

## Rattachement du référentiel *Reykjavik local* au référentiel national Islandais

Hugo LECOMTE



Le National Land Survey of Iceland (NLSI) est, entre autres, responsable de la mise en place et de l'entretien des systèmes de référence géodésique islandais. Le système de référence actuel s'appelle ISN2016 et est un système semi-dynamique créé pour tenir compte de la situation tectonique islandaise. Cet article détaille la mise en référence dans le référentiel ISN2016 du référentiel de la ville de Reykjavik. Grâce à la mesure dans le système actuel de points connus dans l'ancien système de référence, une transformation précise de 17 millimètres a été établie entre les deux systèmes. Cette transformation est effectuée avec une transformation polynomiale du second ordre car cette dernière est la plus précise des techniques étudiées.

**MOTS-CLÉS**  
 Islande, référentiel, tectonique, validation croisée, transformation planaire, collocation par moindres carrés

NDLR : Cet article a été soumis dans le cadre du prix de l'AFT 2019



### Introduction

Au début du XX<sup>e</sup> siècle, l'armée Danoise a mis en place un système de référence géodésique autour de la ville de Reykjavik, capitale de l'Islande, à cette époque sous domination Danoise. L'ellipsoïde de référence utilisé est l'ellipsoïde Danois (*Andræ*) datant de 1876. Ses caractéristiques sont présentées dans la *table 1*. Ce système de référence géodésique local est nommé *Reykjavik 1900* et est un système 2D ou bidimensionnel. *Reykjavik 1900* est décrit dans le document [Clifford J. Mugnier, 2004]. Il a été créé en utilisant les techniques de

Demi-grand-axe (a)	6377019.25666 m
Aplatissement (f)	1/300

Table 1. Caractéristiques de l'ellipsoïde Danois (*Andræ*)

triangulation et est matérialisé par des piliers en béton. Le NLSI a mené une campagne en 2005 où la précision de la triangulation du réseau a été évalué à 3 centimètres. Le réseau de points a ensuite été agrandi au fur et à mesure des années par la municipalité de Reykjavik avec de nouveaux piliers ou des repères au sol. Aujourd'hui le réseau de points recouvre plus de 25 km<sup>2</sup> sur la municipalité de Reykjavik et des municipalités alentours. Ce référentiel agrandi se nomme *Reykjavik local*.

La matérialisation du système de référence géodésique *Reykjavik local* est entachée d'erreurs dans les coordonnées des points. Ces erreurs proviennent de différents facteurs dont, notamment, les erreurs initiales de la triangulation, les erreurs liées aux déformations géologiques de la zone et les erreurs liées au déplacement potentiel de certains points. Les erreurs de triangulation peuvent être d'autant plus importantes que le réseau a été mis en place à une période où les calculs étaient faits à la main. Les déformations géologiques sont conséquentes car Reykjavik est située proche de la frontière entre la plaque Eurasienne et la plaque Nord-Américaine. La situation géologique de l'Islande est schématisée sur la *figure 1*. La ville de Reykjavik se

