

N'ayez pas peur du coefficient de réfraction !

Deuxième partie sur la réfraction latérale ou asymétrique

■ Thomas TOUZÉ - Nicolas CHEVALLIER - Nicolas BOLZON

La réfraction terrestre, en géodésie, est généralement traitée en faisant deux hypothèses, à savoir un effet uniquement dans le plan vertical de la visée, et ce, de manière symétrique. Or il est bien connu, notamment dans le domaine de la topométrie souterraine, que ces hypothèses ne sont pas toujours applicables. Dans cet article, nous avons pu étudier deux expériences permettant de mettre en évidence des cas de réfraction latérale ou asymétrique, par le biais de visées de plus en plus proches d'un mur ensoleillé ou d'un toit de voiture. En nous inspirant du travail de [Wilhelm, 1994], nous montrons que le cas asymétrique peut se résoudre par l'ajout d'un coefficient d'asymétrie de la visée fonction de la position de la source de perturbation thermique le long de cette dernière. Le cas latéral peut également être résolu, mais pour ce faire, il est nécessaire dans le modèle proposé de considérer le problème de la réfraction en 3D sous la forme d'une matrice de rotation. Cela requiert, comme paramètres supplémentaires, d'introduire le vecteur directeur du gradient de l'indice de réfraction n . L'implémentation de ce modèle dans un logiciel de compensation 3D des mesures topométriques montre des résultats prometteurs dans leur capacité à prendre en compte les cas extrêmes de réfraction mais nécessite encore des validations expérimentales.

■ MOTS-CLÉS

Coefficient de réfraction, réfraction latérale, visées réciproques simultanées, techniques terrestres de la géodésie, ajustement par la méthode des moindres carrés.

l'utilisation des dénivelées (quasi) réciproques simultanées ou au bureau par une procédure de compensation par moindres carrés.

Enfin, il a été vu que la réfraction, du fait de ses brusques variations dans le temps au plus près du sol, doit également être prise en compte dans le modèle stochastique des angles zénithaux.

■ Généralisation des enjeux de réfraction en topométrie

Dans l'immense majorité des cas, les outils exposés précédemment suffisent. Néanmoins, que faire dans les cas suivants :

- je travaille en topométrie souterraine, et je ne peux pas toujours éviter des visées rasantes aux parois du tunnel ou du puits ;
- à l'extérieur par une journée ensoleillée, j'ai une visée qui rase un objet brûlant (mur, toit de voiture, rambarde métallique, etc.).

Le deuxième cas de figure a été étudié par MM. Bolzon et Chevallier lors d'un travail de semestre à la HEIG-VD [Bolzon et Chevallier, 2017] et approfondi lors du travail de Bachelor du même M. Chevallier [Chevallier, 2017]. Par le biais de ces deux expériences, nous allons pouvoir étudier ce qui se passe et ce qui peut être entrepris lorsque nos deux hypothèses fondamentales de la modélisation de la réfraction tombent, en l'occurrence la verticalité du gradient et la symétrie de la déviation.

Forts de ces expériences, nous proposerons une manière de généraliser la modélisation de la réfraction sur les visées tachéométriques à tous ces cas de figure. Ce modèle, implémenté sous

■ Notations

Dans cet article, les notations sont celles utilisées en Suisse pour les mesures topométriques. Ces dernières sont détaillées dans notre article précédent sur la réfraction [Touzé et Hansen, 2019].

Introduction

■ Résumé de l'épisode précédent

Le précédent article [Touzé et Hansen, 2019] publié sur la réfraction était focalisé sur le modèle usuel appliqué en topométrie. Ce modèle est déduit de la loi de Snell-Descartes. En faisant les deux hypothèses suivantes, en l'occurrence un gradient exclusivement vertical de l'indice de réfraction n et

une déviation symétrique du chemin optique, il est possible de modéliser efficacement l'effet de la réfraction sur les angles zénithaux par l'intermédiaire du coefficient de réfraction k .

