

SCIENCES GÉOGRAPHIQUES, CONNAISSANCE DU MONDE ET CONCEPTION DE L'UNIVERS DANS L'ANTIQUITÉ PÉRIODE GRECQUE (SUITE)

par Raymond d'Hollander, ingénieur général géographe

Chapitre 7 L'astronomie grecque de la fin du 4ème Siècle et du 3ème Siècle avant J.C.

L'histoire de l'astronomie grecque de la fin du 4ème siècle et du 3ème siècle avant J.C. est marquée par deux faits saillants :

a) la réfutation du dogme de la fixité de la Terre qu'**Héraclide du Pont** fait tourner sur elle-même et qu'**Aristarque de Samos** fait à la fois tourner sur elle-même et autour du soleil, concevant ainsi l'héliocentrisme 18 siècles avant Copernic.

b) des essais de détermination des dimensions du système solaire par Aristarque de Samos et par **Archimède**.

7.1 HÉRACLIDE DU PONT (375-310)

Héraclide du Pont eut pour maître Platon et vraisemblablement Aristote, auquel il survécut de 10 ans.

Deux propositions lui sont attribuées :

a) "Les phénomènes célestes peuvent être expliqués par une rotation de la Terre autour de son axe, la sphère des étoiles fixes étant immobile".

Le système de Philolaos consistait en une rotation de la Terre autour d'un feu central distinct du soleil. Héraclide faisait un pas de plus en supprimant le feu central et en faisant tourner la Terre sur elle-même d'un mouvement périodique d'à peu près 24 heures, ce qui, d'après une remarque de Simplicius, montre qu'Héraclide distinguait le jour sidéral du jour solaire.

b) Un commentaire très discuté de **Chalcidius** sur le **Timée** de Platon lui attribue cette deuxième proposition : "Héraclide du Pont, en décrivant le cercle de Vénus et celui du Soleil et donnant à ces deux cercles un centre (Unum punctum) et même mouvement moyen a montré comment Vénus est quelquefois supérieur et quelquefois inférieur au Soleil".

La plupart des historiens de l'astronomie ont interprété cette proposition selon le schéma de la figure 7.1 les mots inférieurs et supérieurs étant censés s'appliquer aux distances géocentriques ; on peut expliquer ainsi aisément les élongations maximales de Mercure et de Vénus ainsi que les rétrogradations de ces deux planètes : par exemple élongations maximales S1 et S2 pour Mercure et rétrogradation S2 B S1.

On a alors affaire à un système partiellement héliocentrique, deux planètes seulement tournant autour du soleil.

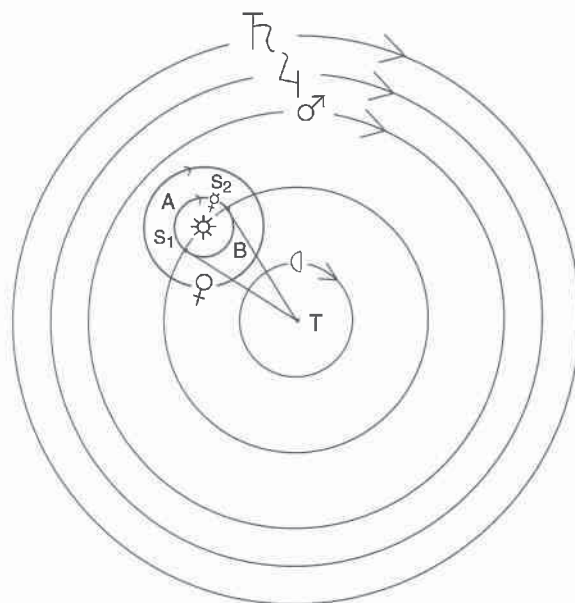


Figure 7.1

Système d'Héraclide du Pont, dit aussi système égyptien

Soleil ☼

Saturne ♄

Centre de la Terre T

Vénus ♀

Jupiter ♃

Mars ♂

Mercury ☿

Lune ☾

Par contre si on interprète "unum punctum" comme signifiant un centre unique et les mots supérieurs et inférieurs comme s'appliquant non plus aux distances, mais aux élongations, on a affaire à un système géocentrique classique. En effet lorsque Vénus a une élongation ⁽¹⁾ inférieure à celle du Soleil, elle apparaît dans le ciel après le coucher de celui-ci et brillant d'un vif éclat ; elle reçoit alors le nom "d'étoile du soir" ; lorsqu'elle a une élongation supérieure à celle du soleil, elle se lève avant le jour et elle est appelée : "étoile du matin". Mais on sait qu'un tel système géocentrique n'explique pas les rétrogradations de la planète lorsqu'elle passe de l'état "étoile du matin" à celui "d'étoile du soir".

(1) nous conviendrons de compter les élongations positivement dans le sens des aiguilles d'une montre.

Le système représenté par la figure 7.1 est appelé aussi "système égyptien" parce que, dans son commentaire sur le "**Songe de Scipion**", **Macrobe** au 4ème siècle après J.C. a attribué aux Egyptiens l'idée d'avoir fait tourner Mercure et Vénus autour du Soleil.

Un tel système a été cité aussi dans l'Antiquité par :

- **Vitruve** (1er siècle avant J.C.), donc au moins 200 après Héraclide du Pont, mais le texte de Vitruve est assez ambigu et a donné lieu à certaines controverses,
- **Théon Smyrne** (2ème siècle après J.C.) donc 500 ans environ après Héraclide du Pont,
- **Martianus Capella** (5ème siècle après J.C.), donc 800 ans environ après Héraclide du Pont.

Tannery (Bibl 2) va plus loin et identifie le système d'Héraclide à celui de **Tycho-Brahé**, avec les 5 planètes tournant autour du Soleil, le Soleil lui-même, accompagné de ses 5 satellites, tournant ainsi que la Lune autour de la Terre (Fig.7.2).

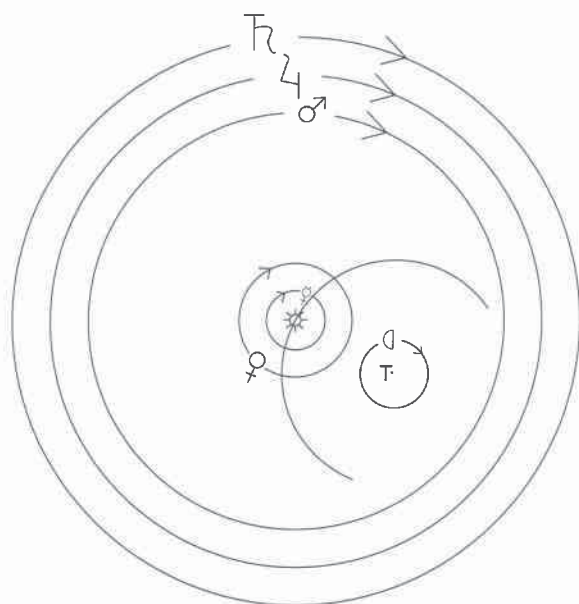


Figure 7.2

Système de Tycho-Braché

Soleil ☼	Jupiter ♃
Saturne ♄	Mars ♂
Centre de la Terre T	Mercure ☿
Vénus ♀	Lune ☾

D'autres auteurs modernes ont même attribué à Héraclide du Pont des mouvements épicycliques du Soleil et des planètes Mercure et Vénus, en se basant sur un passage ambigu du **Timée** de Platon, selon lequel Mercure et Vénus sont dotés de la faculté de rejoindre le Soleil et d'être rejointes par lui. Une telle hypothèse semble bien hardie.

Héraclide a indiscutablement eu le mérite dès le 4ème siècle avant J.C. d'introduire la notion de mouvement relatif en expliquant l'alternance du jour et de la nuit par une rotation de la Terre sur elle-même, la sphère des fixes restant immobile. Mais ni ses contemporains dont **Aristote** et **Théophraste**, ni ceux qui lui ont succédé d'assez près, comme **Posidonius** n'attribuent à Héraclide la conception d'un système héliocentrique de l'Univers ; seul un texte douteux de Géménus pourrait laisser croire qu'Héraclide aurait imaginé l'héliocentrisme, auquel cas Aristarque de Samos en aurait été le vulgarisateur.

Il reste toutefois beaucoup plus vraisemblable que la conception héliocentrique de l'Univers est due à Aristarque de Samos, le "**Copernic de l'Antiquité**". (voir n° 7.31 ci-après).

7.2 CONON DE SAMOS, ARISTYLLE DE SAMOS, TIMOCHARIS

Parmi les trois astronomes figurant au titre de ce paragraphe le premier, **Conon de Samos**, mérite d'être cité parce qu'il fut le maître d'Archimède, que ses observations ont servi à Ptolémée et enfin parce qu'il est à l'origine du nom de la constellation : "la chevelure de Bérénice". La reine d'Egypte Bérénice, suite à un vœu, avait déposé sa chevelure dans un temple de Vénus, d'où elle avait disparu. Conon de Samos, courtisan de la reine, affirma qu'elle avait été transportée au ciel pour former la constellation de "la chevelure de Bérénice", nom conservé jusqu'à nos jours.

Les deux autres astronomes **Aristylle de Samos** et **Timocharis** ont effectué leurs observations de façon continue pendant un quart de siècle. Ils semblent avoir été les premiers à avoir repéré la position des étoiles par rapport à l'écliptique en longitude et en latitude ; ils avaient noté avec suffisamment de soin leurs observations, de sorte que celles-ci servirent à Hipparque et à Ptolémée pour leurs déterminations de la précession des équinoxes. Timocharis observa notamment une appulse ⁽¹⁾ de la Lune avec l'Epi de la Vierge (étoile α de la constellation de la Vierge) ; la Lune ayant paru à l'horizon, l'étoile α de la Vierge y paraissait collée. Le même astronome observa aussi une occultation des Pleïades par la Lune. Enfin Timocharis et Aristylle observèrent plusieurs solstices.

(1) On appelle **appulse** le rapprochement apparent d'une étoile avec la Lune ou une planète, dans lequel l'étoile passe très près du limbe de la Lune ou de la planète sans être éclipsée.

7.3 ARISTARQUE DE SAMOS (CA 310-230 AVANT J.C)

7.3.1 L'Héliocentrisme

Aristarque, le dernier des astronomes pythagoriciens naquit, comme Pythagore, l'année où mourut Héraclide. Il ne reste d'Aristarque qu'un traité "**Des dimensions et des distances du Soleil et de la Lune**" que nous étudierons au paragraphe suivant. Mais Aristarque de Samos est surtout célèbre parce que 1800 ans avant Copernic il proclama que le Soleil et non la Terre est le centre de révolution des planètes. Malheureusement on a perdu l'ouvrage dans lequel il affirme cette doctrine, tellement révolutionnaire pour son époque, qu'il avait été dénoncé par **Cléanthe**, le stoïcien, aux orthodoxes de la Grèce païenne, comme un violateur de la religion, "parce qu'il faisait mouvoir le foyer du monde" et que pour expliquer les phénomènes célestes "il supposait le ciel en repos", pendant que "la Terre circulait par la **sphère oblique**" ⁽²⁾ en même temps qu'elle tournait de son propre axe".

Archimède dans son "**Arénaire**", écrit en 216 avant J.C., s'exprime ainsi :

"D'après Aristarque le monde serait beaucoup plus grand que nous venons de le dire, car il suppose que les étoiles et le Soleil sont immobiles, que la **Terre tourne autour du Soleil** comme centre et que la grandeur de la sphère des étoiles fixes, dont le centre est celui du Soleil, est telle que la circonférence du cercle qu'il suppose décrit par la Terre est à la distance des étoiles fixes comme le centre de la sphère est à la surface". Archimède, très rigoureux, rejette cette comparaison parce que le centre d'une sphère n'a pas de dimension ; mais il est évident qu'Aristarque voulait dire que l'orbite de la Terre est infiniment petite par rapport à la distance des étoiles au Soleil.

Plutarque au 1er siècle après J.C et **Sextus Empiricus** (2ème-3ème siècles après J.C) attestent aussi qu'Aristarque est bien le père de l'héliocentrisme, faisant mouvoir les planètes autour du Soleil. D'après ces mêmes auteurs Aristarque avait décrit aussi la rotation de la Terre sur elle-même produisant l'alternance du jour et de la nuit.

(2) Le terme "sphère oblique" peut avoir deux significations :

a) dans le cas général la sphère céleste est dite "oblique" lorsque l'équateur a une direction oblique par rapport à l'horizon du lieu ; ceci par opposition à "sphère droite" où l'équateur coupe l'horizon à angle droit (cas d'un lieu de l'équateur terrestre) et à "sphère parallèle" où l'équateur est parallèle à l'horizon (cas d'un lieu situé au pôle terrestre).

b) Ils s'agit ici de la sphère qui a pour axe la droite joignant les pôles de l'écliptique, droite oblique par rapport à la direction joignant les pôles de l'équateur céleste.

Toujours d'après Plutarque le double mouvement de la Terre : translation sur son orbite, rotation sur elle-même ont été considérés comme une hypothèse par Aristarque, comme un fait prouvé par **Seleucus**. Celui-ci surnommé "le mathématicien", originaire de Babylone, paraît avoir été le contemporain d'Aristarque de Samos ; il distinguait le mouvement diurne de la Terre (rotation) de son mouvement annuel (translation), mais contrairement à ce qu'affirme Plutarque, Seleucus d'après un de ses textes traduit en arabe, n'a fourni aucune preuve scientifiquement valable du double mouvement de la Terre. Le système héliocentrique d'Aristarque de Samos est représenté sur la fig. 7.3.

