A PROPOS DE CORIOLIS

par Robert GENTY
Professeur honoraire de mécanique spatiale - Lauréat de l'Institut

RESUMÉ

Les professeurs de météorologie et d'océanologie rencontrent actuellement de sérieuses difficultés auprès de leurs élèves en ce qui concerne l'introduction de l'accélération de CORIOLIS dans les équations du mouvement des courants aériens et marins à la surface du Globe.

Les étudiants, tout en reconnaissant l'efficacité du procédé de Coriolis, éprouvent quelques scrupules à l'endroit du référentiel galiléen d'une part et, d'autre part, ne saisissent pas bien sa signification physique, ce qui ne laisse pas de les troubler.

L'auteur, familiarisé depuis de longues années avec ce genre de problème, offre une interprétation physique de cette accélération en s'appuyant sur un exemple relatif à la composante horizontale de l'accélération de Coriolis.

ABSTRACT

Professors in meteorology and oceanology are now in front of serious difficulties with their pupils concerning the introduction of the CORIOLIS acceleration into the equation of the movement of aerial and sea streams at the surface of the Earth.

The students, recognizing the efficacy of the Coriolis process, feel some scruples about the galilean referential and do not understand well its physical meaning. That is not without any trouble for their minds.

The author, familiarized since many years with the sort of problem, offers a physical interpretation of the Coriolis acceleration, supported by one exemple relative to the horizontal component of the Coriolis acceleration.

La lecture d'un certain nombre d'articles récemment parus dans la presse technique révèle que les professeurs de mécanique appliquée telle que la météorologie dynamique, rencontrent vis-à-vis des élèves, des difficultés de plus en plus grandes quant à l'introduction de la force de CORIOLIS dans les équations de mouvement des mobiles à la surface du Globe.

Nous allons tenter d'expliquer pourquoi.

MAIS QUI ÉTAIT DONC CORIOLIS

Gustave Gaspard CORIOLIS, né à Paris en 1792 et mort en ce même lieu en 1843, était un mathématicien de talent, à la fois ingénieur et mécanicien -on dirait plutôt aujourd'hui "mécaniste". Directeur de la jeune "Ecole Polytechnique" (créée en 1794), il fut également professeur d'analyse géométrique et de mécanique générale de la toute nouvelle "Ecole Centrale des Arts et Manufactures", fondée en l829. Il publia un précis sur le calcul de l'effet des machines, pistons et frottements et en 1836 une étude sur la figure des remous.

Enfin il établit, dans un théorème devenu célèbre, le rôle de la force centrifuge composée (force dite de Coriolis), dans la solution des problèmes d'hydraulique.

Il était membre de l'Académie des Sciences.

THÉORÈME DE CORIOLIS

Dans un mouvement absolu, l'accélération résultante est la somme géométrique de l'accélération d'entraînement, de l'accélération relative et d'une accélération complémentaire égale au double du produit vectoriel de la rotation d'entraînement $\vec{\Omega}$ et de la vitesse relative $\vec{V}_r$.

Ce théorème se prête particulièrement bien à l'analyse des mouvements à la surface de la Terre, compte tenu de la rotation diurne (1).

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE CORIOLIS (2)

Je donnerai une démonstration analytique condensée de cette proposition de manière à disposer d'un outil de travail valable.

Dans un référentiel galiléen S' -donc absolu- on repère le mouvement d'un mobile M par l'intermédiaire d'un référentiel relatif S et d'un mouvement d'entraînement comportant une rotation.

Soit γ_a l'accélération absolue,

γ_e l'accélération d'entraînement,

γ_r l'accélération relative

γ_c l'accélération complémentaire dite de "Coriolis"

et la figure I

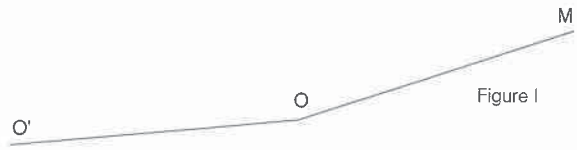

Figure I

O' origine du référentiel S'
O origine du référentiel S

Le mouvement de S par rapport à S' est dit mouvement d'entraînement.

On peut écrire : $\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM}$

et en appelant $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{h}$ les vecteurs unitaires respectifs de Ox, Oy, Oz il vient :

$\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{xi} + \overrightarrow{yj} + \overrightarrow{zh}$

(1) Rotation de la Terre, sensiblement $\Omega = 7{,}29212 \times 10^{-5}$ radians/seconde, par rapport aux étoiles fixes.
(2) Il existe une démonstration purement vectorielle.