Ce coefficient, dont la valeur doit tendre vers 0.13 quand les visées sont suffisamment hautes au-dessus du sol pour ne plus en subir les turbulences dues aux cellules convectives thermiques, peut varier énormément dans le cas contraire. Le travail de [Hübner, 1977] permet alors d'en estimer l'ordre de grandeur.

Cet article a également fourni des pistes pour résoudre – si les deux hypothèses précédentes sont fondées – les questions de réfraction sur le terrain par



Scilab dans un logiciel de compensation 3D des mesures topométriques, sera finalement confronté à certaines des expériences de ces deux articles.

Réfraction latérale asymétrique

Au printemps 2017, un projet de semestre, pour la dernière année de Bachelor de la HEIG-VD en géomatique, a été proposé à MM. Bolzon et Chevallier sur la conception d'expériences visant à mettre en évidence et à quantifier la réfraction latérale. Lors de la phase bibliographique de ce projet, ils se sont intéressés, entre autres, à un article de [Wilhelm, 1994], notamment une expérience décrite qu'ils ont reproduite. Les données et résultats exposés ci-après sont le fruit de leur travail [Bolzon et Chevallier, 2017] complété partiellement par la suite.

Description de l'expérience

Sur le site de la HEIG-VD, un mur long de 30 m, exposé au sud-est a été utilisé pour mettre en évidence des effets de réfraction latérale, lors d'une journée ensoleillée de printemps.

L'idée de cette expérience schématisée en figure 1 consiste à mesurer les angles et distances dans un triangle OGD dont la base GD est parallèle à un mur ensoleillé. En répétant l'opération avec la base de plus en plus proche du mur, il devrait être possible de mettre

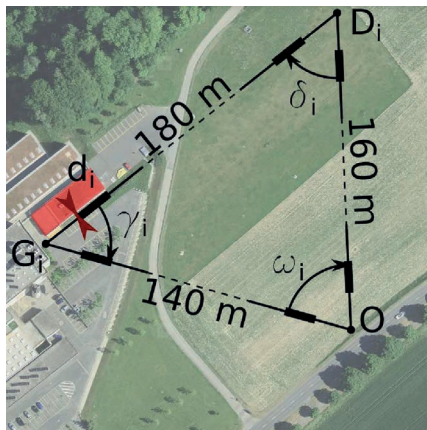


Figure 1. Canevas composé de trois stations tachéométriques en O, G_i et D_i. La base G_iD_i, longue de 183 m et parallèle au mur, a été mesurée à six reprises, en faisant varier la distance au mur di de 10 m à 5 cm.

en évidence des effets de réfraction latérale dus à la chaleur du mur en comparant les angles mesurés et ceux déduits des distances par les lois des sinus et cosinus.

Ainsi pour chaque triangle mesuré, les points O, D_i et G_i ont été stationnés avec un tachéomètre ainsi qu'un prisme à l'aplomb de l'instrument en D_i et en G_i. Depuis chaque station, les directions horizontales, angles zénithaux et distances inclinées vers chacun des deux autres sommets ont été mesurés dans les deux positions de la lunette et ce, à trois reprises, puis moyennés. Enfin les visées de G_i à D_i et réciproquement ont été effectuées simultanément. L'expérience a été reproduite à six reprises, en plaçant la base G_iD_i à une distance d_i du mur à 9.5 m, 20 cm, 10 cm, 7.5 cm puis deux fois à 5 cm.

Les tachéomètres employés avaient comme caractéristiques instrumentales 3 cc de précision angulaire¹ et de 1 mm + 1 ppm de précision en distance. Quant aux réflecteurs, il s'agissait de prismes 360° de précision millimétrique.