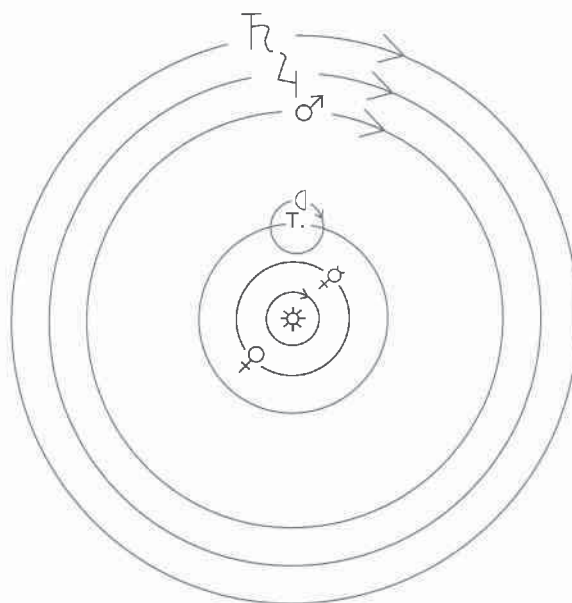
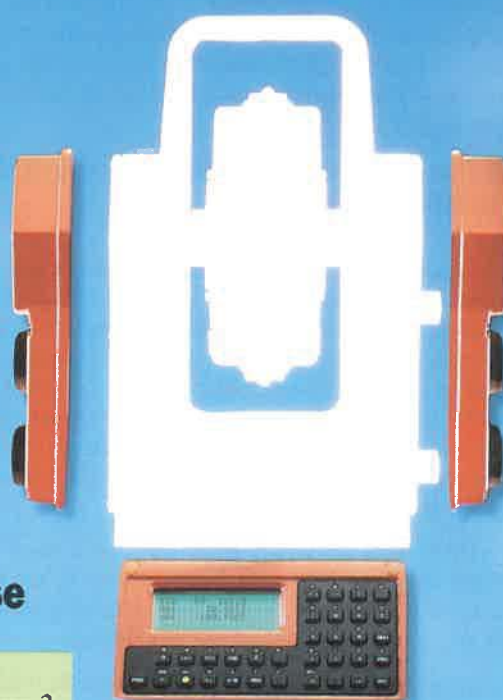


Figure 7.3

Système héliocentrique d'Aristarque de Samos

Soleil ☼	Jupiter ♃
Saturne ♄	Mars ♂
Centre de la Terre T	Mercury ☿
Vénus ♀	Lune ☾

Dans son commentaire sur le "Songe de Scipion" de **Cicéron**, déjà cité plus haut, **Macrobe**, puis plus tard **Julien l'Apostat**, au 4ème siècle de notre ère, citeront encore le système héliocentrique d'Aristarque, repris par **Seleucus**. Mais ni l'un ni l'autre n'avaient apporté d'arguments valables en faveur du mouvement de la Terre. L'absence de parallaxe observable à l'époque pour le Soleil et aussi pour les étoiles fixes ne militait pas en faveur d'une Terre mobile dans l'espace ; aussi l'accusation d'impiété dont Aristarque fut l'objet, le fait qu'il n'eut point de disciple jetèrent un voile sur cette doctrine pourtant fondamentale. **Hipparque**, **Ptolémée** reviendront au système géocentrique, qui subsistera durant tout le



Une acte de classe

Classe 1

Classe 2

Classe 3

Créez votre propre système de mesure à l'aide des modules suivants:
 ✓ Instrument de base (avec un système d'exploitation inégalé, un compensateur de non-verticalité à 2 axes, une liaison série bidirectionnelle, une optique coaxiale et beaucoup d'autres fonctions qui apportent plus d'efficacité, de fiabilité et de confort dans vos travaux).
 ✓ Trois classes de précision et de portée. ✓ Clavier numérique.

✓ Clavier alphanumérique. ✓ Entraînement motorisé. ✓ Entraînement mécanique. ✓ Stockage en mémoire interne de 1.000 à 10.000 points. ✓ Stockage en mémoire externe de jusqu'à 3.000 points. ✓ 10 programmes différents pour l'acquisition des données et les calculs de terrain. ✓ La RPU 500 permettant, depuis le point levé, de mesurer, stocker, vérifier et calculer des données mesurées.

Créez votre propre système de mesure!

Que feriez-vous si vous aviez la possibilité de créer votre système de mesure idéal? Vous le définiriez en fonction de vos méthodes et de vos types de travaux. N'est-ce pas? Quel serait le résultat souhaité? Plus de fiabilité et de rentabilité, bien sûr! Voilà résumée toute la philosophie du Geodimeter System 500. Le système que *vous* créez d'après vos besoins.

C'est aussi simple que cela. Vous commencez par choisir la classe de précision et de portée qui vous convient. Ensuite vous disposez d'environ 20 fonctions que vous pourrez choisir et combiner pour répondre à vos besoins. Une fois que vous aurez créé «l'instrument de vos rêves», nous allons le transformer en réalité... exactement comme vous le souhaitez. En d'autres termes, *vous décidez* des spécifications et du prix. N'est-ce pas cela la vraie liberté?

Geodimeter System 500

La liberté de choisir!

Tout cela vous intéresse? Contactez-nous pour convenir d'une démonstration ou demandez notre brochure détaillée. Vous y trouverez 65 bonnes raisons pour choisir le Geodimeter System 500.

Téléphonez-nous ou retournez-nous ce coupon par courrier ou par fax à Geotronics S.A., P.A. Les Portes de la forêt - Allée du Clos des Charmes - 77090 Collégien
 Fax. (1) 60 17 40 56

Oui à la créativité!

- ☐ Contactez-moi pour une démonstration
☐ Envoyez-moi la brochure du Geodimeter System 500.

Nom _____

Société _____

Adresse _____

Ville _____ Code Postal _____

Téléphone _____

Geotronics S.A. - P.A. Les Portes de la forêt - Allée du Clos des Charmes - 77090 Collégien - Tel. (1) 60 05 13 14 - Fax (1) 60 17 40 56



Moyen âge et c'est là un paradoxe étonnant dans l'histoire des Sciences que l'idée d'un univers géocentrique ait prévalu pendant 18 siècles, alors qu'un **Copernic** grec avait eu le génie de concevoir l'héliocentrisme près de 3 siècles avant J.C.

7.3.2 Des dimensions et des distances du soleil et de la lune

Le traité "**Des dimensions et des distances du Soleil et de la Lune**" comporte 19 théorèmes appelés propositions, exposées avec une rigueur toute euclidienne ; la trigonométrie n'étant pas encore née Aristarque ne peut que déterminer des limites inférieures et supérieures pour les divers rapports concernant les dimensions du système solaire, mais réduit au Soleil, à la Terre et à la Lune.

Aristarque affirme que la Lune reçoit sa lumière du Soleil, que la Terre n'est qu'un point à l'égard du rayon de l'orbite lunaire, celle-ci étant plus petite que l'orbite du Soleil.

Il en résulte que sans erreur appréciable on peut assimiler la position de l'oeil d'un observateur terrestre à celle du centre de la Terre. Rappelons qu'on appelle **parallaxe** d'un astre l'angle sur lequel on voit le rayon terrestre depuis cet astre. Si la parallaxe du Soleil, un peu moins de 9", échappait aux mesures à l'époque d'Hipparque, il n'en était pas de même de la parallaxe de la Lune qui vaut en moyenne : 1/60 de radian, la distance Terre-Lune variant de 56 à 60 rayons terrestres.

Nous allons passer en revue les différentes propositions d'Aristarque, mais nous n'entrons pas dans le détail des estimations très complexes des limites supérieures et inférieures de ses rapports, par des méthodes géométriques très ingénieuses ; la plupart du temps nous utiliserons une méthode trigonométrique beaucoup plus simple et plus rapide.

Proposition 1 "Puisqu'on voit la Lune éclipsée le Soleil et puisqu'on voit les deux astres sous le même diamètre apparent, le Soleil est plus grand que la Lune et la surface tangente à la fois aux deux astres est un cône".

Cette proposition à peu près évidente découle de l'examen de la figure 7.4 qui suppose le plan de l'écliptique (orbite du Soleil) confondu avec le plan de l'orbite lunaire. Soit S le centre du Soleil, T le centre de la Terre, L_0 la position du centre de la Lune lorsque celle-ci est en **conjonction** avec le Soleil **éclipse** celui-ci, L la position de la Lune lorsque celle-ci est en **quadrature** par rapport au Soleil, c'est-à-dire dans une position telle que $\widehat{SLT} = 90^\circ$.

Dans la position de l'éclipse de Soleil le cône commun aux deux astres a pour section par le plan de figure les génératrices GA_0T et FB_0T se rencontrant au centre de la Terre T, supposé coïncider avec le lieu d'observation sur la Terre (voir plus haut). Les deux génératrices $G'A$ et $F'B$ sont les sections par le plan de figure du cône tangent au Soleil et à la Lune lorsque celle-ci est en **quadrature** avec le Soleil. Les cercles A_0B_0 et AB de contact des deux cônes avec la Lune sont appelés les **terminateurs** ; nous désignerons leurs rayons par :

$$u_0 = l_0 A_0 \text{ et par } u = lA$$

Nous désignerons par :

- r_s le rayon du Soleil
- r_l le rayon de la Lune,
- R_s le rayon de l'orbite apparente du Soleil autour de la Terre : $R_s = TS$
- R_l le rayon de l'orbite lunaire autour de la Terre

$$R_l = TL = TL_0$$

Proposition 2 "La partie éclairée de la Lune est plus grande que la partie dans l'ombre, autrement dit le rayon du terminateur u est plus petit que le rayon r_l de la Lune". Ces deux propriétés résultent immédiatement de l'examen de la figure 7.4.

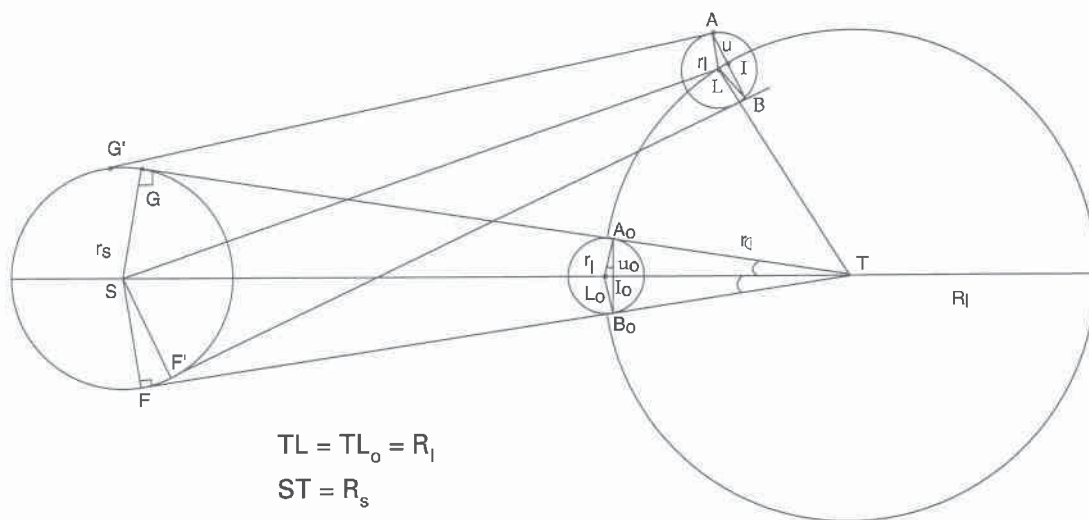


Figure 7.4

Proposition 3 "Le rayon du terminateur prend sa valeur la plus faible lorsque la Lune est en conjonction avec le Soleil".

En effet, c'est dans la position de conjonction que la Lune est la plus proche du Soleil ; le demi-angle au sommet du cône est alors le plus grand et le cercle de contact le plus petit ; donc $u_0 < u$.

Enonçons à la suite les propositions 4 et 5 ; nous verrons ensuite comment Aristarque les démontre.

Proposition 4 "Lorsque la Lune est en quadrature avec le Soleil, le terminateur est légèrement plus petit qu'un grand cercle de la Lune".

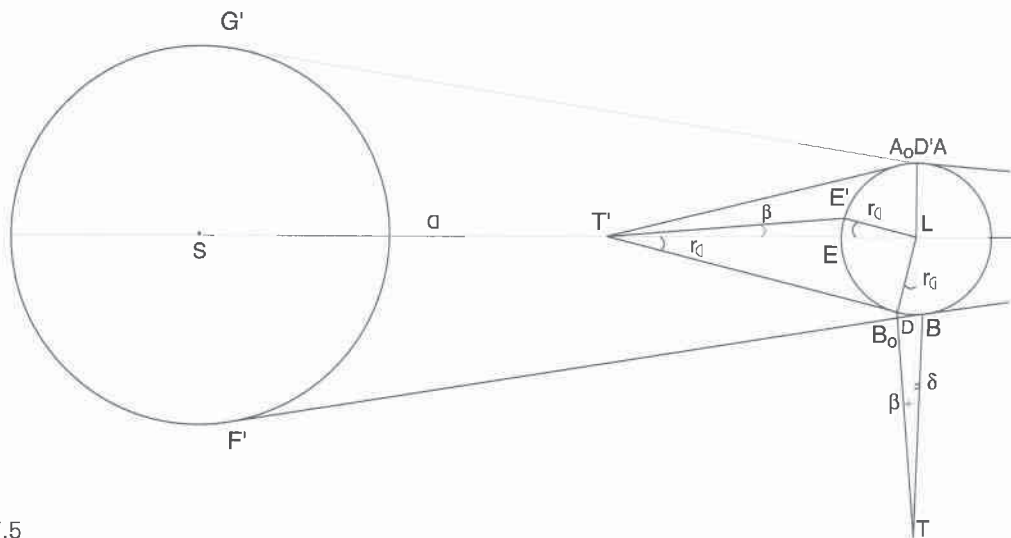


Figure 7.5

Désignons par AB le terminateur du cône d'ombre du Soleil sur la Lune en position de quadrature et par DD' le diamètre de la Lune perpendiculaire à SL (Fig 7.5).