En dérivant deux fois cette expression par rapport au temps, on obtient une expression de $\vec{\gamma}_a$ égale à $\vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_r$, somme accompagnée d'un terme

$$\vec{\gamma}_c = 2\,\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_r$$

où $\vec{\Omega}$ est la rotation instantanée d'entraînement et $\vec{V}_r$ la vitesse relative.

$\vec{\gamma}_c$ est ce qu'on appelle l'accélération de Coriolis.

*
* *

D'après certains auteurs, la raison de ces difficultés serait, au principal, les doutes pesant sur la validité du caractère galiléen du référentiel utilisé, ayant pour origine le centre de la Terre E, pour plan de base celui de l'équateur et pour axe Oz son axe de rotation.

Certes, il est indéniable que la question se pose en termes de mathématiques puisque le centre E de la Terre décrit en fait une courbe -conique- avec une vitesse essentiellement variable, ce qui exclut toute interprétation galiléenne le concernant.

Toutefois, en dépit de cette remarque, je crois que les difficultés en cause sont dues à autre chose.

Je vais m'en expliquer :

Naguère et dans ma jeunesse, les astronomes, les géodésiens, les professeurs d'"hydrographie", les ingénieurs hydrographes, les navigateurs maritimes et aériens, se fondant sur le fait que les observations astronomiques étaient généralement de courte durée, quelques heures au plus, admettaient que dans ce laps de temps, le centre de la Terre décrivait une portion de ligne droite avec une vitesse constante, ce qui suffisait à conférer au référentiel en cause, un caractère galiléen.

Evidemment cette disposition ne vaut plus pour les courants marins et aériens. Mais en l'occurrence qu'il nous soit permis de nous reporter à l'ouvrage "l'océanographie physique" (Gauthiers Villars - Paris 1965) de Henri LACOMBE, mon très éminent confrère à l'Académie de Marine, membre de l'Institut.

On y trouve à la page 82, les lignes qui suivent :

"8 - Forces secondaires : la force centrifuge composée due à la rotation de la Terre ou force de Coriolis.

Par rapport à des axes ΩXYZ (Ω centre de la Terre, XΩY plan de l'équateur, ΩZ axe de rotation de la Terre), d'orientation fixe par rapport aux étoiles et dont l'origine est située au centre Ω de la Terre, le mouvement de celle-ci est très sensiblement constitué par une rotation autour de l'axe des pôles ΩZ.

Lorsque l'on ne considère pas (comme on le fait dans le cas des marées) l'action sur les mobiles des forces extérieures à la Terre, on peut tenir ces axes comme absolus".

Autrement dit, il admet avec les astronomes dans les mêmes circonstances, le caractère galiléen du référentiel en cause, comme une approximation valable.

Compte tenu du fait qu'en l'occurrence, les observations touchant des phénomènes physiques à la surface du Globe comportent des paramètres encore fort mal connus, introduisant des incertitudes notables, le choix de l'approximation de Henri Lacombe se trouve pleinement justifié.

En réalité, il ne semble pas qu'il y ait jamais eu de très graves difficultés de la part des étudiants quant à l'emploi de l'effet de Coriolis au titre des équations des mouvements des mobiles à la surface de la planète -à tout le moins pour ce qui découle du sujet traité.

*
* *

Cependant, je suis le premier à reconnaître que l'effet de Coriolis n'apparaît pas de façon très claire aux élèves. J'en ai fait personnellement l'expérience au cours de longues années -Mais celà pour des raisons différentes de celles que je viens d'évoquer.

Bien plus que des doutes sur le caractère galiléen du référentiel en jeu, c'est plutôt le mystère même entourant la nature de l'accélération de Coriolis qui les inquiète et qui les effraie.

Revenons à la formule : $2\,\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_r$

Certes, son équation aux dimensions est celle d'une accélération. Mais il est tout à fait évident qu'elle ne saurait traduire une variation de vitesse, image même de l'accélération.

Il y a là comme une anomalie, d'où les difficultés d'appréhension mentale de la part des étudiants rendus trop cartésiens par leur formation mathématique.

C'est que cette formule de Coriolis leur est signifiée au cours des premières années des grandes écoles d'ingénieurs ou des universités, au moment même où, précisément, ils se trouvent confrontés avec les applications pratiques de la science.

Voilà qui ne manque pas de troubler les cerveaux de nos jeunes gens habitués à ne pas mélanger les genres.