Réfraction verticale

Les données acquises ont tout d'abord été traitées par la méthode des dénivelées réciproques simultanées telle qu'exposée dans [Touzé et Hansen, 2019]. Ainsi, pour chacun des six triangles i, nous disposons de trois couples de dénivelées réciproques, dont un simultané, associés à chacun des trois côtés j. Les dénivelées réci-

1. 1 cc = 0.1 mgon = 1 dmgrad

Distance mur d_i [m]	Fermeture [mm]
9.5	1.8
0.2	0.0
0.1	1.4
0.075	2.4
0.05	4.1
0.05	0.9

Tableau 1. Fermetures altimétriques des six triangles et distances au mur de la base G_iD_i.

proques ont été moyennées afin de lisser les effets momentanés de la réfraction. La somme des trois dénivelées moyennées fournissant la fermeture altimétrique de chaque triangle, nous avons pu estimer, en compensant cette fermeture proportionnellement aux carrés des distances horizontales, tel que recommandé dans [Touzé, 2017], une valeur de référence pour chaque dénivelée. Le tableau 1 nous indique les fermetures altimétriques de chaque triangle. Ces dernières sont de l'ordre du millimètre, ce qui est acceptable compte tenu de la qualité des prismes, en dehors peut-être de la cinquième (4.1 mm) qui pourrait paraître suspecte.

Grâce aux dénivelées de référence, il était possible de déduire, pour chaque visée, une estimation du coefficient de réfraction k_{ji} , selon la formule 1, dans laquelle R est le rayon de la Terre, d est la distance horizontale, ζ est l'angle zénithal, l est la hauteur d'instrument et S est la hauteur de prisme. Cette expression est déduite de la formule du nivellement trigonométrique n° 15 de [Touzé et Hansen, 2019]. Les coefficients k obtenus sont représentés en figure 2.

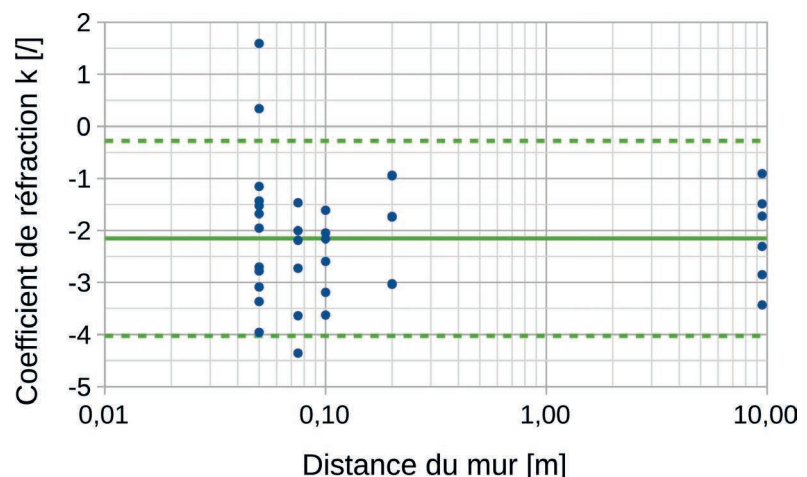


Figure 2. Coefficients de réfraction k estimés en vertical en fonction des distances de la base G_iD_i au mur. En vert, valeur moyenne et intervalle de confiance à 95 %.



$$k_{ij} = 1 - \frac{2R}{d_{ij}^2} (\bar{h}_{ij} - h'_{ij}) \quad (1)$$

avec

$$h' = (I - S) + d \cot \zeta$$

Tout d'abord, sur la *figure 2*, nous observons des valeurs de k en dehors de l'intervalle de confiance à 95 %. Cependant, comme notre incertitude instrumentale est millimétrique et, de ce fait, du même ordre de grandeur que les effets de réfraction verticale, il est difficile de dissocier ces effets du bruit de mesure. Nous pouvons noter que ces deux valeurs positives obtenues de k correspondent au triangle ayant une fermeture à 4.1 mm.

Nos valeurs obtenues de k sont comprises entre -4.4 et 1.6. 50 % des valeurs sont comprises entre -3.0 et -1.5, pour une médiane à -2.1 (voir la *figure 3*). La valeur moyenne à -2.2 coïncide avec la médiane. Sur la *figure 2*, on ne discerne pas d'effet laissant penser que le nivellement trigonométrique est influencé par la distance au mur. Les visées ayant été faites à hauteur d'homme au-dessus du sol par une journée ensoleillée, les coefficients de réfraction obtenus sont de l'ordre de -2.2 ± 0.9 , en cohérence avec les travaux de Hübner sur les ordres de grandeurs de k (voir [Hübner, 1977] et [Touzé et Hansen, 2019]).