Soit r_Q le demi-diamètre apparent de la Lune vue de T' : $r_Q = \widehat{LT'B_0}$; on retrouve cet angle en $\widehat{B_0LD}$, les deux angles ayant leurs côtés perpendiculaires.

$$\text{On a : } \sin r_Q = \frac{B_0L}{T'L} = \frac{r_l}{R_l}$$

Aristarque admet que $r_Q = 1^\circ$ ⁽¹⁾ et que : $r_Q < 1/45$,
inégalité très largement satisfaite puisque : $1^\circ \approx 1/57 \text{ rad}$

$$\text{On a donc : } r_l < \frac{R_l}{45}$$

Désignons par E l'intersection de SL avec la circonférence de la Lune, intersection la plus proche du Soleil.

$$R_l = T'L = T'E + EL = T'E + r_l, \text{ de sorte que :}$$

(1) en fait $r_Q = 16' = \frac{1}{215} \text{rd}$; nous reviendrons sur l'estimation environ quatre fois trop élevée d'Aristarque en 7.33.

Proposition 5 "Lorsque la Lune est en quadrature avec le Soleil, tout se passe comme si le plan du terminateur passait par le centre de la Lune et le centre de la Terre".

Dans la figure 7.5 nous avons reproduit les éléments de la figure 7.4 concernant la position de quadrature de la Lune avec le Soleil, mais par une rotation appropriée autour de L nous y avons rapporté les éléments relatifs à la conjonction ; nous avons :

$T'L = TL$ et de T' nous avons mené les deux tangentes T'A₀ et T'B₀ à la circonférence de la Lune.

$$r_l < \frac{T'E + r_l}{45}$$

$$\text{ou } 44 r_l < T'E$$

$$\text{ou } \frac{r_l}{T'E} < \frac{1}{44}$$

Considérons le rayon LE' perpendiculaire à LB₀, formant avec LE l'angle ELE' tel que :

$$\widehat{ELE'} = \widehat{B_0LD} = r_Q$$

Comme $LT' = LT$, les deux triangles LTB_0 et $LT'E'$ sont égaux, comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux ; d'où :

$$\widehat{LT'E'} = \widehat{LTB_0} = \beta \quad \text{et :}$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin r_Q} = \frac{r_l}{T'E'}$$

$$\text{comme : } \frac{\beta}{r_Q} < \frac{\sin \beta}{\sin r_Q}, \text{ on a : } \frac{\beta}{r_Q} < \frac{r_l}{T'E'}$$

Or il est clair que $T'E < T'E'$, de sorte que :

$$\frac{\beta}{r} < \frac{r_1}{T'E} < \frac{1}{44}$$

comme $r < \frac{1}{45}$, on a :

$$\beta < \frac{1}{44 \times 45}$$

Posons $\delta = \widehat{DTB}$; comme $A_0B_0 < AB$, il en résulte que le diamètre AB est plus proche de CD que A_0B_0 , donc $BD < B_0D$, d'où :

$$\delta < \beta < \frac{1}{1980}$$

Aristarque en déduit que δ est imperceptible à l'oeil ; tout se passe donc lors de la quadrature comme si le terminateur AB était confondu avec le diamètre $D'LDT$ (fig. 7.6), ce qui justifie l'énoncé des propositions 4 et 5.

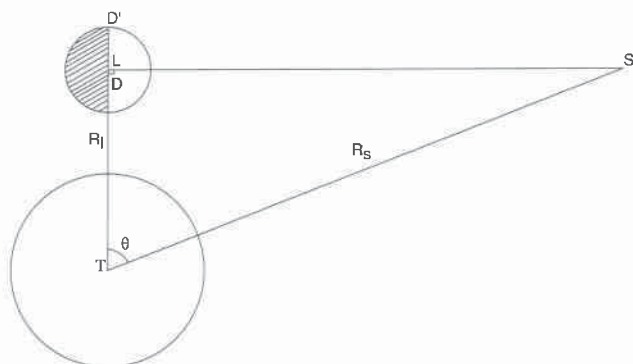


Figure 7.6

Proposition 6 "Le rayon de la Lune est inférieur à celui du Soleil et l'angle d'élongation θ lors de la quadrature ne diffère d'un quart de cercle que de la trentième partie d'un angle droit".

Autrement dit l'angle d'élongation $\theta = 87^\circ$ (voir fig 7.6). C'est un résultat bien médiocre puisqu'en fait : $\theta = 89^\circ 514'$; l'idée d'observer la Lune en position de quadrature est totalement impraticable ; l'élongation de la Lune varie de 1° en deux heures environ et l'on ne peut apprécier l'instant de la quadrature à mieux d'une heure près, d'où une erreur probable sur θ d'un demi degré environ.

Proposition 7 "Le rayon de l'orbite solaire R_s est compris entre 18 et 20 rayons R_l de l'orbite de la Lune".

$$18R_l < R_s < 20R_l \quad (1)$$

$$\text{ou } \frac{1}{20} < \frac{R_l}{R_s} < \frac{1}{18} \quad (2)$$

L'erreur effectuée par Aristarque sur l'angle θ entraîne une erreur très importante sur la connaissance du rapport $\frac{R_s}{R_l}$.

Si nous prenons pour R_s la valeur médiane : **$R_s = 19 R_l$** trouvée par Aristarque, on constate que cette valeur est très éloignée de la valeur correcte **$R_s = 385 R_l$** .

La trigonométrie nous permet de vérifier aisément le bien fondé de l'inégalité d'Aristarque : $18 R_l < R_s < 20 R_l$. En effet :

$$\cos \theta = \cos 87^\circ = \frac{1}{19,107}$$

$$\text{Or } \cos \theta = \frac{R_l}{R_s}, \text{ donc } R_s = 19,107 R_l$$

Mais Aristarque n'a pas les moyens de faire ce calcul puisque la trigonométrie n'était pas encore née ; aussi est il intéressant d'examiner comment il a procédé pour démontrer la double inégalité (2) ci-dessus.

Considérons sur la figure 7.7 très déformée le cercle de diamètre TS , de centre O , circonscrit au triangle rectangle TLS .

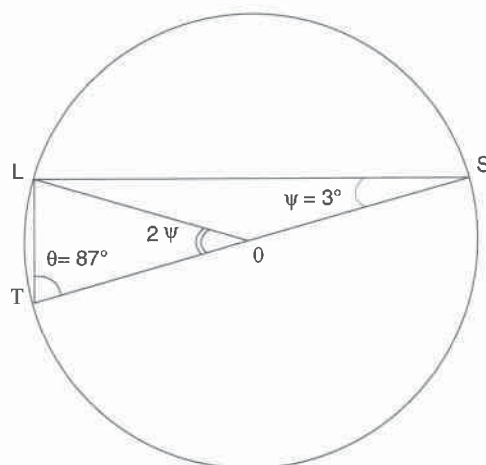


Figure 7.7

Comme $\widehat{LTS} = \theta = 87^\circ$, l'angle $\widehat{LST} = \Psi = 3^\circ$ et l'angle $\widehat{LOT} = 2\Psi = 6^\circ$.

Il en résulte que LT est la corde d'un angle de 6° . Sur la fig 7.8 construisons le cercle de rayon OL et le triangle équilatéral OLM , où : $LM = LO = \frac{TS}{2}$

et divisons l'arc \widehat{LM} de 60° en 10 parties égales à $\widehat{LT} = 6^\circ$. Soient T, B, C, \dots les points ainsi obtenus. Il est clair que le contour polygonal $LTBC \dots M$ a une longueur plus grande que la corde $LM = \frac{TS}{2}$, d'où :

$$10LT > \frac{TS}{2}$$

$$\frac{LT}{TS} > \frac{1}{20}$$

$$\text{soit : } \frac{R_l}{R_s} > \frac{1}{20}$$

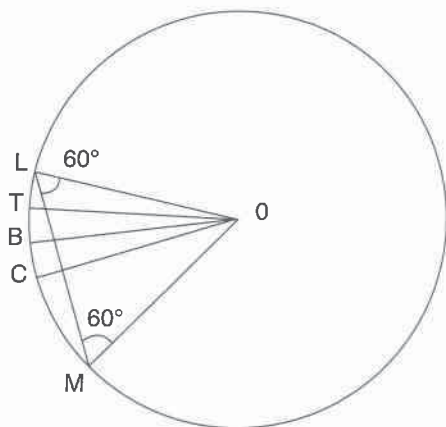


Figure 7.8

La première partie de l'inégalité (2) est ainsi démontrée. Pour la seconde, construisons sur TS le carré TSEF de côté R_s et sur TS le triangle rectangle TLS (fig. 7.9) ; soit G le point de rencontre de TL prolongé avec EF. Les deux triangles TLS et TEG rectangles ayant deux angles égaux à Ψ sont semblables, mais en comparant les hypoténuses on voit que :

$GT > TS$; il en résulte que le côté de l'angle droit EG est plus grand que le côté homologue TL :

$$EG > TL$$

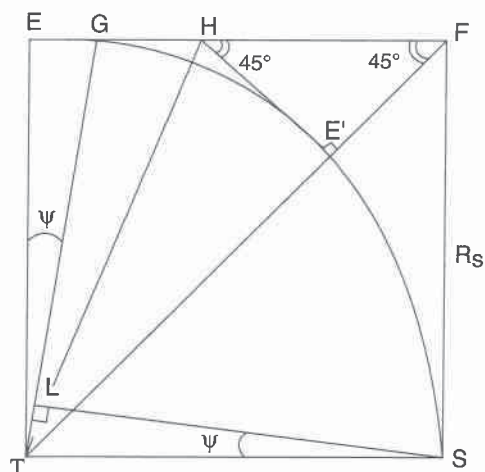


Figure 7.9

Traçons le quart de cercle de centre T et de rayon TS qui coupe la diagonale FT en E' .

Considérons la tangente en E' à ce cercle rencontrant EF en H, tel que $E'H = EH$.

La direction TH axe de symétrie de la figure $EHE'T$ est bissectrice de l'angle ETE' , donc :
 $\widehat{ETH} = \widehat{HTE'} = \frac{45^\circ}{2} = 22,5^\circ$; en outre $\widehat{ETG} = \Psi = 3^\circ$

Aristarque démontre par des considérations géométriques que :

$$\frac{EH}{EG} > \frac{\widehat{ETH}}{\widehat{ETG}}$$

La trigonométrie permet de vérifier simplement la validité de cette inégalité car :
 $EH = ET \cdot \tan 22,5^\circ$ et $EG = ET \cdot \tan 3^\circ$; donc

$$\frac{EH}{EG} = \frac{\tan 22,5^\circ}{\tan 3^\circ} \text{ . Or : } \frac{\tan 22,5^\circ}{\tan 3^\circ} > \frac{22,5^\circ}{3^\circ} \text{ , car :}$$

$$\frac{\tan 22,5^\circ}{22,5^\circ} > \frac{\tan 3^\circ}{3^\circ} \text{ ,}$$

conséquence du fait que $\frac{\tan \alpha}{\alpha}$ croît avec α lorsque $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

$$\text{De } \frac{EH}{EG} > \frac{\widehat{ETH}}{\widehat{ETG}} \text{ , on déduit :}$$

$$\frac{EH}{EG} > \frac{22,5}{3}$$

$$\text{Or } \frac{22,5}{3} = 7,5 = \frac{15}{2}$$

$$\text{Ainsi : } \frac{EH}{EG} > \frac{15}{2}$$

$$\text{Mais } \frac{FH}{E'H} = \sqrt{2} \text{ . Comme } E'H = EH \text{ , on a : } \frac{FH}{EH} = \sqrt{2}$$

$$\text{De plus } \sqrt{2} > \frac{7}{5} \text{ d'où :}$$

$$\frac{FH}{EH} > \frac{7}{5} \text{ et :}$$

$$\text{et } \frac{FH}{EH} + 1 > \frac{7}{5} + 1 \text{ , soit :}$$

$$\frac{FH + EH}{EH} > \frac{12}{5} \text{ ou :}$$

$$\frac{FE}{EH} > \frac{36}{15}$$

$$\text{Comme } EH > \frac{15}{2} EG \text{ et que } EG > TL \text{ , on a :}$$

$$FE > \frac{36}{15} \times \frac{15}{2} TL$$

$$\text{soit } FE > 18 TL$$

$$\text{Or } FE = TS = R_s \text{ et } TL = R_l \text{ , donc :}$$

$$\frac{R_l}{R_s} < \frac{1}{18}$$

La deuxième partie de l'inégalité est ainsi démontrée.

Proposition 8 "Lorsque le Soleil est totalement éclipsé par la Lune, le Soleil et la Lune se trouvent dans le même cône, qui a son sommet dans notre oeil".