Il faut dire que l'amalgame en cause est une construction particulièrement audacieuse de Gustave Coriolis. Il s'agit là d'un artifice qui se dissimule sous l'aspect d'une formulation mathématique impeccable.

Que faut-il donc penser de tout celà?

Dans le mouvement relatif d'un mobile, la vitesse relative $\vec{V}_r$, et dans le mouvement d'entraînement, la vitesse d'entraînement $\vec{V}_e$, peuvent varier indépendamment l'une de l'autre avec des accélérations respectives $\vec{\gamma}_r$ et $\vec{\gamma}_e$. Mais de surcroît, à chaque instant il faut comparer $\vec{V}_r$ à la vitesse d'entraînement de rotation issue de $\vec{\Omega}$, qui croît à mesure de la distance au centre de rotation.

C'est de cette comparaison que naît l'accélération complémentaire ou accélération de Coriolis.

Cette accélération, très commode par ailleurs, est purement fictive.

*
* *

N'est-il pas possible dans certains cas de résoudre les problèmes posés sans faire intervenir Coriolis?

C'est ce que nous allons tenter en utilisant les seules règles essentielles de la mécanique rationnelle.

Nous choisirons pour ce faire un problème type qui porte le nom de celui qui l'a posé la première fois, et qui est resté près de deux siècles sans solution, à savoir le "problème de LAPLACE".

C'est que ce problème est en relation directe avec les préoccupations que certains topographes et géomètres ont eues en utilisant la chute libre d'un corps par gravité pour assurer, dans un puits d'accès à des ouvrages souterrains, la transmission verticale de coordonnées ou d'une direction.

Mais voyons la chose de plus près :

PROBLÈME DE LAPLACE

En 1796, LAPLACE donnait de son problème, l'énoncé suivant :

"...Cependant, la vitesse réelle due à la rotation de la Terre, étant un peu moindre au pied qu'au sommet de la tour élevée, si de ce sommet on abandonne un corps à sa pesanteur, on conçoit qu'en vertu de l'excès de sa vitesse réelle de rotation sur celle du pied de la tour, il ne doit pas tomber exactement au point où le fil-à-plomb qui part du sommet de la tour, va rencontrer la surface de la Terre, mais un peu plus à l'Est de ce point.

L'analyse fait voir, en effet, que l'écart de ce point n'a lieu que vers l'Est, qu'il est proportionnel à la racine carrée du cube de la hauteur de la tour et au cosinus de la latitude, et qu'à l'équateur il est de

21,952 mm pour 100 mètres de haut".

Il vient tout de suite à l'esprit de suivre à la lettre l'énoncé de LAPLACE, pour vérifier en particulier le calcul numérique.

Considérons le cas général d'une tour AB, verticale, de hauteur "h", à la latitude φ (figure II)

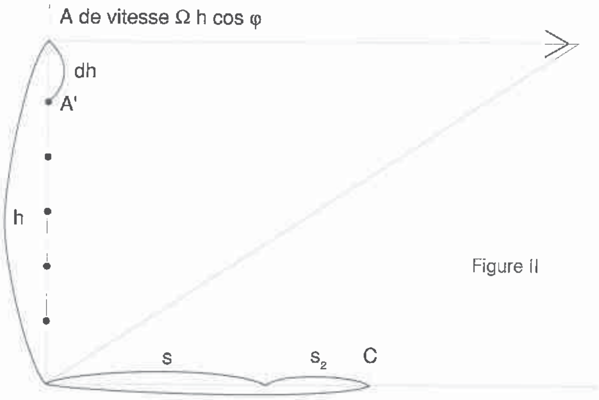

Figure II

D'après ce que dit LAPLACE, la vitesse au sommet A est en excédent par rapport à celle de B et d'une quantité égale à :

$$\Omega (R + h) \cos \varphi - \Omega R \cos \varphi$$

Ω étant la vitesse angulaire de rotation de la Terre autour de son axe, R étant le rayon de celle-ci supposée sphérique. Cet excédent se trouve égal à :

$$\Omega h \cos \varphi$$

En tenant compte de cette valeur, c'est-à-dire en admettant que le point B est immobile et que le point A est animé de la vitesse Ω h cos φ, un point matériel lâché de A doit tomber en C, à la distance horizontale s_1 de B, comptée vers l'Est de B vers C telle que :

$$s_1 = \Omega h t_1 \cos \varphi$$

t_1 étant le temps de chute de la hauteur h qui satisfait d'autre part à

$$h = g t_1^2 / 2$$

g étant l'accélération de la pesanteur.
d'où :

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

On peut alors écrire :

$$s_1 = \Omega h \sqrt{\frac{2h}{g}} \cos \varphi$$

$$s_1 = \frac{1}{2} \Omega h \sqrt{\frac{8h^3}{g}} \cos \varphi$$

expression conforme aux dires de LAPLACE, puisque proportionnelle à la racine carrée du cube de la hauteur et au cosinus de la latitude φ.