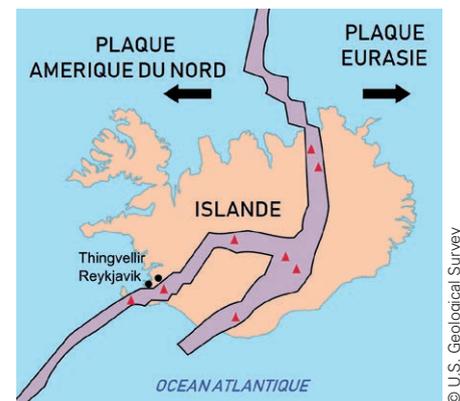


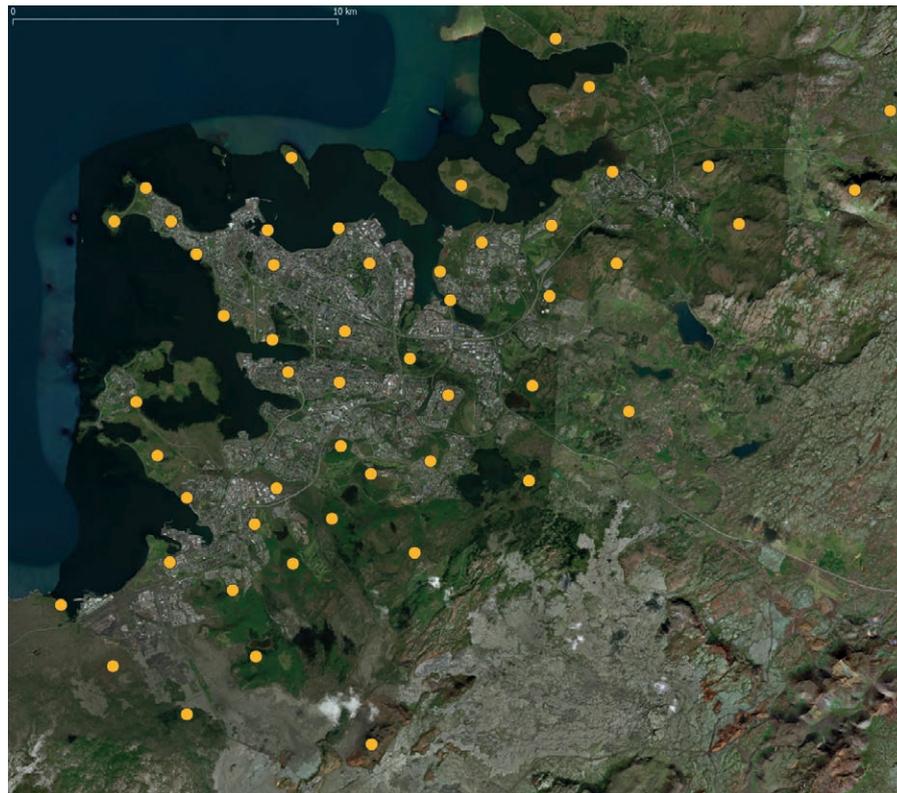
Figure 1. Situation géologique de l'Islande



déplace à une vitesse moyenne de deux centimètres par an dans le référentiel de l'*ITRF14* mais ce déplacement n'est pas uniforme sur toute la zone à cause de la forte déformation crustale. Enfin, les erreurs liées aux déplacements de points sont présentes à cause de l'ancienneté du réseau et de la grande expansion de la ville de Reykjavik dans les années 1900, la population est passée de 6 321 habitants en 1901 à 117 898 habitants en 2008. Aujourd'hui, le système de référence géodésique islandais est le système *ISN2016* qui est un système de référence global semi-dynamique. Il s'appuie sur le repère de référence IGS14. Les modélisations des déformations liées à la tectonique des plaques sont évaluées tous les six mois et de nouvelles grilles sont publiées par la *National Land Survey of Iceland*. Des corrections peuvent aussi être publiées suite à des événements géologiques tels que des séismes ou des éruptions volcaniques.

Les deux référentiels à rattacher sont aussi déformés géométriquement l'un par rapport à l'autre. La projection cartographique associée au système *ISN2016* est une projection Lambert conique conforme alors que la projection du référentiel *Reykjavik local* est une projection sur un plan tangent. De ce fait, les distances dans les deux projections sont altérées de manières différentes. Le rattachement entre les deux systèmes doit aussi rendre compte de ces déformations.

L'objectif du travail présenté dans cet article était de créer un processus précis et simple de transformation de coordonnées entre le référentiel *ISN2016* et le référentiel *Reykjavik local*. Pour ce faire, la méthode utilisée dans cet article est inspirée de [Ampatzidis & Melachroinos, 2017]. Dans un premier temps, les données et méthodes utilisées pour cette étude seront présentées. Viendra ensuite la présentation des différents processus de transformations planaires et les résultats obtenus avec chacun d'entre eux. Une méthode de mise en référence à partir de la collocation par moindres carrés sera aussi étudiée. Finalement, à partir des différents résultats obtenus, la méthode



© H. Lecomte (2019)

Figure 2. Points mesurés lors de la campagne autour de Reykjavik

de transformation la plus précise sera choisie et utilisée par la *National Land Survey of Iceland* (NLSI) pour permettre de convertir des coordonnées entre le système géodésique actuel et le référentiel *Reykjavik local*.