Ce fait est confirmé par l'expérience lors de la plupart des éclipses totales de soleil. On en déduit que les rayons apparents du soleil et de la lune sont égaux ; si r_{\odot} désigne le rayon apparent du Soleil on a : $r_{\odot} = r_{\ominus}$, car d'après la figure 7.4 :

$$\sin r_{\ominus} = \frac{r_l}{R_l} \quad \sin r_{\odot} = \frac{r_s}{R_s} \quad \text{et}$$

$$\frac{r_l}{R_l} = \frac{r_s}{R_s}$$

Proposition 9 " Le rayon du Soleil r_s a une valeur comprise entre 18 et 19 rayons de la Lune " :

$$18 r_l < r_s < 20 r_l ;$$

or si on désigne par p le rapport : $p = \frac{r_s}{r_l}$, on a :

$$18 < p < 20$$

Les inégalités précédentes résultent simplement des propositions 7 et 8

Proposition 10. La proposition 10 est la corollaire de la relation 9 au point de vue des volumes. Soit V_s le volume du Soleil, et V_l le volume de la Lune. Aristarque écrit :

$$18^3 V_l < V_s < 20^3 V_l \text{ ou bien :}$$

$$5832 V_l < V_s < 8000 V_l$$

Proposition 11. "Le diamètre $2r_l$ de la Lune est tel que :

$$\frac{1}{30} < \frac{2r_l}{R_l} < \frac{2}{45} \quad "$$

Cette relation résulte du fait déjà évoqué qu'Aristarque admet que le demi-diamètre apparent du soleil ou de la Lune vaut 1° , au lieu de $15'$ (voir n° 7.33) et que d'après Aristarque :

$$\frac{1}{60} < \sin 1^\circ < \frac{1}{45}, \text{ inégalité correcte puisque :}$$

$$\sin 1^\circ = \frac{1}{57,29}$$

$$\text{On a donc : } \sin r_{\ominus} = \sin 1^\circ = \frac{r_l}{R_l} \quad \text{et :}$$

$$\frac{1}{60} < \frac{r_l}{R_l} < \frac{1}{45}$$

En multipliant par 2 on a bien :

$$\frac{1}{30} < \frac{2r_l}{R_l} < \frac{2}{45}$$

Proposition 12. "Le rayon le plus faible u_0 du terminateur atteint, lorsque la Lune est en conjonction avec le Soleil, est tel que :

$$\frac{89}{90} < \frac{u_0}{r_l} < 1 \quad "$$

La deuxième partie de l'inégalité est évidente sur la figure 7.4. Pour la 1ère partie, nous utiliserons un raisonnement trigonométrique. On sait que :

$$\cos r_{\ominus} = \frac{u_0}{r_l}$$

Il s'agit de trouver la limite inférieure de : $\cos r_{\ominus} = \sqrt{1 - \sin^2 r_{\ominus}}$, sachant que :

$$\frac{1}{60} < \sin r_{\ominus} < \frac{1}{45}$$

La borne inférieure de $\cos r_{\ominus}$ sera atteinte en donnant à $\sin r_{\ominus}$ sa valeur la plus grande :

$$\frac{1}{45}$$

d'où :

$$\cos r_{\ominus} > \sqrt{1 - \left(\frac{1}{45}\right)^2},$$

soit $\frac{u_0}{r_l} > 0,999753$ et on vérifie que :

$$0,999753 > \frac{89}{90}, \text{ d'où } \frac{u_0}{r_l} > \frac{89}{90} \quad \text{c.q.f.d.}$$

Proposition 13. Cette proposition concerne l'étude de l'éclipse de Lune et non plus de Soleil.

"Dans une éclipse de Lune l'ombre de la Terre couvre exactement deux fois la section visible de la Lune. Si on désigne par r_o le rayon de l'ombre de la Terre et par MN son diamètre : $MN = 2r_o$, si on désigne par FG le diamètre du cercle de contact avec le Soleil du cône tangent à la fois à la Terre et au Soleil on a les inégalités suivantes :

$$\frac{88}{45} < \frac{r_o}{r_l} < 2 \quad (1)$$

$$\frac{22}{225} < \frac{r_o}{r_s} < \frac{1}{9} \quad (2)$$

$$\frac{MN}{FG} > \frac{979}{10125} \quad (3)''$$

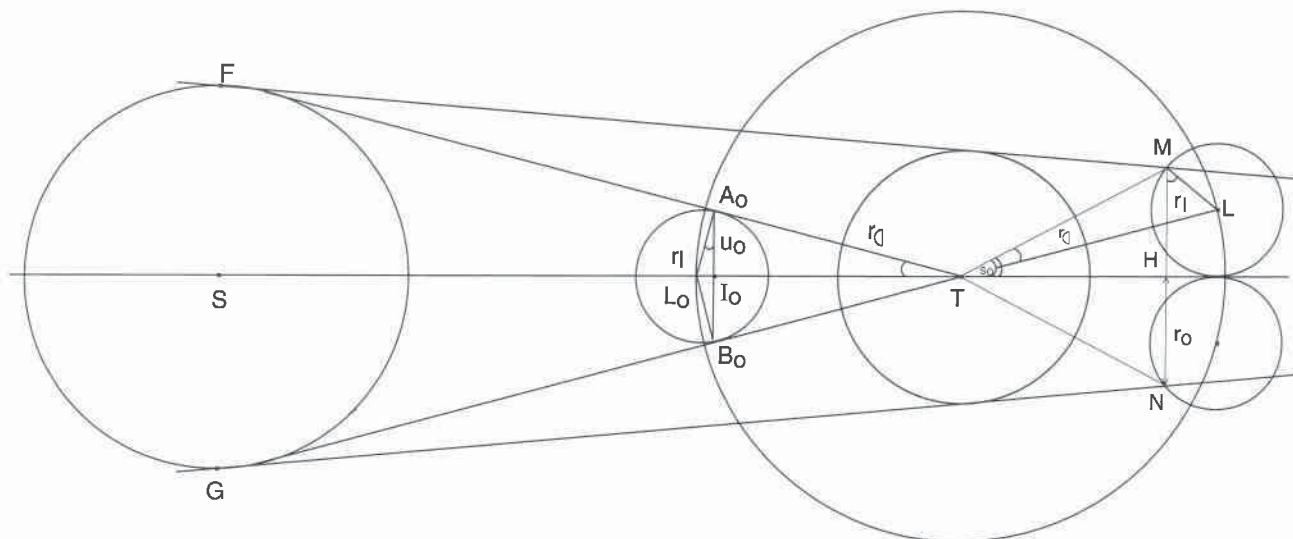


Figure 7.10

La figure 7.10 représente à gauche une éclipse de Soleil et à droite une éclipse de Lune. Cette partie droite est très déformée parce que nous y avons mis en évidence le fait que l'ombre de la Terre couvre exactement deux fois la section visible de la Lune, ce qui constitue une sorte de postulat.

Désignons par s_0 le demi-diamètre apparent du rayon r_0 de l'ombre de la Terre ; r_0 étant le rayon apparent de la Lune, la première phrase de la proposition 13 peut se mettre sous la forme :

$$s_0 = 2 \times r_0$$

Relation 1. Il est clair que $\frac{MH}{2} < ML$, d'où :

$$\frac{r_0}{r_1} < 2,$$

ce qui correspond à la 2ème partie de l'inégalité (1). Pour la première partie de cette inégalité Neugebauer (Bibl 7) suppose qu'Aristarque serait parti de l'inégalité :

$$\frac{r_0}{r_1} > \frac{1}{2} \left(\frac{2u_0}{r_1} \right)^2 \quad (4)$$

que nous démontrerons par des considérations trigonométriques.

Sur la figure 7.10 on voit que :

$$\frac{u_0}{r_1} = \cos r_0, \text{ d'autre part :}$$

$$HM = r_0 = r_1 \cos r_0 + r_1 = r_1 (1 + \cos r_0), \text{ d'où}$$

$$\frac{r_0}{r_1} = 1 + \cos r_0$$

L'inégalité (4) revient donc à :

$$1 + \cos r_0 > \frac{1}{2} (2 \cos r_0)^2$$

$$1 + \cos r_0 > 2 \cos^2 r_0$$

$$\cos r_0 > 2 \cos^2 r_0 - 1$$

$$\cos r_0 > \cos 2 r_0$$

Cette dernière relation est bien satisfaite puisque $\cos r_0$ est une fonction décroissante. Reprenons la relation (4) dans laquelle nous tiendrons compte du fait que d'après la proposition 12 :

$$\frac{u_0}{r_1} > \frac{89}{90}, \text{ soit } \frac{2u_0}{r_1} > \frac{89}{45}. \text{ On a donc :}$$

$$\frac{r_0}{r_1} > \frac{1}{2} \left(\frac{89}{45} \right)^2$$

$$\frac{r_0}{r_1} > \frac{89^2}{90 \times 45} > \frac{89^2 - 1}{90 \times 45}$$

Mais $89^2 - 1 = (89 - 1) \times (89 + 1) = 88 \times 90$. Il en résulte que :

$$\frac{r_0}{r_1} > \frac{88}{45},$$

ce qui constitue la première partie de l'inégalité (1)

La figure 7.11 montre que le sommet du cône d'ombre tangent au Soleil et à la Lune se trouve entre les orbites de la Lune et du Soleil, ce que savaient les astronomes grecs depuis Eudoxe.

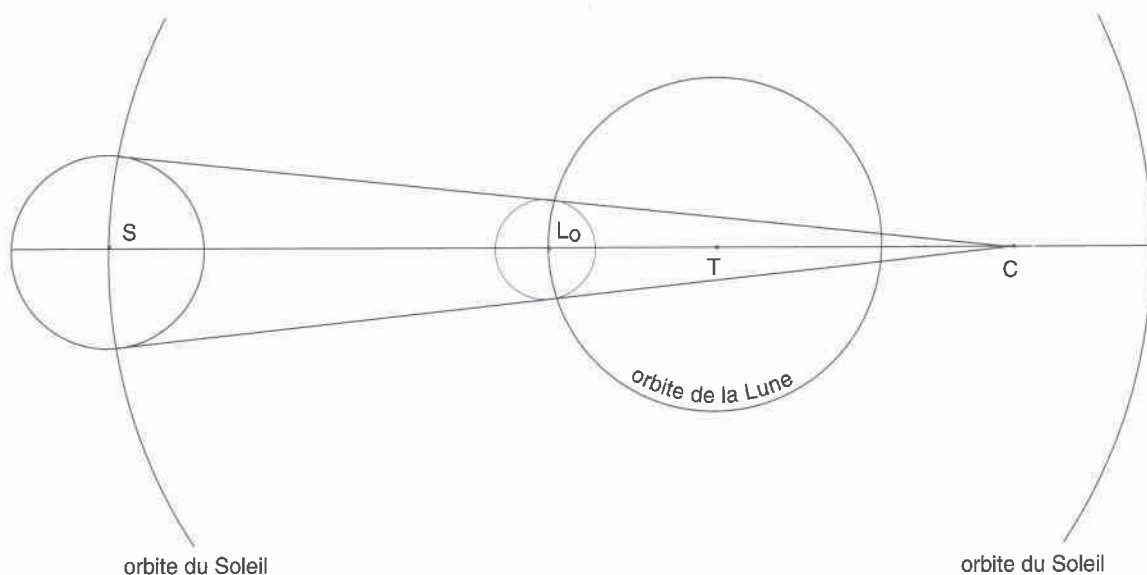


Figure 7.11

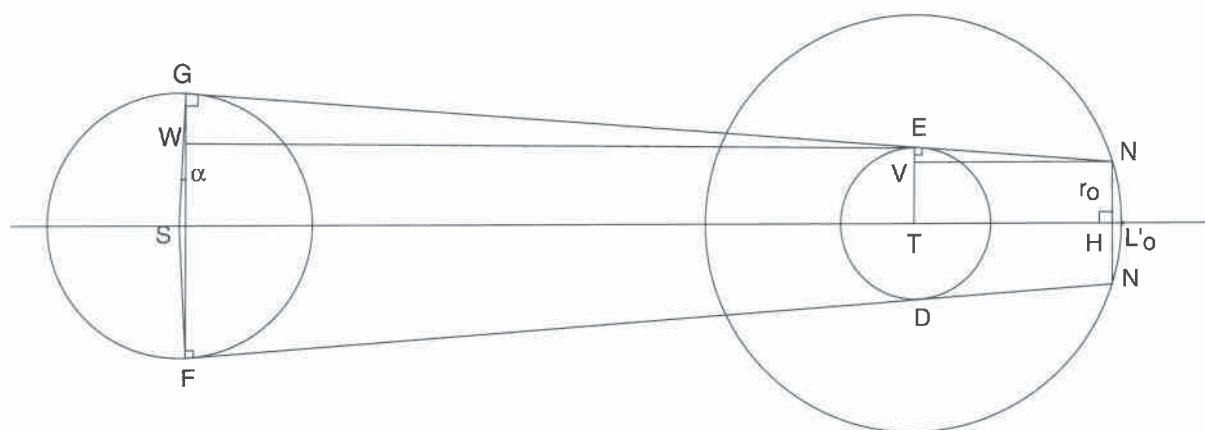


Figure 7.12

Relation 2

Sur la figure 7.12 désignons par E le point de contact de la génération du cône d'ombre avec la circonférence de la Terre, G étant le point de contact avec la circonférence du Soleil. Menons par M une parallèle à TS rencontrant TE en V et menons par E une parallèle à TS rencontrant GS en W.

Les deux triangles semblables MEV et EGW permettent d'écrire :

$$\frac{EV}{VM} = \frac{GW}{WE}$$

Or $EV = r_t - r_o$, $GW = r_s - r_t$, $WE = ST = R_s$ et $VM \approx TH$, qu'on peut assimiler à $TL'_o = r_l$, en négligeant le petit segment HL'_o , compte tenu du rayon de courbure élevé de la trajectoire de la lune. On a donc :

$$\frac{r_t - r_o}{R_l} = \frac{r_s - r_t}{R_s}$$

Désignons par p le rapport

$$p = \frac{R_s}{R_l} = \frac{r_s}{r_l} \text{ et par n le rapport } n = \frac{r_s}{r_l}$$

Le 1er membre de la relation précédente peut s'écrire :

$$\frac{r_t - r_o}{R_l} = \frac{r_t - nr_l}{R_l} = \frac{r_t - nr_l}{\frac{R_s}{p}}, \text{ de sorte que :}$$

$$\frac{r_t - nr_l}{\frac{R_s}{p}} = \frac{r_s - r_t}{R_s} \text{ ou :}$$

$$p (r_t - nr_l) = r_s - r_t \quad (5)$$

Transformons dans cette relation d'abord r_l en fonction de r_s :

$$r_l = \frac{r_s}{p}; \text{ on obtient :}$$

$p(r_t - n \frac{r_s}{p}) = r_s - r_t$, d'où on tire :

$$r_s = \frac{1+p}{1+n} r_t \quad (6)$$

Dans la relation (5) remplaçons r_s en fonction de r_t : $r_s = pr_t$; on obtient :

$p(r_t - nr_t) = pr_t - r_t$, d'où on tire :

$$r_t = \frac{1 + \frac{1}{p}}{1+n} r_t \quad (7)$$

On sait que $R_s = \frac{r_s}{\sin r_{\odot}}$

et que $R_l = \frac{r_l}{\sin r_{\odot}}$, d'où les relations suivantes :

$$R_s = \frac{1+p}{(1+n) \sin r_{\odot}} r_t \quad (8)$$

$$R_l = \frac{1 + \frac{1}{p}}{1+n \sin r_{\odot}} r_t \quad (9)$$

Des relations $n = \frac{r_o}{r_l}$ et $p = \frac{r_s}{r_l}$, on tire :

$$\frac{r_o}{r_s} = \frac{n}{p} \quad (10)$$

Pour démontrer la double inégalité (2) d'Aristarque, il suffit de donner à

$$n = \frac{r_o}{r_l}$$

ses bornes 88/45 et 2 (d'après la relation 1) et à p ses bornes 18 et 20 résultant de la proposition (9).