Calculons la valeur numérique de s_1 pour h = 100 m en φ = 0. Nous prendrons g = 9, 78049 m/s² ou plus simplement g = 9,78 m/s² et Ω = 7,29212 x 10^{-5} rad/s.

On obtient

$$s_1 = \frac{7{,}29212}{2 \times 10^5} \sqrt{\frac{8 \times 10^6}{9{,}78}} = 0{,}032976 \text{ m}$$

s_1 = 32,976 mm

valeur beaucoup trop grande pour être rapprochée de celle de LAPLACE.

Au demeurant, de deux choses l'une

- ou LAPLACE s'est trompé, ce qui n'est pas vraisemblable,
- ou notre interprétation de son énoncé est mauvaise, ce qui est probable.

*
* *

Pour en avoir le cœur net, calculons l'écart considéré avec la méthode actuelle en introduisant la force de CORIOLIS

L'accélération de Coriolis vaut en la circonstance (fig. III)

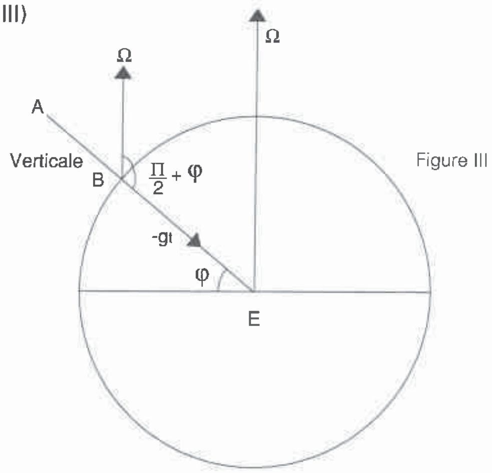

Figure III

$$2\,\Omega\,g\,t\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right) = 2\,\Omega\,g\,t\cos\varphi$$

Elle est horizontale et comptée vers l'Ouest.

L'accélération du mouvement en découlant, pour le point matériel en chute est : $2\,\Omega\,g\,t\cos\varphi$ -horizontale et comptée vers l'Est- La vitesse correspondante est

$$\Omega\,g\,t^2\cos\varphi$$

Dans ces conditions, l'espace parcouru horizontalement vers l'Est est :

$$s = \frac{1}{3}\Omega\,g\,t_1^3\cos\varphi = \frac{1}{3}\Omega\sqrt{\frac{8\,h^3}{g}}\cos\varphi$$

L'application numérique donne donc pour les conditions choisies :

$$s = \frac{1}{3}\,\frac{7{,}29212}{10^5}\sqrt{\frac{8\times10^6}{9{,}78}} = 21{,}987\text{ mm}$$

valeur qu'il est alors loisible de rapprocher de celle de Laplace soit 21,952 mm. La différence de 0,032 mm fait apparaître une erreur relative de sensiblement 1,5/1000, ce qui est faible compte tenu du fait que les constantes introduites dans le calcul ne sont certainement pas identiques à celles qu'avait utilisées Laplace.

Il en résulte que ce grand savant ne s'était pas trompé et c'est bien notre interprétation de son énoncé qui était fausse.

Que fut donc le raisonnement de Laplace en son temps ?

A notre avis, il a pu être le suivant :

Lorsque l'on considère la chute du point matériel animé en A -et par rapport à B supposé immobile- de la vitesse horizontale vers l'Est, $\Omega\,h\cos\varphi$, on s'aperçoit qu'il traverse des domaines liés à la Terre situés entre les altitudes, h en A et 0 en B, qui eux-mêmes sont en mouvement du fait de la rotation de la Terre avec des vitesses horizontales comptées vers l'Est, comprises entre $\Omega\,h\cos\varphi$ en A et 0 en B (fig II).