## Présentation des données

### ■ Acquisition

Les données utilisées dans cet article ont été acquises entre le mois de mai et le mois d'août 2019. Environ quinze jours de levé terrain de points ont été effectués. Les coordonnées des points levés sont connus dans le référentiel *Reykjavik local*. Une cinquantaine de points ont été sélectionnés sur des critères de répartition homogène et de stabilité. La plupart des points de la campagne sont placés en hauteur car ils datent de travaux topographiques où la triangulation nécessitait une bonne visibilité depuis les points, de ce fait les points ont un environnement propice à l'utilisation d'un récepteur GNSS. Toutefois, pour certains points, des immeubles ont été construits à proximité et masquent une partie de l'horizon. Une carte des points du réseau mesurés est présentée en figure 2.

Les points sont séparés en deux catégories, les points de références et les points levés. Les points levés sont stationnés pendant environ quinze minutes avec un récepteur GNSS Trimble R10. Pendant une série de plusieurs jours de mesures, une à deux stations de référence sont installées et mesurées à l'aide d'un récepteur GNSS Trimble Net R5 et d'une antenne *Zephyr Geodetic Model 2*. Les constellations de satellites utilisées sont GPS et GLONASS.

### ■ Traitement des données

Le traitement des données a été effectué à partir du logiciel *Trimble Business Center*. Les traitements sont constitués de deux parties distinctes : le traitement de toutes les lignes de bases une à une et ensuite un ajustement en réseau sur toutes les lignes de base. Le traitement des lignes de base est fait en utilisant les orbites précises fournies par l'*International GNSS Service* (IGS) ainsi que les données de calibration d'antennes de l'IGS. Aucune donnée de modèle ionosphérique, troposphérique ou d'erreurs d'horloge des satellites n'est utilisée par le logiciel.

La mise en référence est faite à partir de la station IGS REYK de la ville de



Reykjavik et dont les coordonnées utilisées sont dans le référentiel *ISN2016* époque 2016.5. Ainsi, à l'issue de ces traitements, les coordonnées des points mesurés sont obtenues dans le référentiel *ISN2016* époque 2016.5. Le logiciel fournit aussi une information sur la précision a priori des coordonnées. La précision moyenne de la détermination des points est de 1 centimètre sur la composante Est et de 1.5 centimètre sur la composante Nord. Avec ce premier traitement, des erreurs telles qu'un mauvais nom pour un point ou une erreur grossière dans le traitement des lignes de bases sont identifiables.

### ■ Choix du processus de transformation

Cet article comparera deux processus de transformation différents. Le premier correspond à une transformation de coordonnées à l'aide d'une transformation planaire. Le deuxième est composé d'une transformation planaire couplée à l'utilisation d'une grille de déformation. La grille de déformation utilisée dans cet article est obtenue à partir de la collocation par moindres carrés.

Pour étudier quelle transformation est la plus précise, nous utiliserons la méthode de validation croisée. Cette méthode consiste à séparer notre jeu de données en deux groupes : le groupe d'apprentissage et le groupe d'évaluation. Le premier groupe servira à ajuster les paramètres des techniques de transformation étudiées. Le second groupe permet d'évaluer la précision de la transformation en



comparant les coordonnées connues des points dans le référentiel final avec les coordonnées obtenues en utilisant les différentes transformations. Le premier groupe est composé de 90 % des données et le deuxième 10 %. La méthode de validation croisée est effectuée mille fois et les résultats donnés dans cet article correspondent à la moyenne de la précision de ces mille itérations, ce qui permet d'éviter des effets de mauvaise distribution du tirage aléatoire.