■ Études des angles horizontaux

Comme dit précédemment, les angles à chaque sommet du triangle ont été mesurés. Comme ce fut également le cas pour les distances entre sommets, la loi des cosinus a permis de déduire la valeur de ces angles, indépendamment des mesures angulaires et donc de tout effet de réfraction (en dehors des ppm atmosphériques pris en compte lors des observations). Le *Tableau 2* et la *Figure 4* fournissent

d_i [m]	$\Delta\omega_i$	$\Delta\gamma_i$	$\Delta\delta_i$	$\frac{\Delta\delta_i}{\Delta\gamma_i + \Delta\delta_i}$
9.5	-0.2	3.6	2.9	
0.2	-1.8	-11.0	2.1	
0.1	-3.3	-87.7	-13.2	0.14
0.075	-2.9	-127.4	-14.5	0.10
0.05	-5.7	-182.9	-39.3	0.18
0.05	-3.3	-214.4	-35.3	0.14

Tableau 2. Écarts angulaires en cc entre les angles déduits des distances et les mesures, aux trois sommets des triangles.

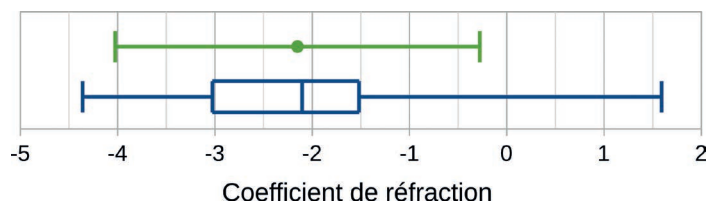


Figure 3. Diagramme en boîte (ou "boîte à moustaches") en bleu figurant les valeurs extrémales et les quartiles des coefficients de réfraction verticaux déduits des mesures. Intervalle de confiance à 95 % en vert.

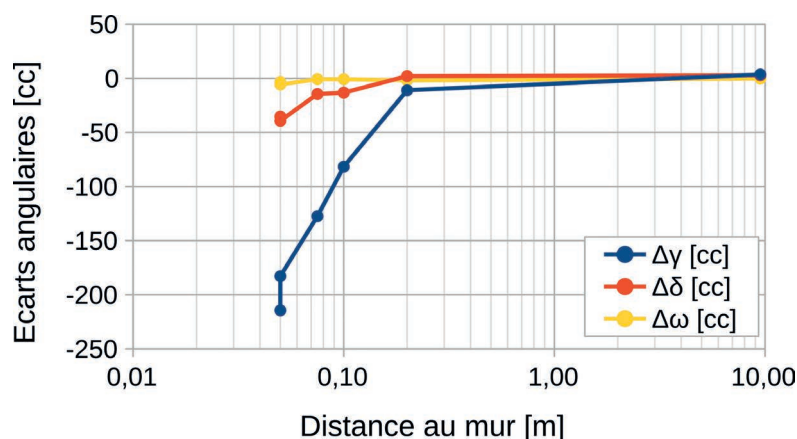


Figure 4. Écarts angulaires ω , γ et δ constatés respectivement en O, G et D.

les écarts angulaires constatés (angle déduit des distance – angle mesuré) à chaque sommet en fonction des distances.

Nous constatons en premier lieu qu'au niveau du sommet O, le plus éloigné du mur, la déviation est de l'ordre du cc, ce qui est négligeable au regard des incertitudes instrumentales et ce, quelle que soit la distance au mur de la base GD. Au niveau des autres sommets, les écarts constatés deviennent clairement significatifs quand la distance au mur est inférieure ou égale à 10 cm. Ainsi, la dernière valeur en G, 214 cc, correspond à une erreur transversale de 56 mm en D, distant de 183 m ! Les angles mesurés en G et D sont toujours plus grands que la valeur déduite des distances. Si nous faisons l'hypothèse que les visées de G vers O et de D vers O ne sont pas déviées, cela signifie que les visées de G vers D et réciproquement sont attirées vers le mur.