La limite supérieure de $\frac{r_o}{r_s}$ s'obtient en donnant à n sa limite supérieure et à p sa limite inférieure, d'où :

$$\frac{r_o}{r_s} < \frac{2}{18}, \text{ ou bien :}$$

$$\frac{r_o}{r_s} < \frac{1}{9}, \text{ c.q.f.d.}$$

La limite supérieure de $\frac{r_o}{r_s}$ s'obtient en donnant à n sa limite inférieure et à p sa limite supérieure, d'où :

$$\frac{r_o}{r_s} > \frac{88}{45} \times \frac{1}{20}$$

$$\text{Or } \frac{88}{900} = \frac{22}{225}; \text{ donc :}$$

$$\frac{r_o}{r_s} > \frac{22}{225}, \text{ c.q.f.d.}$$

Relation 3

Nous nous contenterons d'un raisonnement trigonométrique pour démontrer la validité de la relation (3) d'Aristarque.

Sur la figure 7.12 désignons par α l'angle $\widehat{SGF} = \widehat{GEW}$, (angles à côtés perpendiculaires).

Or $\alpha = \widehat{GEW} = \widehat{(TS, EG)}$ n'est autre que le demi-angle au sommet du cône d'ombre de la terre. De plus on a :

$$FG = 2r_s \cos \alpha = 2R_s \sin r_{\odot} \cos \alpha.$$

Mais sur la figure 7.10 : $MN = 2HM = 2R_l \sin s_o$ et $s_o = 2r_{\odot}$, d'où :

$$\sin s_o = \sin 2r_{\odot} = \sin r_{\odot} \cos r_{\odot}; \text{ on a donc :}$$

$$MN = 4R_l \sin r_{\odot} \cos r_{\odot}$$

Faisons le rapport : $\frac{MN}{FG}$; on a :

$$\frac{MN}{FG} = \frac{2R_l}{R_s} \cdot \frac{\cos r_{\odot}}{\cos \alpha}$$

Mais sur la figure 7.10 on voit que le demi-angle au sommet du cône d'ombre de la Terre, qui correspond à l'angle de FM avec TS, est inférieur à l'angle $\widehat{STA_o}$ qui est le rayon apparent de la Lune d'où

$$\alpha < r_{\odot},$$

ce qui entraîne :

$$\frac{MN}{FG} > \frac{2R_l}{R_s}$$

Les relations (8) et (9) précédentes donnent :

$$2 \frac{R_l}{R_s} = 2 \frac{1 + \frac{1}{p}}{1+n}$$

Pour avoir la borne inférieure de ce rapport il faut prendre la borne supérieure de p , c'est-à-dire :

$$p = 20, \text{ d'où :}$$

$$\frac{MN}{FG} > 2 \cdot \frac{1 + \frac{1}{20}}{21}, \text{ soit :}$$

$$\frac{MN}{FG} > \frac{10}{1}$$

et l'on vérifie que

$$\frac{1}{10} > \frac{979}{10125},$$

ce dernier rapport montrant bien la complexité des calculs d'Aristarque.

Proposition 14. On revient avec cette proposition au cas de l'éclipse de Soleil (fig 7.10 partie gauche). Soit $l_o L_o$ la distance maximale entre le centre de la Lune et le terminateur lorsque la Lune est en conjonction avec le Soleil et qu'elle éclipse celui-ci.

La proposition 14 se traduit par la relation :

$$R_l > 675 \cdot l_o L_o \text{ ou } \frac{l_o L_o}{R_l} < \frac{1}{675}$$

Sur la figure 7.10 on a : $l_o L_o = r_i \sin r_\odot$
et on sait que $r_i = \frac{R_i}{p}$,

$$\text{d'où : } \frac{l_o L_o}{R_i} = \frac{\sin r_\odot}{p},$$

Pour avoir la limite supérieure de $\frac{l_o L_o}{R_i}$,
il suffit de donner à $\sin r_\odot$ sa limite supérieure
qui est $\frac{1}{45}$ et à p sa limite inférieure qui est 18.

On obtient :

$$\frac{l_o L_o}{R_i} < \frac{1}{45 \times 18} \quad \text{et on vérifie bien que :}$$

$$\frac{l_o L_o}{R_i} < \frac{1}{810} < \frac{1}{675}$$

Proposition 15. La proposition 15 comporte la double inégalité :

$$" \frac{19}{3} < \frac{r_s}{r_t} < \frac{43}{6} "$$

D'après la relation (6) on a :

$$\frac{r_s}{r_t} = \frac{1+p}{1+n}$$

$$\text{Posons : } q = \frac{r_s}{r_t} = \frac{1+p}{1+n}$$

On aura la borne supérieure de q , q_s en portant la borne supérieure de p : $p = 20$ et la borne inférieure de n : $n = \frac{88}{45}$ dans :

$$q = \frac{1+p}{1+n}; \text{ on obtient :}$$

$$q_s = \frac{21}{1 + 88/45} = \frac{945}{133} = 7,105$$

On aura la borne inférieure q_i de q en prenant la borne inférieure de p et la borne supérieure de n , ces bornes étant respectivement $p = 18$ et $n = 2$, que l'on porte dans :

$$q = \frac{1+p}{1+n}, \text{ soit :}$$

$$q_i = \frac{19}{3}, \text{ c.q.f.d.}$$

La borne inférieure q_i coïncide avec celle d'Aristarque ; on vérifie pour la borne supérieure :

$$q_s < \frac{43}{6}$$

Pour la borne supérieure Aristarque arrive à la relation :

$$\frac{q_s}{q_s - 1} = \frac{71755875}{617735500}$$

Les nombres du numérateur et du dénominateur donnent une idée de la complexité des calculs d'Aristarque, et par la même celle de tous les astronomes grecs avant la découverte de la trigonométrie par Hipparque.

Aristarque réduit le rapport à :

$$\frac{q_s}{q_s - 1} = \frac{43}{37}, \text{ dont on tire :}$$

$$37 q_s = 43 q_s - 43, \text{ soit :}$$

$$q_s = \frac{43}{6}, \text{ c.q.f.d.}$$

Proposition 16. La proposition 16 est la conséquence de la proposition 15 en ce qui concerne les volumes respectifs du soleil (V_s) et de la Terre (V_t) :

$$\frac{19^3}{3^3} < \frac{V_s}{V_t} < \frac{43^3}{6^3} \quad \text{ou :}$$

$$\frac{6859}{27} < \frac{V_s}{V_t} < \frac{79507}{216}$$

Proposition 17. La proposition 17 comporte la double inégalité :

$$\frac{108}{43} < \frac{r_t}{r_i} < \frac{60}{19}$$

On sait que d'après la relation 7 :

$$\frac{r_t}{r_i} = \frac{1+n}{1+1/p} \quad \text{avec : } 18 < p < 20$$

$$\frac{88}{45} < n < 2$$

On a donc la borne inférieure avec $n = \frac{88}{45}$ et $p = 18$, soit :

$$\frac{1 + 88/45}{1 + 1/18} = \frac{18(45 + 88)}{19 \times 45} = 2,8$$

La borne supérieure est obtenue avec $n = 2$ et $p = 20$, soit :

$$\frac{1 + 2}{1 + 1/20} = \frac{60}{21}$$

On vérifie que les bornes ci-dessus sont bien compatibles avec celles d'Aristarque :

$$\frac{108}{43} < 2,8 < \frac{r_t}{r_i} < \frac{60}{21} < \frac{60}{19}$$

Proposition 18. La proposition 18 est la corollaire de la proposition précédente au point de vue des volumes respectifs de la Terre V_t et de la Lune V_l :

$$\frac{108^3}{43^3} < \frac{V_t}{V_l} < \frac{60^3}{19^3}$$

7.33 Les résultats d'Aristarque comparés à ceux de ses prédécesseurs et de ses successeurs

Nous avons vu en 2.1 que **Thalès** avait évalué à un demi-degré le diamètre apparent de la Lune. Aussi les historiens de l'astronomie se sont interrogés sur la valeur de 2° admise par Aristarque, donc 4 fois trop élevée environ. Pour le uns il s'agit d'une coquille de copiste : au lieu de la quinzième partie d'un signe du zodiaque (30°) il faudrait lire la soixantième partie.

Pour **Delambre** (Bibl. 1) il s'agit d'une faute d'observation d'Aristarque ; enfin **Tannery** (Bibl. 2) estime que c'est sciemment qu'Aristarque a choisi une valeur quatre fois trop élevée ; Tannery montre que si on prend : $r_\odot = 1^\circ$, valeur d'Aristarque, ou bien $r_\odot = 16'$ valeur correcte, on obtient dans les deux cas des rapports $\frac{r_s}{r_t}$ et $\frac{r_l}{r_t}$ très voisins.

On attribue en général à Aristarque la découverte de la méthode du calcul du rapport $p = \frac{R_s}{R_l}$ par observation de l'élongation θ lors d'une quadrature de la Lune avec le Soleil. En fait c'est **Eudoxe** qui a été l'initiateur de la méthode, mais les résultats d'Eudoxe étaient encore plus mauvais que ceux d'Aristarque.

On peut prendre le chiffre médian 19 pour la détermination de p par Aristarque ; **Archimède** dans son "Arénaire" nous rapporte qu'**Eudoxe** avait déterminé pour p la valeur 9, que **Phidias**, père d'Archimède, avait porté cette valeur à 12, alors que $p = 385$. Rappelons qu'il est très difficile d'apprécier exactement l'instant de la quadrature, où la partie éclairée de la Lune correspond à la moitié du disque lunaire, alors que l'autre moitié n'est pas visible

Nous allons comparer les différents rapports :

$$\frac{r_s}{r_l}, \frac{r_s}{r_t}, \frac{r_l}{r_t}$$

et les différentes valeurs de l'angle ψ obtenus par Aristarque et les astronomes qui l'ont précédé, à savoir Eudoxe et Phidias. On ne connaît pas les valeurs qu'ils ont données aux rapports $\frac{R_s}{R_l}$ et $\frac{r_l}{r_t}$.

Dans le tableau 7.13 ci-après nous avons porté :

- colonne 2 les valeurs de $p = \frac{R_s}{R_l} = \frac{r_s}{r_l}$
- colonne 3 les valeurs de $\frac{r_s}{r_t} = \frac{1+p}{1+n}$ (6)
- colonne 4 les valeurs de $\frac{r_l}{r_t} = \frac{1+1/p}{1+n}$ (7)

• colonne 5 les valeurs de l'angle $\Psi = 90^\circ - \theta$, tel que $\sin \Psi = \frac{1}{p}$

On rappelle que $n = \frac{r_o}{r_l}$, pour lequel Eudoxe et Phidias avaient pris la même valeur 2. En fait nous aurions dû prendre pour Aristarque la valeur médiane entre 88/45 et 2, soit 1,9778, que nous avons arrondi aussi à 2. Ce rapport sera porté à 2,5 par Hipparque et à 2,6 par Ptolémée.

1	2	3	4	5
	$p = \frac{r_s}{r_l}$	$\frac{r_s}{r_t}$ (6)	$\frac{r_l}{r_t}$ (7)	Ψ
Eudoxe	9	10/3	10/27	$6^\circ,4$
Phidias	12	13/3	13/36	$4^\circ,8$
Aristarque	19	20/3	20/57	3°
Valeurs modernes	385	109	0,27	$0^\circ,143$

Tableau 7.13

Curieusement Aristarque n'a pas donné les expressions de $\frac{R_s}{r_t}$ (8) et de $\frac{R_l}{r_t}$ (9), qu'il aurait pu déduire facilement des expressions (6) et (7) de $\frac{r_s}{r_t}$ et de $\frac{r_l}{r_t}$

Rappelons les expressions de $\frac{R_s}{r_t}$ et de $\frac{R_l}{r_t}$

$$(8) \frac{R_s}{r_t} = \frac{1+p}{(1+n) \sin r_\odot}$$

$$(9) \frac{R_l}{r_t} = \frac{1}{(1+n) \sin r_\odot}$$

Dans le tableau 7.14 ci-après nous donnons à la fois les valeurs de $\frac{r_s}{r_t}$, de $\frac{r_l}{r_t}$, mais aussi de $\frac{R_s}{r_t}$, $\frac{R_l}{r_t}$ obtenues par Aristarque de Samos et d'autres astronomes qui lui sont postérieurs.

Pour Aristarque il y a deux lignes sur lesquelles nous avons reporté les valeurs données par Tannery (Bibl. 2) ; la première ligne concerne l'hypothèse $r_\odot = 1^\circ$, la deuxième l'hypothèse $r_\odot = 15'$. Tannery a calculé la valeur maximum et la valeur minimum d'Aristarque, dont il a pris la moyenne, de sorte que pour $r_\odot = 1^\circ$ les rapports $\frac{r_s}{r_t}$ et $\frac{r_l}{r_t}$ du tableau 7.14 ne concordent pas exactement avec celles des colonnes 3 et 4 du tableau 7.13.

Les résultats relatifs au soleil (col 2 et 4) sont toutes très éloignées des valeurs modernes. Celles qui s'en rapprochent le plus sont celles de **Posidonius**, qui est pourtant antérieur à Ptolémée. Nous aurons l'occasion de revenir en

17.7 sur les causes des mauvais rapports obtenus par Ptolémée concernant le Soleil, alors que ses rapports concernant la Lune sont bons. En ce qui concerne Aristarque, les fortes divergences proviennent du fait que dans les formules (6) et (8) le facteur p apparaît au numérateur ; sa mauvaise valeur 19 fausse notablement les résultats, puisqu'en fait $p = 385$ et est donc 20 fois plus élevé.

