Revue du Palais de la Découverte - Paris - ISSN 0339-7521.

- N° 210 Juillet-Août-Septembre 1993 : La physique sur un manège, par Gérard Rumèbe (pages 61 à 69)- Département Physique, Palais de la Découverte - Paris.



Jean Bernard Léon Foucault
1819 - 1868