## Transformations planaires

Les transformations étudiées dans cet article ne prennent en paramètres que les coordonnées initiales des points à transformer. L'objectif n'est pas d'obtenir une transformation dépendante du temps ou d'autres facteurs. Cette hypothèse implique que les fonctions de transformation utilisées seront des fonctions polynomiales. Dans cette partie, les formules de la similitude à deux dimensions et de la transformation polynomiale du second ordre seront détaillées.  $x_{ISN}$ ,  $y_{ISN}$  sont des coordonnées initiales dans le référentiel *ISN2016* et  $X_{Reyk\ local}$ ,  $Y_{Reyk\ local}$  sont des coordonnées finales dans le référentiel *Reykjavik local*. Les termes notés  $\epsilon$  représentent les erreurs résiduelles de transformation et les paramètres des transformations sont ajustés avec la méthode des moindres carrés linéaire.

### ■ Similitude

La similitude utilisée dans cet article est une transformation modélisant une translation, une rotation et une dilatation. Cette transformation comprend 4 paramètres à ajuster. La similitude est normalement une solution exacte pour modéliser la transformation entre deux systèmes de référence planaires. Néanmoins, sachant que le référentiel

*Reykjavik 1900* ne possède pas une géométrie exacte, la similitude n'est pas suffisante pour modéliser la trans-

$$\begin{pmatrix} X_{Reyk\ local} \\ Y_{Reyk\ local} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{ISN} \\ y_{ISN} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \end{pmatrix}$$

formation entre les deux référentiels.

Avec  $\mu$  le facteur d'échelle,  $\theta$  l'angle de rotation et  $t_x$ ,  $t_y$  les facteurs de translation. Notons aussi que la formule de la similitude peut s'écrire comme une transformation polynomiale du premier ordre avec deux contraintes sur les paramètres.

$$\begin{aligned} X_{Reyk\ 1900} &= a_0 + a_1x_{ISN} + a_2y_{ISN} \\ &+ a_3x_{ISN}^2 + a_4y_{ISN}^2 + a_5x_{ISN}y_{ISN} + \epsilon_x \\ Y_{Reyk\ 1900} &= b_0 + b_1x_{ISN} + b_2y_{ISN} \\ &+ b_3x_{ISN}^2 + b_4y_{ISN}^2 + b_5x_{ISN}y_{ISN} + \epsilon_y \end{aligned}$$

### ■ Transformation polynomiale de second ordre

La transformation polynomiale de second ordre est composée de douze paramètres. Ce nombre de paramètres permet un meilleur ajustement entre les deux référentiels mais la géométrie des objets n'est pas conservée. Les résultats sont plus précis mais moins réalistes.

### ■ Résultats des transformations

Après avoir ajusté les paramètres des modèles de transformation avec le processus de validation croisée sur mille tirages aléatoires, les résultats obtenus sont compilés dans la *table 2*.

La similitude est la transformation la moins précise. Comme attendu, le réseau de points n'a pas une géométrie exacte et de ce fait, la similitude n'est pas la bonne solution pour la transformation. Néanmoins, les résidus de la similitude contiennent un signal parti-

Transformation	Précision de la validation croisée (mm)
Similitude	45
Polynomial du premier ordre	44
Polynomial du second ordre	17
Polynomial du troisième ordre	20