Par contre les résultats relatifs à la Lune obtenus par Aristarque pour $r_{\odot} = 15'$ ont un ordre de grandeur correct, cela parce que p intervient dans les formules (7) et (9) en dénominateur sous la forme :

$$1 + \frac{1}{p} = \frac{p+1}{p}$$

Une valeur erronée de p en numérateur et dénominateur ne fausse pas trop les résultats.

1	2	3	4	5
	$\frac{r_s (6)}{r_t}$	$\frac{r_l (7)}{r_t}$	$\frac{R_s (8)}{r_t}$	$\frac{R_l (9)}{r_t}$
Aristarque $r_{\odot} = 1^{\circ}$ $r_{\odot} = 15'$	6,75 6,86	0,352 0,35	362,32 1550,13	19,07 81,13
Archimède Syst A Syst B			1116 2432	110,88 110,88
Hipparque	12,34 2,365	0,325	2556 490	67,33
Posidonius	39,25	0,16	13090	52,4
Ptolémée	5,5	0,29	1210	59
Valeurs modernes	109	0,27	23450	60

Tableau 7.14

7.34 Autres travaux d'Aristarque de Samos

a) Longueur de l'année

Aristarque modifia la longueur de l'année de 365 jours $1/4$ admise avant lui en y ajoutant $1/1663$ de jour = 0,000616 jour.

On peut supposer, comme le fait Tannery (Bibl. 2), qu'Aristarque connaissait un siècle environ avant Hipparque la période luni-solaire dite "exeligmos" dont Ptolémée donne les caractéristiques dans l'Almageste, à savoir :

19756 jours = 669 mois synodiques = 717 mois anomalistiques,

= 723 rotations sidérales + 32° = 260312°, ou encore :

19756 jours = 54 années x 365,25 j + $\frac{32}{360}$ d'année.

On vérifie que : $723 \times 360 = 260\,280^{\circ}$
+ 32°

Total : 260 312°

54 années de 365,25 j = 19723,5 jours

$\frac{32}{360}$ d'année = 32,5 jours

Total : 19756 jours

Dans ces conditions comme $\frac{32}{360} = 0,08888$ on a :

19756 jours = 54,08888 années

et 1 année = $\frac{19756}{54,08888} = 365,250616$, soit :

365,25 j + 0,000616 j

ou bien : 1 année = 365,25 j + $\frac{1}{1663}$ jour

D'après **Censorinus** Aristarque aurait aussi mis en évidence une période cosmique ou "annus magnus" de 2 484 ans.

b) Observation de solstices

Aristarque a aussi observé les solstices d'été de 280 et de 264 avant J.C. . Ptolémée rapporte qu'Hipparque a utilisé l'observation de 280 effectuée vraisemblablement à Samos. Grâce à l'observation d'Hipparque faite le 27 juin 135 avant J.C à 1 heure du matin (heure de Rhodes ou d'Alexandrie) **B.L Van der Waerden** (Bibl 5) a pu reconstituer la date de l'observation d'Aristarque, qui aurait eu lieu le 26 juin 280 avant J.C à 7 heures de l'après-midi (heure de Rhodes ou d'Alexandrie). Van der Waerden a même pu reconstituer l'ordre de grandeur de l'erreur d'appréciation de l'instant du solstice, erreur comprise entre 6 h et 12 h avant l'instant du solstice proprement dit.

Cette erreur pourrait être à l'origine de l'erreur d'estimation de la durée de l'année tropique par Hipparque. On rappelle que l'année tropique est la durée qui sépare deux passages consécutifs du Soleil au point γ . Hipparque a trouvé : l'année tropique égale à :

365 jours $1/4$ - $1/300$ de jour, soit 365,2467 jours, au lieu de 365,2422 jours (valeur moderne).

c) Vitruve dans son Architecture (VIII -1) indique que l'invention du "cadran concave ou hémisphérique" est due à Aristarque de Samos, ainsi que celle du "cadran circulaire plat". Or il est prouvé que le cadran hémisphérique ou polos babylonien ou scaphé grec existait en Grèce avant Aristarque ; peut être celui-ci en a-t-il fait la théorie ou apporté certaines modifications.

Quant au cadran circulaire plat, il faudrait savoir s'il s'agit du cadran vertical ou du cadran horizontal et dans ce dernier cas du cadran au sol ou du cadran placé dans le plan de l'équateur. Aristarque a vraisemblablement introduit de Chaldée en Grèce l'un de ces cadrans.

110003+89990001 21.102+28327093 22.102+09927278 31.00+00046234 51...+0000+000
 110004+99990002 21.102+15126107 22.102+0180163 31.00+00089586 51...+0000+000
 110005+11020106 21.102+28150409 22.102+03070165 31.00+00022743 51...+0000+000
 110006+11020107 21.102+09356606 22.102+10358646 31.00+00003358 51...+0000+000
 110007+21020108 21.102+08899402 22.102+10318811 31.00+00004232 51...+0000+000
 110008+21020109 21.102+07594989 22.102+10349336 31.00+00004807 51...+0000+000
 110009+21020110 21.102+06848251 22.102+10410901 31.00+00005529 51...+0000+000
 110010+21020111 21.102+07265554 22.102+10240287 31.00+00011165 51...+0000+000
 110011+21020112 21.102+06167540 22.102+10196622 31.00+00011438 51...+0000+000
 110012+21020113 21.102+06541245 22.102+10151139 31.00+00013341 51...+0000+000
 110013+21020114 21.102+06944331 22.102+10060337 31.00+00029254 51...+0000+000
 110014+11020109 21.102+10075688 22.102+10057045 31.00+00034082 51...+0000+000
 110015+11020110 21.102+11832887 22.102+10141508 31.00+00037765 51...+0000+000
 110016+11020111 21.102+12013510 22.102+10143066 31.00+00046993 51...+0000+000
 110017+21020112 21.102+12480354 22.102+10154599 31.00+00046209 51...+0000+000
 110018+21020113 21.102+13078782 22.102+10167191 31.00+00046365 51...+0000+000
 110019+21020114 21.102+13694050 22.102+10187480 31.00+00047968 51...+0000+000
 110020+11020115 21.102+14271040 22.102+10188887 31.00+00047676 51...+0000+000
 110021+11020116 21.102+14791282 22.102+10205457 31.00+00047317 51...+0000+000
 110022+21020117 21.102+14891118 22.102+10231054 31.00+00049083 51...+0000+000
 110023+21020118 21.102+15144745 22.102+10253561 31.00+00049401 51...+0000+000
 110024+21020119 21.102+15204677 22.102+10234658 31.00+00041951 51...+0000+000
 110025+21020120 21.102+15230484 22.102+10237113 31.00+00046528 51...+0000+000
 110026+11020121 21.102+15254602 22.102+10230349 31.00+00044414 51...+0000+000
 110027+21020122 21.102+15268783 22.102+10218406 31.00+00041417 51...+0000+000
 110028+21020123 21.102+15275700 22.102+10212930 31.00+00047658 51...+0000+000
 110029+21020124 21.102+15253125 22.102+10203642 31.00+00042513 51...+0000+000
 110030+11020125 21.102+15770378 22.102+10209673 31.00+00077083 51...+0000+000
 110031+11020126 21.102+15852619 22.102+10224099 31.00+00085698 51...+0000+000
 110032+11020127 21.102+16178008 22.102+10255595 31.00+00040725 51...+0000+000
 110033+11020128 21.102+16268651 22.102+10236838 31.00+00034796 51...+0000+000
 110034+21020129 21.102+16282449 22.102+10234859 31.00+00031598 51...+0000+000
 110035+21020130 21.102+16250953 22.102+10230348 31.00+00024659 51...+0000+000
 110036+11020131 21.102+16140701 22.102+10210529 31.00+00017228 51...+0000+000

SAISIE DE DONNEES

- manuelle
- carnets électroniques de terrain
- fichiers ASCII
- digitalisation
- fichier DXF

CALCULS

- réseaux polygonaux, intersection, relèvement, multilatération...
- analyse des mesures
- transformée de Helmert
- longueurs, aires, angles
- partage de surfaces



DESSIN

- définition de symboles ponctuels et linéaires
- gestion interactive des points, lignes, textes et hachures
- gestion des superpositions (textes entre eux, textes et symboles ponctuels ou linéaires)

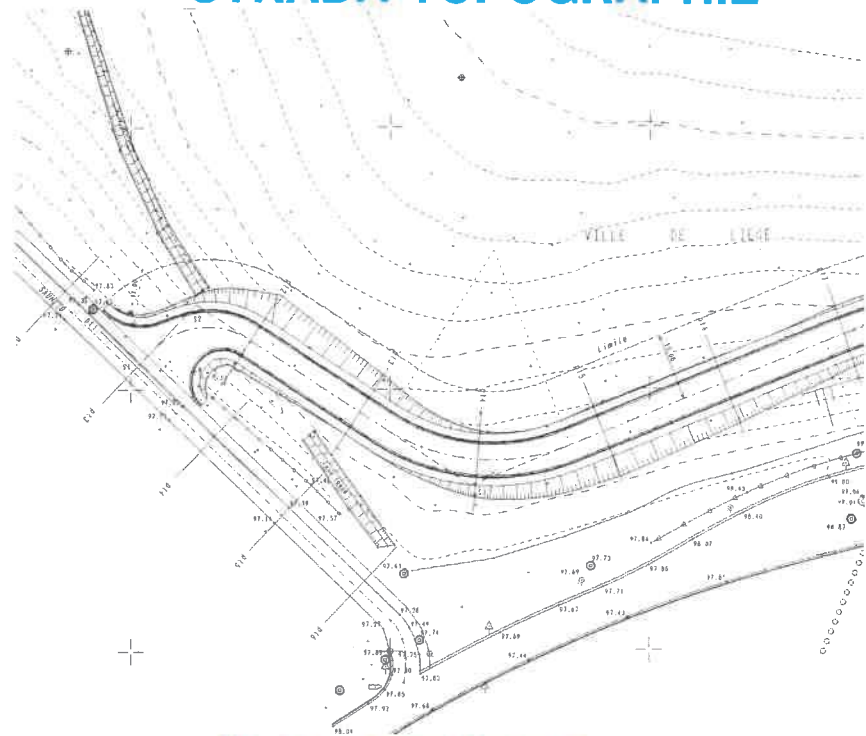
MODELISATION

- calcul automatique des modèles numériques de terrain
- courbes de niveau
- profils
- cubatures par prismes

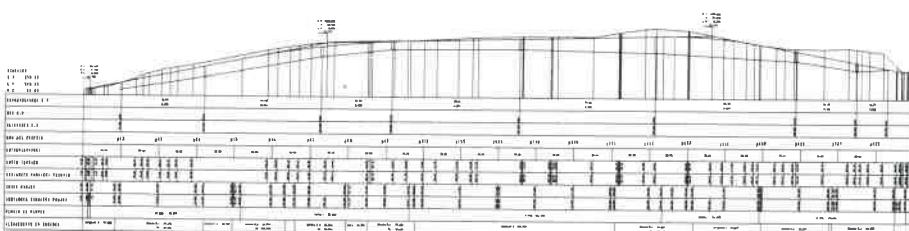
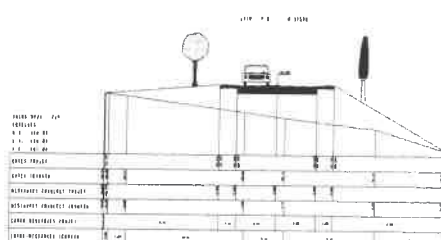
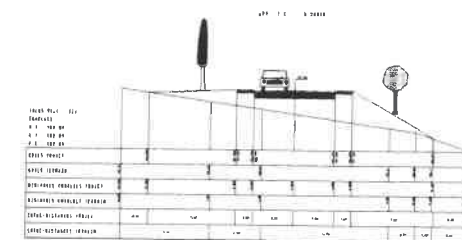
RESULTATS

- sorties graphiques (vues en plan et profils) sur tous les traceurs du marché
- listings de toutes les entités de base (points, lignes, surfaces...)
- listing cadastral
- fichiers d'implantation compatibles avec les carnets électroniques de terrain
- fichiers: DXF, SICAD, MACAO, MOSS, MICROPISTE, CADDS...

STRADA TOPOGRAPHIE



STRADA INFRASTRUCTURES



ETUDES D'INFRASTRUCTURES

- axe en plan
- profils en long terrain et projet
- profils en travers
- cubatures
- tracés complets des profils avec paramétrage approfondi
- éléments complémentaires associés au profil en long: fossés, canalisations...

PERIPHERIQUES SUPPORTES

Carnets électroniques:

GRE 3/4, ZEISS REC 200/500, TOPCON, SOKKIA, PSION, GEODAT, KERN, MKIII, NIKON, GEODOS,...

Tables traçantes:

HP-GL, HOUSTON, BENSON, CALCOMP,...

Tables à digitaliser:

HOUSTON, BENSON, CALCOMP, NUMONICS, GENIUS, HEWLETT PACKARD,...

SOFT CONSTRUCT SA

Rue des Ecoliers, 26 - 4020 LIEGE - BELGIQUE

Tél. : 32/41/44.20.21 - Fax : 32/41/44.20.27

7.35 Conclusion sur Aristarque de Samos

Comme pour Autolycus et pour Eudoxe il faut admirer chez Aristarque la rigueur du raisonnement géométrique qu'il applique à résoudre les problèmes d'astronomie. Ne disposant pas d'instruments assez précis ses évaluations concernant le Soleil sont très loin de la réalité, mais ses observations concernant la Lune donnent des ordres de grandeur corrects.