Il s'ensuit que dans le premier instant dt de la chute, il y a lieu de noter que la vitesse $\Omega\,h\cos\varphi$ du point A est légèrement supérieure à $\Omega\,(h - dh)\cos\varphi$, dh étant la chute correspondant au temps dt. Cette vitesse est celle du point A' placé immédiatement au-dessous du point A, à la distance verticale dh de celui-ci, entraînant en effet le point matériel vers l'Est, mais beaucoup moins vite que dans l'hypothèse ci-dessus où, implicitement, on a dévolu à toutes les altitudes de B à A, une vitesse horizontale vers l'Est nulle, tout comme en B, à l'exception du point A animé, ainsi qu'on l'a déjà vu, de la vitesse $\Omega\,h\cos\varphi$ vers l'Est.

Il va sans dire que cette démarche de pensée avait conduit à trouver une valeur s_1 trop grande.

Il convient donc de calculer la valeur s_2 sur l'horizontale de B, que l'on a comptée en trop, pour la retrancher de s_1.

La différentielle en dt, "dh" va nous guider dans notre raisonnement.

En effet, la tranche d'altitude dh donne naissance à une vitesse différentielle :

$dv = \Omega\,dh\cos\varphi$ avec $dh = g\,t\,dt$

d'où $dv = \Omega\,g\,t\cos\varphi\,dt$

et la vitesse horizontale correspondante, comptée négativement

$v = 1/2 \times \Omega\,g\,t^2\cos\varphi$

L'espace s_2 compté en trop sera :

$$s_2 = \frac{1}{6}\Omega\,g\,t^3\cos\varphi = \frac{1}{6}\Omega\sqrt{\frac{8\,h^3}{g}}\cos\varphi$$

Effectuons la soustraction $s_1 - s_2$, il vient :

$$s_1 - s_2 = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)\Omega\sqrt{\frac{8\,h^3}{g}}\cos\varphi = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8\,h^3}{g}}\cos\varphi$$

qui n'est autre chose que l'expression de s calculée par la méthode de Coriolis.

Il est donc pleinement plausible de supposer que Laplace -qui ne pouvait connaître les travaux de Coriolis poursuivis plusieurs dizaines d'années plus tard- a dû tenir un raisonnement à tout le moins voisin du précédent, pour trouver le bon résultat.

Remarquons de plus que la dernière formule:

$$s = \frac{1}{3}\Omega\sqrt{\frac{8\,h^3}{g}}\cos\varphi$$

est parfaitement conforme à l'énoncé de Laplace car s y est proportionnelle à la racine carrée de h^3 et au cosinus de la latitude φ.

Cette analyse fait incontestablement apparaître la vraie nature physique de l'accélération de Coriolis, montrant qu'elle est issue d'une comparaison de vitesse et non pas d'une variation de vitesse.

*

* *

Revenons maintenant aux préoccupations des topographes et géomètres lors de travaux souterrains, plus spécialement pour la jonction avec les canevas de surface, en position et orientation, par des opérations dans des puits verticaux.

On peut aussi bien, en de telles circonstances, utiliser différents procédés: magnétique (boussole ou compas) ou gyroscopique pour l'orientation, optique ou par fil à plomb pour les descentes verticales. Mais ces derniers procédés, très classiques, présentent l'inconvénient d'encombrer les puits qui, lors des travaux, servent en priorité à l'évacuation des déblais souterrains. C'est la raison pour laquelle la chute d'une bille a été parfois utilisée pour matérialiser la descente d'une verticale dans un puits, en tenant compte alors de la déviation vers l'Est.

Ce procédé a fait l'objet d'une réalisation pratique sous la forme d'un appareil appelé GEBI conçu en 1957 par le Cabinet GILBERT et décrit en détail dans les numéros de la revue "GEOMETRE" d'Octobre 1959 et d'Avril 1983 par Monsieur Clément ABEL, Géomètre-Expert foncier DPLG, auiourd'hui directeur de la Société EGETO à Mantes-la-Jolie. Dans le même ordre d'idées, Monsieur Robert TATON, professeur à l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, a décrit cet appareil et son usage dans son livre "TOPOGPAPHIE SOUTERRAINE" publié aux Editions Eyrolles en 1960.

Toutefois, bien qu'accompagné de la formule de LAPLACE très correctement reproduite, aucun de ces écrits ne comporte à l'appui la démonstration de la formule. On y trouve rappelées, à juste titre, les expériences les plus connues touchant le problème de LAPLACE :

CASSINI à l'Observatoire de Paris,

REICH à Freisberg en Saxe en 1831,

HALL à Harvard en 1902,

FLAMMARION à Paris (Panthéon) en 1903,

et l'utilisation plus récente de l'appareil GEBI cité ci-dessus lors de la construction par E.D.F. du barrage de Rabodanges dans l'Orne.