Table 2. Compilation de la précision des différentes transformations

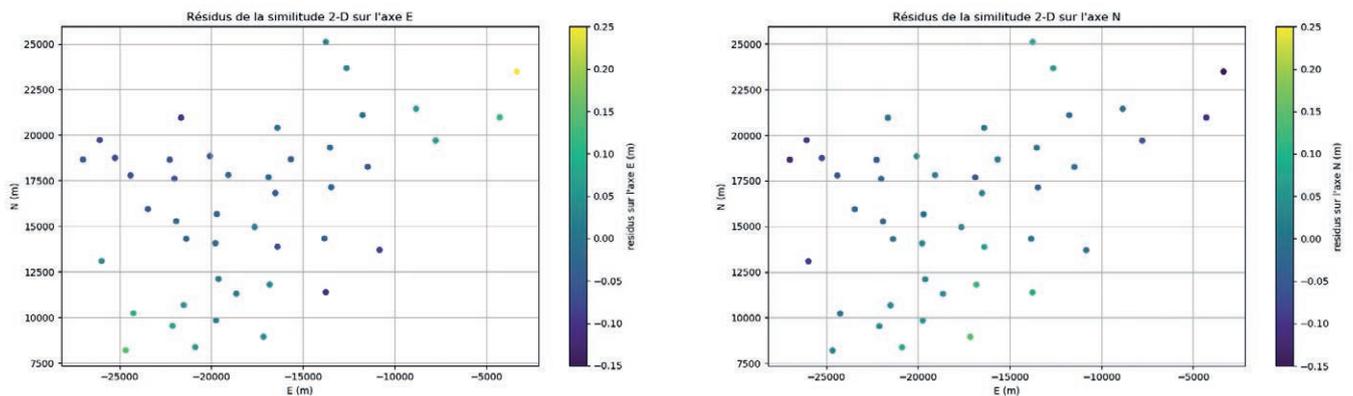


Figure 3. Résidus de la similitude dans le référentiel *Reykjavik local*

culier traduisant les déformations et non pas des artefacts liés aux erreurs de mesures. Ces résidus sont affichés sur la figure 3. L'amplitude des résidus est de 40 centimètres avec des forts résidus pour l'axe E au Nord-Est et Sud-Ouest de la zone et des forts résidus sur l'axe N au Sud de la zone. Les forts résidus sont situés en bord de zone et peuvent être expliqués par la propagation d'erreurs liée à la triangulation couplée aux déformations des distances par les projections qui sont plus grandes en bord de zone à cause de la courbure de la terre pour la projection sur surface plane pour le référentiel *Reykjavik local*.

Pour chacune des transformations la distribution des résidus est proche d'une distribution gaussienne. La transformation la plus précise est la transformation polynomiale de second ordre. La figure 4 montre la différence de la transformation d'une grille régu-

lière de points du référentiel ISN16 vers le référentiel *Reykjavik local* entre une similitude et une transformation polynomiale du second ordre sur chacun des axes. Cette figure montre que la transformation polynomiale du second degré s'ajuste bien sur les résidus de la similitude pour l'axe E et N. La précision donnée par la validation croisée montre que la transformation polynomiale du second ordre traduit quasiment la quasi-totalité de l'information nécessaire à la transformation entre les deux référentiels.

Les transformations polynomiales du premier ordre et du troisième ordre ont de moins bons résultats que la transformation polynomiale du second ordre. La similitude est très proche de la transformation du premier ordre en termes de paramètres, ce qui explique les précisions semblables entre les deux transformations. Pour la transformation du troisième ordre, la précision

est plus faible que pour celle du second ordre à cause d'un effet de sur-interprétation. Avec vingt paramètres pour la transformation du troisième ordre contre douze pour celle du second ordre, la transformation du troisième ordre contenait plus de paramètres que nécessaire pour décrire les données.

Ces résultats donnent une première solution très convaincante pour la transformation. La précision de la transformation polynomiale du second ordre est proche de la précision avec des coordonnées obtenues pendant la campagne de mesures soit entre 1 et 1,5 centimètre. Cette solution a été comparée avec la collocation par moindres carrés, une méthode d'interpolation stochastique, pour voir si cette technique permet d'obtenir de meilleurs résultats en l'appliquant sur les résidus de la transformation par similitude où un signal est présent.

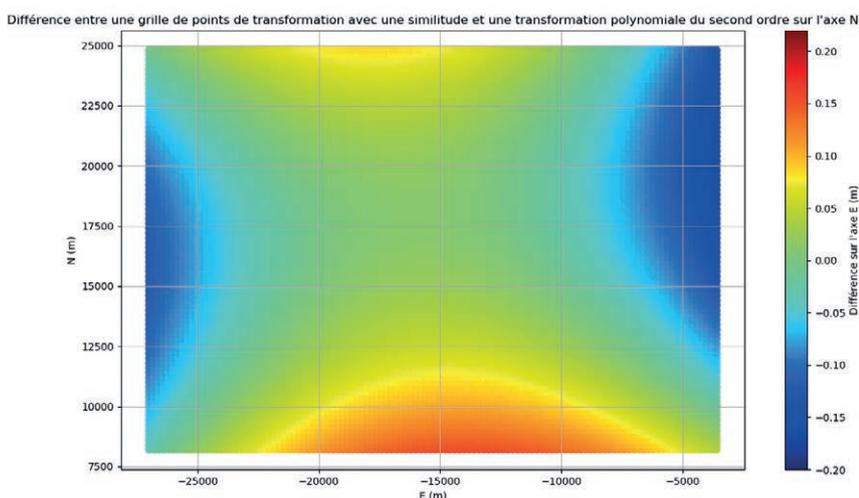


Figure 4. Différence sur la transformation d'une grille de points avec une similitude et une transformation polynomiale du second ordre dans le référentiel *Reykjavik local*