D'Aristarque à Képler l'inégalité $18 < \frac{R_s}{R_l} < 20$

subsistera, donnant pour le rapport des rayons de l'orbite solaire et de l'orbite de la Lune une valeur moyenne de l'ordre de 19, alors qu'en réalité ce rapport est de 390, donc plus 20 fois plus élevé. Alors que Ptolémée (fl 127 à 151) obtiendra un rapport moyen : $\frac{R_l}{R_t} = 59$ très voisin du rapport correct 60, son rapport : $\frac{R_s}{R_t} = 1210$ est très loin du rapport correct 23 450 ; il est environ 19 fois trop faible. L'astronome arabe Ibn Yunus (978 - 1008) améliora très faiblement le rapport $\frac{R_s}{R_t}$ en le portant à 1766, encore environ 13 fois trop faible.

Mais le plus beau titre de gloire d'Aristarque de Samos a été de concevoir un système héliocentrique intégral 18 siècles avant Copernic.

7.4 ARCHIMEDE (287-212)

Archimède fut indiscutablement l'un des génies les plus féconds de la Grèce antique. Il naquit à Syracuse en 287 avant J.C et mourut en 212, assassiné par un soldat de Marcellus. Dès sa jeunesse il se rendit à Alexandrie, où il fut l'élève d'Euclide et peut-être étudia-t-il l'astronomie auprès des prêtres égyptiens. Il fut le contemporain d'Eratosthène, qui était douze ans plus jeune que lui et dont il connut vraisemblablement les travaux.

Il avait construit un planétaire (sphère de verre dans laquelle un mécanisme faisait mouvoir les astres) qui était un objet d'admiration universelle et dont Cicéron fit un grand éloge.

Archimède avait aussi observé quelques solstices, dont il est fait mention dans la "Syntaxe mathématique" (ou Almageste) de Ptolémée. Il attribuait aux vapeurs de l'atmosphère l'augmentation du diamètre apparent des astres et on a voulu voir dans cette remarque la première idée de la réfraction astronomique.

Mais c'est surtout dans son "Arénaire" qu'Archimède témoigne de ses connaissances astronomiques, bien que cet ouvrage constitue plutôt une sorte de recreation d'ordre arithmétique et astronomique. Il y montre qu'il est possible de construire une notation systématique pour les très grands nombres, permettant par exemple de compter les grains de sable qu'il faut utiliser pour remplir l'univers tout entier

jusqu'à la sphère des fixes. Il utilise deux progressions l'une arithmétique et l'autre géométrique, la première servant à trouver un terme quelconque de la seconde. On a cru voir dans ce système la première idée des logarithmes. Mais nous limiterons notre étude au contenu astronomique de l'Arénaire (7.43).

7.41 Mesure du diamètre apparent du Soleil par Archimède

Archimède utilise une "dioptré", longue règle horizontale sur laquelle il déplace un étroit cylindre vertical jusqu'à occulter le disque du soleil lors du lever de celui-ci. Si la vue était réduite à un point, il suffirait de mener de ce point les tangentes aux génératrices du cylindre pour avoir le diamètre apparent cherché. Mais Archimède pousse la minutie à faire une expérience indépendante avec deux cylindres égaux l'un blanc le plus loin, l'autre noir touchant le visage de l'observateur. Au moyen de divers essais il arrive à trouver des cylindres de rayon tel que l'un soit exactement caché par l'autre, ce qui lui permet d'avoir ainsi la mesure de l'écart interpupillaire. Il place l'un des derniers cylindres près de son visage, déplace le cylindre étroit du début de l'expérience jusqu'à occultation du Soleil et il trace les tangentes aux deux cylindres. Il porte les deux angles obtenus sur un quart de cercle. Soit (R) le nombre de degrés de celui-ci, les degrés n'étant toutefois pas encore utilisés du temps d'Archimède. En appelant d_{\odot} le diamètre apparent du Soleil, Archimède obtient :

$$\frac{(R)}{200} < d_{\odot} < \frac{(R)}{164} \quad (1)$$

En langage moderne avec (R) = 90° on a :

$0^{\circ}27' < d_{\odot} < 0^{\circ}32'55''6$. Les valeurs correctes sont :

$0^{\circ}31'30'' < d_{\odot} < 0^{\circ}32'35''$. Nous avons déjà utilisé la valeur moyenne du demi-diamètre apparent du Soleil : 16'.

7.42 Longueur de la circonférence terrestre utilisée par Archimède

On ignore l'auteur de la détermination de la longueur de la circonférence terrestre, utilisée par Archimède, détermination rapportée par Cléomède et basée sur les considérations suivantes. A Lysimachie (Thrace) la tête du Dragon passe au zénith, alors que c'est le Cancer qui passe au zénith de Syène (actuellement Assouan, Egypte). L'arc compris entre le Dragon et le Cancer représente un quinzième du méridien terrestre. Il en résulte que l'angle des verticales de Lysimachie et de Syène est de :

$$\frac{360^{\circ}}{15} = 24^{\circ}$$

Comme la distance de Syène à Lysimachie est de 20 000 stades, la longueur de la circonférence terrestre est : $L = 15 \times 20\,000$, soit :

$L = 300\,000$ stades, chiffre que Cléomède compare à la longueur obtenue par Eratosthène : 250 000 stades (voir 8.212).

La détermination rapportée par Cléomède est antérieure à Archimède, car Cléomède y fait état d'un rapport de 3 entre la circonférence et le diamètre, chiffre qui fut affiné par Archimède : par ailleurs la détermination est postérieure à 309 ans avant J.C., car Lysimachie ne fut fondée qu'à cette date.

Archimède avait-il connaissance de la détermination d'Eratosthène ; si oui, on peut penser qu'il a choisi la détermination rapportée par Cléomède, parce qu'elle était effectuée sur des étoiles et qu'elle aurait du -en principe- être meilleure que celle d'Eratosthène.

La différence de latitude entre Syène et Lysimachie étant d'après cette détermination de 24° et Syène étant sur le tropique à environ 24° de latitude, la latitude de Lysimachie aurait du être égale à 48° , alors que cette latitude ne dépasse pas $40^\circ 1/2$. Par ailleurs la distance en stades d'Eratosthène entre Syène et Lysimachie n'est que de 12 000 stades au lieu de 20 000.

Ainsi la différence de latitude entre les deux villes présentait une erreur par excès de $7^\circ 1/2$, la distance étant elle-même par excès de 8 000 stades. On se perd en conjectures sur la médiocrité de cette détermination, pourtant utilisée par Archimède.

7.43 Détermination du volume de la sphère des fixes par Archimède dans l'Arénaire

Soient T le centre de la Terre, S le centre du Soleil de rayon r_s , (I) l'orbite apparente de S, supposé décrire un cercle de centre T et de rayon $TS = R_s$ (hypothèse géocentrique). Soient P et Q les points de contact des tangentes issues de T avec le Soleil, ces tangentes faisant entre elles l'angle 2α qui représente donc le diamètre apparent du Soleil à partir du centre de la Terre (fig 7.15 et 7.16), nous continuerons à désigner par d_\odot le diamètre apparent du Soleil à partir du point d'observation O situé sur la Terre (fig 7.16), d_\odot étant tel que $d_\odot = 2r_\odot$, r_\odot étant le rayon apparent du Soleil.

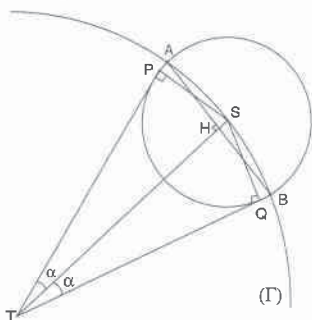


Figure 7.15

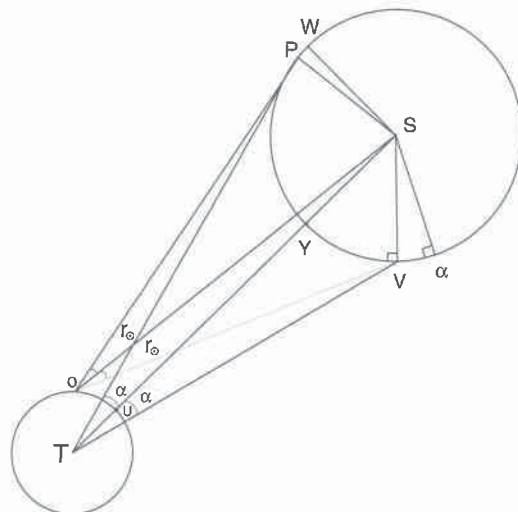


Figure 7.16

Soient A et B les points d'intersection des deux tangentes avec l'orbite (I). Joignons AB ; il convient de noter que A et B se trouvent à l'extérieur de la circonférence du Soleil.

Archimède montre d'abord que $AB = 2r_s$; en effet les deux triangles TPS et THA rectangles en P et en H sont égaux, car ils ont le même angle α et leurs hypoténuses égales au rayon R_s de l'orbite du Soleil ; il en résulte que : $AH = PS = r_s$, d'où :

$$AB = 2r_s \quad (2)$$

Archimède montre ensuite que la corde AB de l'orbite du Soleil est plus grande que le côté l_{1000} d'un polygone régulier de 1 000 côtés ; en effet on voit sur la figure 7.16 que $TS > OS$, d'où on déduit : $2\alpha < d_\odot$. Comme d'après la relation (1) du n° 7.41 :

$$d_\odot < \frac{(R)}{164}, \text{ on en déduit : } 2\alpha < \frac{(R)}{164}$$

Désignons par (C) le nombre de degrés du cercle tout entier : $(C) = 360^\circ$, de sorte que :

$$R = \frac{(C)}{4}, \text{ donc :}$$

$$2\alpha < \frac{(C)}{656}, \text{ d'où l'on déduit :}$$

$$AB < l_{656}$$

en désignant par l_{656} le côté du polygone de 656 côtés inscrit dans l'orbite du Soleil. Dans sa "Mesure du cercle" Archimède a montré que pour un polygone régulier de n côtés inscrit dans un cercle de rayon R_s , on a la relation :

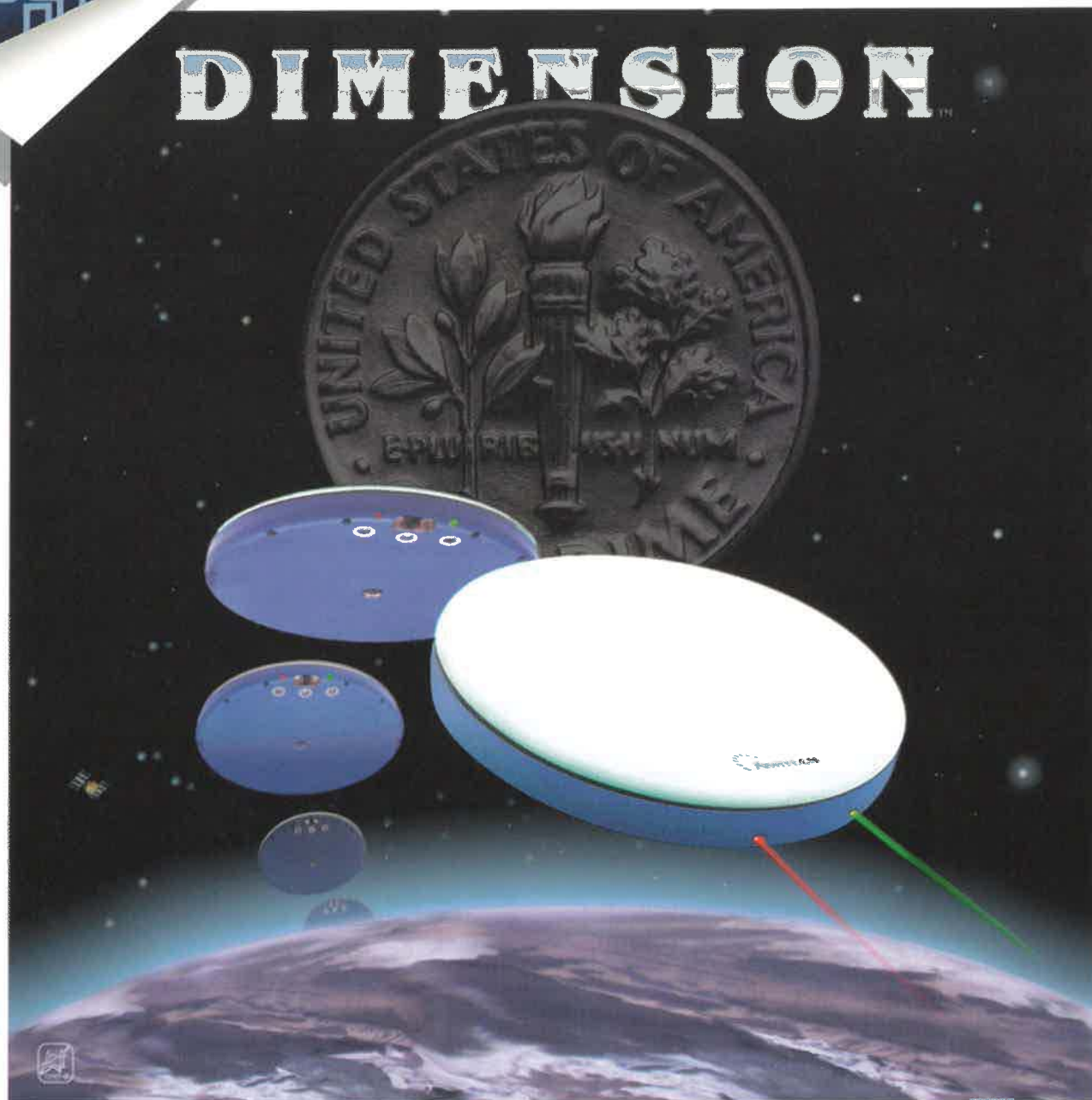
$$\frac{\text{périmètre polygone } n \text{ côtés}}{R_s} < \frac{44}{7}$$

$$\text{Pour } n = 656, \text{ on a donc } \frac{656 \times AB}{R_s} < \frac{44}{7} \text{ ou :}$$

$$AB < \frac{1}{656} \times \frac{44}{7} R_s, \text{ soit :}$$

$$AB < \frac{11}{1148} R_s < \frac{1}{100} R_s$$

DIMENSION™



**DIMENSION... petit par la taille,
petit par le prix, grand par les performances !**

- Une antenne, un récepteur et de la mémoire interne intégrés dans un disque de 22 cm de diamètre
- 12 canaux parallèles pour capter tous les satellites disponibles
- Jusqu'à 8 Mega-Octets de mémoire
- Précision millimétrique en modes statique, cinématique et pseudo-cinématique
- DIMENSION S.I.G. : une version entrée de gamme pour une précision décimétrique