CONCLUSION

En résumant ma pensée, on peut imaginer, dans un mouvement relatif, un point mobile animé de la vitesse Vr, traversant des espaces en rotation où les vitesses d'entraînement Vé croissent avec la distance au centre de rotation.

A chaque instant par conséquent, il faudra comparer Vr à une vitesse croissante Vé et cette comparaison va révéler une variation **apparente** de vitesse globale, donc la naissance d'une accélération tout aussi **apparente**.

Je pense et je souhaite qu'une telle remarque devrait satisfaire les étudiants qui se posent encore des questions quant à la nature même de l'accélération de Coriolis.

Mais c'est peut-être également à l'endroit des professeurs que -sans leur faire un procès- on puisse espérer que, dans la mesure du possible, ils s'attachent à employer les connaissances préacquises par leurs élèves pour situer l'accélération de Coriolis dans son contexte véritable, c'est-à-dire une mécanique bon enfant, accessible à tous.

EOLE : UN GRAND CHANTIER EN REGION PARISIENNE

POURQUOI ?

EOLE, ou Est Ouest Liaison Express, contribuera à un meilleur aménagement régional en favorisant les échanges entre Paris et les nouveaux sites de développement de la région Ile-de-France, tels que La Défense à l'ouest et Marne-la-Vallée à l'est. En créant :
- de nouvelles liaisons directes dans Paris entre le quartier des Gares du Nord et de l'Est et le quartier Saint-Lazare-Opéra ;
- une nouvelle desserte des quartiers de La Villette-Aubervilliers et de Port-Cardinet/Batignolles ;
- la réorganisation du réseau RER dans Paris autour de trois centres d'échanges : Châtelet-Les Halles, nord-est et Saint-Lazare-Auber.

UNE DIMENSION EUROPEENNE

Actuellement, 2 300 000 habitants de la région Ile-de-France sont concernés par cette réalisation. En heure de pointe, la fréquentation de la nouvelle Liaison Express entre les secteurs nord-est et Saint-Lazare sera de plus de 30 000 voyageurs pour 18 trains dès l'achèvement de la 1re étape, pour atteindre 45 000 voyageurs pour 24 trains lors de la 2e étape.

Cette nouvelle ligne donnera lieu à un accès direct entre les pôles de développement économique et le futur TGV Nord vers Londres et Bruxelles et, à terme, le TGV Est vers Berlin et Hambourg.

COMMENT ?

Quatre nouvelles gares RER seront ouvertes. Elles correspondront aux accès à la nouvelle ligne EOLE dans Paris et amélioreront sensiblement les relations avec les réseaux RER, métro et bus. Le tracé EOLE bénéficie d'un tronçon en voie souterraine sur 7 km, situé entre les quartiers de La Villette/Aubervilliers et de Port-Cardinet/Batignolles.

Le coût : 7 400 MF dont 4 930 MF pour la première phase.

QUAND ?

Les travaux ont commencé en 1992. Dans une première étape et dès 1998, EOLE rendra possible la liaison entre la banlieue est et le quartier Saint-Lazare-Opéra, avec l'ouverture des deux premières gares nouvelles.

LE CHANTIER EOLE ET LES TRAVAUX SOUTERRAINS

Le lot 34B du chantier EOLE, dont la réalisation a été confiée au groupement d'entreprises Dumez et Chantiers Modernes, consiste en la construction de la nouvelle gare RER des quartiers Gare du Nord/gare de l'Est.

La phase actuelle des travaux se situe par 30 mètres de profondeur. Il s'agit de l'excavation d'une galerie de 225 m de longueur et 53 m de largeur sur 9 m de hauteur. Les travaux ont débuté en juin 93, ils dureront 4 ans. La galerie de reconnaissance est d'ores et déjà achevée. Le cliché qui fait la couverture d'XYZ a été pris dans la galerie Est, en cours de creusement.

M. Guérin, responsable de la topographie du chantier, a choisi une station Nikon KHEOPS 750 pour réaliser les descentes de puits, le canevas planimétrique et les différents travaux d'auscultation.

Dans les conditions extrêmes de travail que représente le creusement d'un tunnel, la grande convivialité d'utilisation de la station KHEOPS est un atout certain, au même titre que ses qualités objectives de luminosité, de précision et de puissance du distancemètre.