## Collocation par moindres carrés

Nous avons vu que la transformation étudiée ne peut pas être modélisée à l'aide d'une simple similitude. Dans cette partie, nous allons étudier la possibilité de modéliser le signal résiduel après une similitude à l'aide d'une méthode d'interpolation stochastique. Cette méthode d'interpolation s'appuie sur une description probabiliste du signal étudié et l'on fait donc l'hypothèse que le signal possède une description probabiliste homogène sur toute la zone. Dans un premier temps le signal est caractérisé par une fonction reflétant sa distribution spatiale,



le covariogramme. Dans un second temps, l'information donnée par cette fonction permet de modéliser le signal avec la méthode de la collocation par moindres carrés.

### ■ Estimation du covariogramme des résidus

Le covariogramme des résidus est la fonction qui exprime la covariance des résidus en fonction de la distance. Il est obtenu à partir de la covariance empirique des résidus de la similitude. Les paires de résidus sont classées par distance et le covariogramme est estimé sur la covariance moyenne de ces paires.

Le modèle utilisé est caractérisé par deux paramètres à ajuster. Le premier traduit la variance du signal et est appelé  $C_0$ . Le second correspond à la longueur de relaxation de la covariance et est appelé  $k$ . La distance entre les points  $x_1$  et  $x_2$  est notée  $d$ .

Après avoir essayé différents modèles de covariance, le meilleur d'entre eux est le modèle exponentiel. Le modèle est ajusté à partir de moindres carrés non linéaires et les résultats sont compilés dans la *table 3*. Sa formule est la suivante :

$$cov(x_1, x_2) = C_0 \exp\left(-\frac{d}{k}\right)$$

Le modèle exponentiel ajusté et la

fonction du covariogramme empirique sont présentés dans la *figure 5*. L'erreur quadratique moyenne est la moyenne quadratique des écarts entre le modèle et la fonction empirique. Elle doit être la plus faible possible. Le coefficient de détermination est décrit dans [Carrère, 2005]. Il doit être le plus proche de la valeur 1 possible. Dans notre cas l'ajustement n'est pas parfait, les valeurs négatives de la fonction empirique pour les distances supérieures à 8 000 mètres ne doivent pas être approximées. Une fonction de covariance utilisée dans le cadre de la collocation par moindres carrés doit rester positive pour que la matrice de covariance servant à caractériser le signal reste semi-définie et positive. Pour assurer que la matrice de covariance soit semi-définie et positive, la fonction modèle ne peut être négative.

### ■ Détail de la méthode de collocation par moindres carrés

La méthode de la collocation par moindres carrés est décrite dans [Moritz, 1978]. C'est une méthode d'interpolation stochastique qui fait une hypothèse de linéarité entre les résidus de notre transformation planaire et le signal à estimer. L'espérance du signal est supposée nulle, ce qui est le cas pour notre estimation.

Soit  $l$  le vecteur des résidus de taille  $n$ . Soit  $C_{l,l}$  la matrice de covariance de  $l$ .  $C_{l,l}$  est une matrice carrée semi-définie et positive d'après les propriétés des matrices de covariance et notre choix de modèle de covariance.

Soient  $s$  le vecteur centré du signal à estimer et  $C_{s,s}$  sa matrice de covariance. Soit  $C_{s,l}$  la matrice de covariance croisée des vecteurs  $s$  et  $l$  et soit  $\hat{s}$  le vecteur de l'estimation du signal.

La formule qui minimise la variance de  $\hat{s}$  est :

$$\hat{s} = C_{s,l} \cdot C_{l,l}^{-1} \cdot l$$

Le vecteur  $l$  se décompose en la somme d'un vecteur  $d$  traduisant le signal des résidus et d'un vecteur  $\epsilon$  contenant l'erreur de mesure. Cette erreur est matérialisée par un bruit gaussien.