Nous supposons qu'il s'agit là d'un effet de réfraction latérale dû à la chaleur du mur ensoleillé. L'effet est clairement asymétrique du fait que le mur est nettement plus proche de G que de D. Un point particulièrement

intéressant est décrit par la dernière colonne du *Tableau 2* : le rapport de l'écart constaté en D sur l'écart total est à peu près constant (0.15 en moyenne). Mathématiquement, il en est de même en G (0.85 en moyenne).

Or le centre du mur, c'est-à-dire le centre de notre objet perturbateur, est situé à environ 22 m de G pour une base longue de 183 m, ce qui correspond à un rapport de 0.12, à rapprocher de la valeur déduite des mesures précédemment, en l'occurrence 0.15.

■ Modélisation de la réfraction latérale asymétrique

Dans sa publication sur la réfraction latérale, [Wilhelm, 1994], ce cas de figure a été étudié par l'auteur. Si on suppose, conformément à la *Figure 5*, qu'un objet est situé à la distance κL de G d'une visée GD de longueur L , avec κ compris strictement entre 0 et 1, et si nous notons la déviation angulaire totale Δi , alors nous obtenons les résultats en *formule 2*.

Le coefficient "kappa" κ correspond ainsi, non seulement à la position de l'objet perturbateur le long de la visée, mais également à l'asymétrie de la

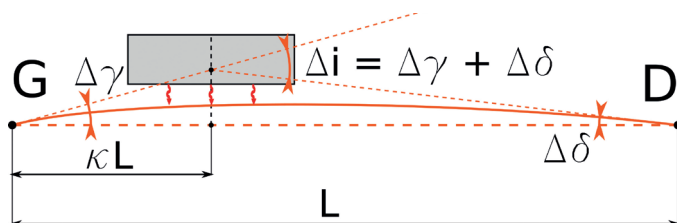


Figure 5. Modélisation de la réfraction latérale asymétrique du fait de la présence d'un objet perturbateur [Wilhelm, 1994].

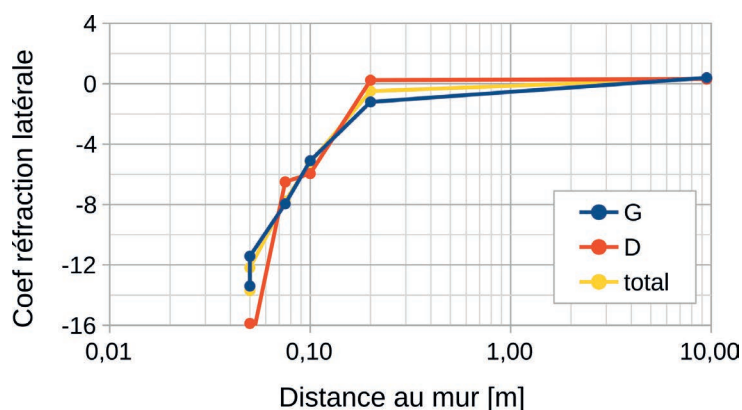


Figure 6. Coefficients de réfraction latérale k_H , déduits des mesures en G, en D et de la déviation totale, et représentés en fonction de la distance au mur.



déviations angulaires dues à notre objet, en l'occurrence le mur dans notre cas de figure.

$$\begin{cases} \Delta\gamma = (1 - \kappa) \Delta i \\ \text{et} \\ \Delta\delta = \kappa \Delta i \end{cases} \quad (2)$$

Dans notre article précédent, nous avons vu que le coefficient – vertical – de réfraction k était lié à la déviation angulaire totale Δi selon la formule 3, dans laquelle R est le rayon de la Terre et d la distance horizontale.

$$\Delta i = \frac{k d}{R} \quad (3)$$

Si nous notons k_H le coefficient de réfraction latérale en nous inspirant de la formule 3, puis en appliquant 2, et connaissant la valeur théorique de $\kappa=0,12$, nous pouvons déduire la valeur de k_H pour chaque visée. Ces coefficients calculés sont représentés en Figure 6.

$$\begin{cases} \Delta\gamma = (1 - \kappa) \frac{k_H d}{R} \\ \text{et} \\ \Delta\delta = \kappa \frac{k_H d}{R} \end{cases} \quad (4)$$

De la Figure 6, nous constatons la bonne répétabilité des coefficients de

réfraction latérale déduits des mesures faites en G autant qu'en D et ce, malgré la très forte asymétrie. Pour les deux triangles dont la base est distante de 5 cm au mur, les coefficients calculés sont respectivement -14 et -12.