- Utilisation totalement automatisée sur le terrain : 1 bouton marche/arrêt, 1 diode témoin de fonctionnement correct
- 2 ports série RS 232
- Possibilité de connexion à des micro-ordinateurs de poche
- Utilisation sans fil et avec une seule main, grâce à la canne ASHTECH à batterie incorporée et à témoin de niveau de charge

Pour plus d'informations : Tél. : (1) 40.70.67.60

Fax : (1) 40.70.67.75

ASHTECH

En tenant compte de la relation (2) on a :

$$200 r_s < R_s \quad (3)$$

Soit UY la plus petite distance entre la surface de la Terre et celle du Soleil (fig 7.16). En appelant r_l le rayon de la Lune, r_t celui de la Terre, r_s celui du Soleil, on sait que :

$$r_l < r_t < r_s \text{ et on voit que : } UY = R_s - (r_s + r_t), \text{ d'où :}$$

$$100 UY = 100 [R_s - (r_s + r_t)]$$

Remplaçons $r_s + r_t$ par la quantité plus petite : $2r_s$; on majore le 2^e membre de la relation précédente, de sorte que :

$$100 UY > 100 R_s - 200 r_s$$

D'après la relation (3) : $100 UY > 100 R_s - R_s$, d'où :

$$100 UY > 99 R_s$$

Or $R_s > TP$ et $OV > UY$, d'où :

$$100 OV > 100 UY > 99 R_s > 99 TP, \text{ d'où on tire :}$$

$$\frac{OV}{TP} > \frac{99}{100} \quad (4)$$

Archimède démontre géométriquement que :

$$\frac{TS}{OS} < \frac{r_\odot}{\alpha} < \frac{TP}{OV} \quad (5)$$

Cette double inégalité résulte aussi de considérations trigonométriques. En effet :

$$\begin{aligned} TS &= \frac{SP}{\sin \alpha} & TP &= \frac{SP}{\tan \alpha} \\ OS &= \frac{SV}{\sin r_\odot} & OV &= \frac{SV}{\tan r_\odot} \end{aligned}$$

avec $SP = SV = r_s$, d'où :

$$\frac{TS}{OS} = \frac{\sin r_\odot}{\sin \alpha} \quad \text{et} \quad \frac{TP}{OV} = \frac{\tan r_\odot}{\tan \alpha}$$

Or on sait que si $x > y$, on a la relation

$$\frac{\sin x}{\sin y} < \frac{x}{y} < \frac{\tan x}{\tan y}$$

Comme $r_\odot > \alpha$, on a :

$$\frac{\sin r_\odot}{\sin \alpha} < \frac{r_\odot}{\alpha}, \text{ donc } \frac{TS}{OS} < \frac{r_\odot}{\alpha},$$

ce qui démontre la 1^{ère} partie de l'inégalité (5).

On a aussi :

$$\frac{\tan r_\odot}{\tan \alpha} > \frac{r_\odot}{\alpha}, \text{ donc } \frac{TP}{OV} > \frac{r_\odot}{\alpha},$$

ce qui démontre la 2^e partie de l'inégalité (5)

De (5) on tire $\frac{\alpha}{r_\odot} > \frac{OV}{TP}$ et d'après (4) on a :

$$\frac{\alpha}{r_\odot} > \frac{99}{100} \quad \text{ou bien} \quad 2\alpha > \frac{99}{100} \times d_\odot$$

D'après la relation (1) $d_\odot > \frac{(R)}{200}$, de sorte que :

$$2\alpha > \frac{99}{100} \times \frac{(R)}{200} > \frac{(R)}{203}$$

Comme $(R) = \frac{(C)}{4} = \frac{360^\circ}{4}$, on obtient :

$$2\alpha > \frac{360^\circ}{812}$$

$\frac{360^\circ}{812}$ est l'arc sous-tendu par la corde : l_{812} et comme l'arc 2α est sous-tendu par la corde $AB = 2r_s$, on peut écrire :

$$2r_s > l_{812} > l_{1000} \quad (6)$$

Archimède revient ensuite à son véritable sujet : la détermination du volume de la sphère des fixes et du nombre de grains de sable qu'elle contient. C'est là où il fait allusion à l'héliocentrisme d'Aristarque de Samos. Archimède rappelle qu'habituellement les astronomes considèrent le rayon de l'orbite solaire comme le rayon du cosmos, mais qu'Aristarque a proposé un monde beaucoup plus vaste dans lequel le Soleil est le centre, autour duquel tourne la Terre. Dans cet univers **la sphère des fixes de rayon R_f** est si grande que si on compare avec elle le rayon R_s de l'orbite terrestre autour du Soleil, ce dernier est négligeable. A un rayon R_s d'orbite solaire autour de la Terre en système géocentrique, correspond évidemment un rayon R_s égal de l'orbite terrestre en système héliocentrique. Mais Aristarque n'a donné aucune évaluation de R_f ; aussi Archimède pose d'abord :

$$\frac{R_s}{R_f} = \frac{r_t}{R_s} \quad \text{ou} \quad R_f = \frac{R_s^2}{r_t}$$

$$\text{puis : } r_s < 30 r_t$$

prenant ainsi une marge très large par rapport à l'évaluation d'Aristarque :

$$\frac{r_s}{r_t} < \frac{43}{6} \quad (\text{proposition 15})$$

Reprenons la relation (6) : $2r_s > l_{1000}$

$$1000 \times 2r_s > 1000 l_{1000}$$

Le 2^e membre représente le périmètre du polygone régulier de 1000 côtés inscrit dans l'orbite du Soleil : il est voisin de la longueur de la circonférence. En désignant par $D_s = 2 R_s$ le diamètre de l'orbite du Soleil, Archimède suppose que ce périmètre est supérieur à $3 D_s$ ou $6 R_s$, d'où :

$$1000 \times 2r_s > 6R_s \text{ ou encore :}$$

$$R_s < \frac{1000}{3} r_s$$

Comme $r_s < 30 r_t$, il vient :

$$R_s < 10^4 r_t \quad (7)$$

Nous avons vu qu'Archimède a admis comme valeur de la circonférence terrestre :

$$L = 300\,000 \text{ stades.}$$

Il multiplie L par le facteur 10, obtenant :
 $L' = 3 \times 10^6 \text{ stades,}$ d'où :

$$2 r_t < \frac{L'}{3}, \text{ soit } 2 r_t < 10^6 \text{ stades}$$

En utilisant la relation (7) ; on a :

$$2 R_s < 10^{10} \text{ stades} \quad (8)$$

Mais comme $R_f = \frac{R_s}{r_t} \times R_s$ et que d'après (7) :

$$\frac{R_s}{r_t} < 10^4, \quad \text{on a :}$$

$$2 R_f < 10^4 \times 2 R_s \text{ ou :} \\ R_f < 10^4 \times R_s \quad (9)$$

Ensuite Archimède écrit les égalités suivantes :

1 stade = 10^4 doigts ; 1 doigt = 40 diamètres de grains de pavot alignés ; un volume de graine de pavot = 10 000 grains de sable. On a donc 10^{10} stades = 10^{14} doigts = 4×10^{15} diamètres de graines de pavot.

Reprenons la relation (8) :

$$2 R_s < 10^{10} \text{ stades, soit :}$$

$$2 R_s < 4 \times 10^{15} \text{ diamètres de graines de pavot ou :}$$

$$R_s < 4 \times 10^{15} \text{ rayons de graines de pavot.}$$

Si on désigne par V_s le volume de la sphère de rayon R_s ,

$$V_s < 4^3 \times 10^{45} \text{ volumes de graines de pavot.}$$

Comme un volume de graine de pavot contient 10 000 = 10^4 grains de sable.

$$V_s < 4^3 \times 10^{45} \times 10^4 \text{ grains de sable,}$$

Comme $4^3 < 100$, on a enfin :

$$V_s < 10^{51} \text{ grains de sable}$$

Reprenons la relation (9) : le rapport linéaire 10^4 entre R_f et R_s devient en volume 10^{12} , de sorte que : $V_f < 10^{51} \times 10^{12}$ grains de sable ou

$$V_f < 10^{63} \text{ grains de sable}$$

Telle est la dimension du grand univers d'Archimède.

7.44 Distances relatives aux planètes déterminées par Archimède

Archimède s'est attaqué aussi au problème de l'évaluation des distances relatives aux planètes, comme le rapporte **Hippolyte** (175-235

après J.C), prêtre romain, considéré comme le meilleur docteur de l'église romaine de son temps, qui déclencha un schisme à Rome.

Une première liste A donne les intervalles entre les planètes, à partir d'une position centrale assignée à Mercure.

Une deuxième liste B donne les distances géocentriques des planètes, la position centrale étant occupée par le Soleil.

Les deux listes sont en discordance totale ; dans A Mercure et Vénus sont considérées comme "planètes supérieures" (plus éloignées de la Terre que le soleil) ; dans B au contraire Mercure et Vénus sont considérées comme planètes inférieures. Dans les deux systèmes A et B la distance Terre-Lune d'Archimède est :

$$R_l = 5\,544\,130 \text{ stades}$$

Quant à la distance Terre-Soleil elle est respectivement :

$$R_s = 55\,816\,195 \text{ stades dans le système A}$$

$$R_s = 121\,604\,451 \text{ stades dans le système B}$$

Nous schématisons les positions respectives des astres du système solaire, dans les systèmes A et B, comme le fait Neugebauer (Bibl. 6).

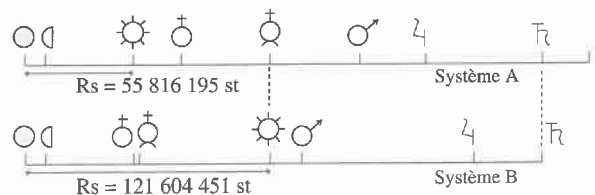


Schéma 7.17

• Terre : Pour les autres astres se reporter à la légende des figures 7.1 à 7.3 (§ 7.1).

Nous avons vu en 7.42 qu'Archimède avait obtenu pour la longueur de la circonférence terrestre $L = 300\,000$ stades. En prenant $\pi = 3$, cela donne un rayon r_t tel que :

$$L = 2\pi r_t, \text{ soit}$$

$$r_t = \frac{L}{6} = 50\,000 \text{ stades}$$

Dans ces conditions on a dans les systèmes A et B :

$$\frac{R_l}{r_t} = \frac{5\,544\,130}{50\,000} = 110,88$$

Pour le rapport $\frac{R_s}{r_t}$, on a dans le système A :

$$\frac{R_s}{r_t} = \frac{55\,816\,195}{50\,000} = 1116$$

Pour le rapport $\frac{R_s}{r_t}$, on a dans le système B :

$$\frac{R_s}{r_t} = \frac{121\,604\,451}{50\,000} = 2432$$

Ce sont ces trois valeurs que nous avons fait figurer dans le tableau 7.14

Hippolyte ignore comment Archimède est arrivé à ces deux systèmes d'évaluation des distances et il critique les intervalles d'Archimède du système A. Tout en adoptant la valeur de la distance Terre-Lune : $R_l = 5\,544\,130$ stades d'Archimède, il revient à une échelle de distance toute pythagoricienne en attribuant aux différents intervalles du système solaire les valeurs ci-après :

Lune-Soleil : $2R_l$ Soleil-Vénus : $3R_l$
 Vénus-Mercure : $4R_l$ Mercure-Mars : $9R_l$
 Mars-Jupiter : $8R_l$ Jupiter-Saturne : $27R_l$

Hippolyte attribue aussi à Archimède la valeur du périmètre terrestre :

$L = 240\,543$ stades, chiffre divisible par 3.

Si on considère la deuxième donnée et si on prend pour π la valeur approchée 3, on obtient : $2r'_t = 80\,181$ stades.

Or si on part de cette valeur et si on prend pour π la valeur plus approchée $22/7$, on trouve pour le périmètre terrestre :

$L' = 22/7 \times 2r'_t = 251\,997$ stades, valeur très proche de celle d'Eratosthène : $252\,000$ stades (voir n° 8 212).

Vers 400 après J.C., **Macrobe** reprend les évaluations d'Archimède, auxquelles il fait le même reproche qu'Hippolyte, mais il corrige l'ordre d'Hippolyte et ceux d'Archimède en plaçant à partir de la Terre, dans l'ordre : la Lune, Mercure, Vénus, le Soleil comme le faisaient les Chaldéens.

Enfin **Martianus Capella** au 5^e siècle après J.C attribue à Archimède une circonférence ter-

restre de longueur : $L'' = 406\,010$ stades, la valeur de ce stade étant très vraisemblablement différente de celle d'Eratosthène.

On constate ainsi le prestige dont jouissait Archimède, puisque plusieurs siècles après lui, on citait encore les résultats qu'il avait obtenus concernant les distances entre les différents corps célestes et la longueur de circonférence terrestre.

BIBLIOGRAPHIE

1. "Histoire de l'astronomie ancienne" par **M. Delambre**. Paris 1817

2. "Aristarque de Samos" par **P. Tannery**. Mémoires de la société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux 1883

3. "Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne" par **P. Tannery**. Paris 1893

4. "Mémoires scientifiques de **P. Tannery**". Paris 1912

5. "Aristarchos's observation of the summer solstice" par **B. L. Van der Waerden** p 103 Isis volume 77 n° 286

6. "Les somnambules" par **Arthur Koestler**. Paris 1960

7. "A history of ancient mathematical astronomy" (HAMA) par **O. Neugebauer**, Berlin Heidelberg, New York 1975.