On peut donc écrire :

$$l = d + \epsilon$$

En notant  $\sigma$  la valeur a priori de l'écart-type de l'erreur de mesure et  $I_n$  la matrice identité de taille  $n$ , la matrice de covariance de  $l$  peut s'écrire :

$$C_{l,l} = C_{d,d} + \sigma^2 \cdot I_n$$

Ici,  $C_{d,d}$  dépend uniquement du modèle de covariance choisi, le modèle exponentiel dans notre cas.

### ■ Résultats

Après avoir utilisé la méthode de la collocation par moindres carrés avec la validation croisée sur un millier de tirages aléatoires, la précision finale obtenue pour la transformation est de 28 millimètres. La similitude couplée à la collocation modélise mieux la transformation que la similitude seule, mais la précision atteinte n'est pas aussi bonne que celle obtenue avec une transformation polynomiale du second ordre. Les grilles de déformation obtenues avec collocation sont montrées sur la *figure 6*. La surface est assez régulière et ne prend pas trop en compte les grands résidus sur les bords de la zone. Cette méthode modélise donc la transformation en considérant que les valeurs extrêmes ne reflètent pas seulement un grand signal, mais aussi une potentielle erreur de mesure ou un mouvement

Modèle	$C_0$ (mm <sup>2</sup> )	$k$ (mm)	Erreur quadratique moyenne (mm <sup>2</sup> )	Coefficient de détermination $R_2$
Exponentiel	4347	0.431	861	0.781

Table 3. Résultat de l'ajustement du modèle de covariance exponentiel

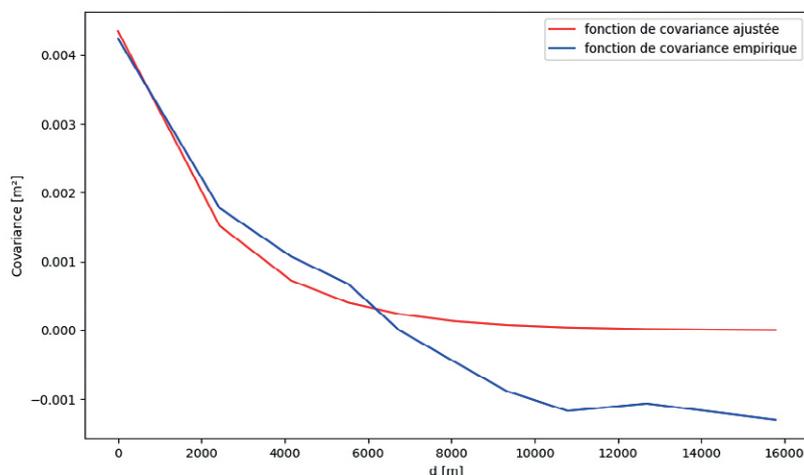


Figure 5. Covariogramme des résidus de la similitude 2-D et le covariogramme exponentiel ajusté