Discussion

Cette expérience donne comme résultats des valeurs très élevées en valeur absolue sur les coefficients de réfraction : jusqu'à -14 à 5 cm du mur. Cela s'explique par le très fort gradient constaté lors des mesures. Les températures avaient été mesurées simultanément à 5 cm et à 1,7 m du mur. La différence de température était de 8°C. Néanmoins, il est intéressant de noter le fait qu'à 20 cm du mur, il n'y avait plus d'effets significatifs de réfraction latérale ni asymétrique malgré le caractère extrême de l'expérience (pour s'en convaincre, voir la photographie prise lors de l'expérience en Figure 7).

Cependant, il serait intéressant de reprendre cette expérience en diminuant l'incertitude de mesure, en augmentant le nombre de tests à différentes distances du mur et en mesurant le gradient de température afin de les corréler aux valeurs de k obtenues.

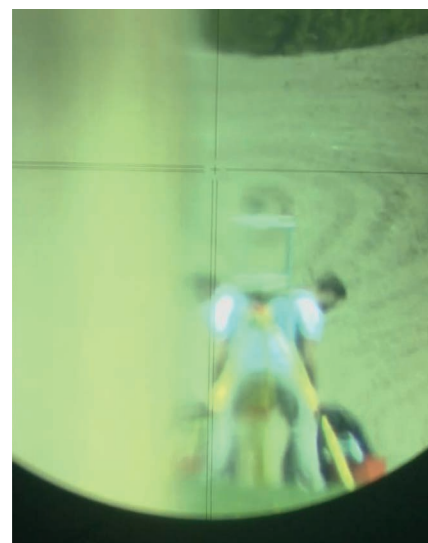


Figure 7. Effet optique sur la visée de G vers D, à 5 cm du mur, dû à la réfraction latérale [Bolzon et Chevallier, 2017]. De la même manière que l'enrobé sur une route ensoleillée, le mur provoque un effet de mirage, mais vertical.

Réfraction verticale asymétrique

L'expérience précédente nous a permis de mettre en évidence des effets de réfractions dans le plan vertical ainsi que latéralement, mais également asymétriques. En nous inspirant de la méthode proposée par [Wilhelm, 1994] nous avons pu prendre en charge cette asymétrie par le biais d'un coefficient κ définissant la position de l'objet source de la perturbation thermique. Dans notre cas, l'asymétrie ne survenait que dans les effets latéraux de la réfraction. Désormais nous allons nous atteler aux questions suivantes : des cas de réfraction verticale asymétrique peuvent-ils survenir et si c'est le cas, est-ce que ce coefficient d'asymétrie précédent peut également s'appliquer en vertical ?

Description de l'expérience

L'expérience effectuée par M. Chevallier lors de son travail de Bachelor [Chevallier, 2017] est inspirée d'une situation relativement fréquente en topométrie, à savoir une visée rasant le toit d'une voiture stationnée, pendant une journée ensoleillée. Comme il peut être vu sur la Figure 8, considérons le triangle OGD dont chaque sommet est stationné et vise les deux autres sommets. La base GD, longue de 136 m, est perturbée par la



Figure 8. Le canevas se compose d'un triangle d'environ 140 m de côté, dont la base GD rase le toit d'une voiture. La station G est montée sur un trépied réglable en hauteur.