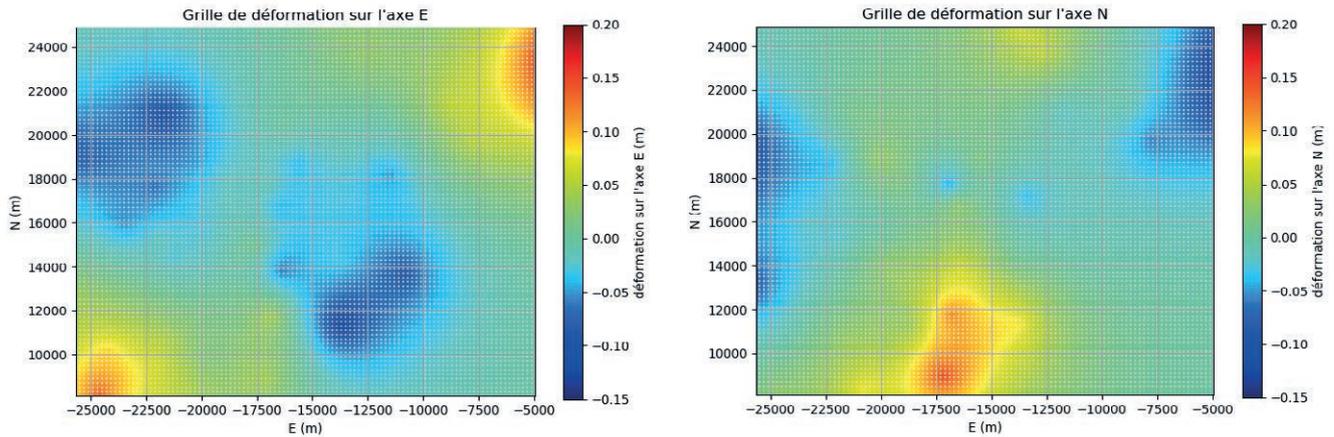


Figure 6. Grilles de déformation obtenue à partir de la collocation par moindres carrés sur les résidus de la similitude 2-D



s'appliquant uniquement au point et non pas aux points autour de ce dernier.

Il est possible de formuler l'hypothèse suivante pour expliquer la meilleure précision de la transformation polynomiale du second ordre : l'utilisation d'une méthode d'interpolation stochastique en faisant la supposition que les résidus suivent une même loi aléatoire et qu'ils peuvent être caractérisés par une seule fonction de covariance n'est pas bonne. Cette supposition est certainement inexacte car dans notre cas, une déformation dans une zone peut être créée par la déformation des distances alors qu'une déformation dans une autre zone peut provenir d'une erreur de mesures pendant la triangulation. Dans ce cas les deux zones seront caractérisées par des covariogrammes proches mais différents.



## Conclusion

Avec tous ces éléments, la transformation la plus précise entre *ISN2016* et *Reykjavik local* est la transformation polynomiale du second ordre. Cette transformation possède une précision de 17 millimètres qui est proche de la précision des mesures effectuées sur les points du réseau. Néanmoins, cette précision est valable seulement à l'intérieur du réseau et il est très fortement déconseillé de faire de l'extrapolation avec la transformation finale. Le réseau de points mesuré recouvre toutes les zones urbaines de Reykjavik et devrait pouvoir être utilisé dans les prochaines décennies même en cas de forte expansion urbaine. La transformation finale a été implémentée avec le programme de manipulation de coordonnées géodésiques PROJ.4 qui donne accès aux transformations polynomiales. La transformation sera disponible d'ici quelques mois sur le site internet de conversion de coordonnées islandais proposé par le NLSI: Cocodati (<https://sandmerki.lmi.is/cocodati/>). ●

## Contact

Hugo LECOMTE  
Ingénieur d'étude innovation à l'IGN  
[hugo.lecomte@ign.fr](mailto:hugo.lecomte@ign.fr)

## Références

[Ampatzidis and Melachroinos, 2017]  
Ampatzidis, D. and Melachroinos, S.  
(2017). *The connection of an old geodetic*

*datum with a new one using Least Squares Collocation : The Greek case.* Contribution to Geophysics and Geodesy, 47 :2017.

[Carrère, 2015] Carrère, C. (2015). *Statistiques descriptives : Théorie et applications.* PUG.

[Clifford J. Mugnier, 2004] Clifford J. Mugnier (2004). *Republic of Iceland, Grid & Datums.*

[Moritz, 1978] Moritz (1978). *Least-squares collocation.* Reviews of Geophysics, 16(3) :421-430.

## ABSTRACT

**Key words:** Iceland, datum, tectonic plate, cross validation, planar transformation, least squares collocation

*The National Land Survey of Iceland (NLSI) is, among other things, responsible for the establishment of the geodetic reference systems of Iceland and their maintenance. The actual Icelandic datum is called ISN2016 and is a semi-dynamic datum created to take into account the Icelandic tectonic situation. This article details the referencing in the ISN2016 datum of the datum of the Reykjavik city. With measurements in the actual datum of points known in the old datum, a transformation within a 17 millimetres accuracy has been defined between both datum. This transformation is a second-order polynomial and was the most accurate of the studied techniques.*