présence d'une voiture à 40 m de G, ce qui correspond à $\kappa=0.30$. Si les stations O et D étaient constantes, G, montée sur un trépied réglable en hauteur, variait selon un axe vertical, de manière à ce que la visée GD se fasse à différentes hauteurs s au-dessus de la voiture. Par un montage simple, en *Figure 9*, la hauteur de la visée au-dessus de la voiture pouvait facilement être lue depuis le tachéomètre stationné en G. L'expérience a été reproduite à six reprises. La première a été faite sans la voiture. Puis, sans bouger G, la voiture a été mise en place. La visée GD passait à 40 cm au-dessus du toit. Ensuite la station G a été baissée de manière à ce que la visée passe à 20, 10, 5 puis 2 cm au-dessus du toit. Pour les visées réciproques de D vers G, la hauteur de la visée au-dessus du toit a été déduite par trigonométrie. Comme les visées G vers D et D vers G ne passaient pas à la même hauteur au-dessus du toit de la voiture (voir schéma ci-dessus), nous avons considéré que les coefficients k de ces visées réciproques étaient différents. Ces informations sont synthétisées en *Tableau 3*.

■ Traitement des données

Pour chacune des six expériences, les dénivelées GO et OD ont été calculées par la méthode des dénivelées réci-

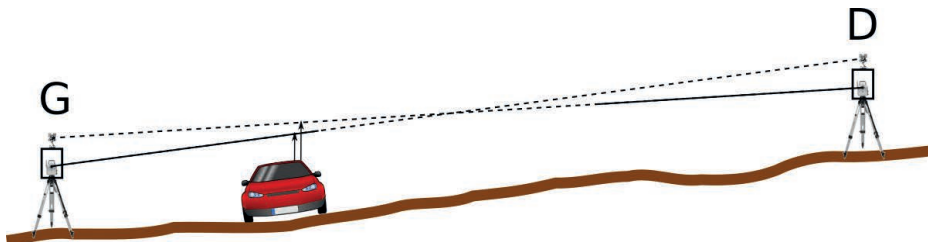


Figure 9. La hauteur de la visée au-dessus du toit de la voiture est mesurée à l'aide d'un double mètre.

Test	I_G [m]	s_G [cm]	s_D [cm]
1	0.534	/	/
2	0.534	40	52
3	0.260	20	32
4	0.139	10	22
5	0.062	5	17
6	0.000	2	15

Tableau 3. Lors des six tests, hauteurs relatives de la station G (I_G), et hauteurs s des visées depuis G et D au-dessus du toit de la voiture. Lors du premier test, la voiture était absente.

proques simultanées. Les coefficients de réfraction associés ont également été calculés. Grâce à la relation de Charles $GD = GO + OD$, il était possible de déduire la dénivelée affranchie de la réfraction.

$$\bar{h}_{GD} = \bar{h}_{GO} + \bar{h}_{OD} \quad (5)$$

Pour introduire l'asymétrie dans la formulation du nivellement trigonométrique, nous avons considéré la *Figure 5* et l'équation 4 dans le plan vertical. Cela nous permet d'obtenir le résultat en *formule 6*. Dans cette formulation, on peut constater que si le coefficient κ est égal à 1/2 (ce qui signifie que la perturbation thermique est située vers le milieu de la visée), alors nous retombons sur l'équation classique du nivellement trigonométrique, largement décrite dans [Touzé et Hansen, 2019], où la réfraction agit de manière symétrique.

$$\begin{cases} \bar{h}_{GD} = h'_{GD} + (1 - 2(1 - \kappa)k_G) \frac{d^2}{2R} \\ \text{et} \\ \bar{h}_{DG} = h'_{DG} + (1 - 2\kappa k_D) \frac{d^2}{2R} \end{cases} \quad (6)$$

■ Résultats

Dans un premier temps, nous avons déterminé les valeurs de k associées aux 26 visées indépendantes de la voiture. Nous obtenons les résultats synthétisés en *Figure 10*, où la médiane et la moyenne coïncident à -2.1. Les valeurs extrémales de k sont -5.2 et +1.4. Cependant, comme l'expérience précédente, il est difficile ici de dissocier les effets de la réfraction des erreurs aléatoires de mesure qui sont toutes ici millimétriques.

Cela fait, nous avons pu calculer toutes les valeurs de k associées aux visées de G vers D et réciproquement. La *Figure 11* représente ces valeurs obtenues, ainsi que la valeur moyenne de k et son intervalle de confiance à 95 % calculé sur toutes les autres visées indépendantes de la présence de la voiture (O vers D et G, ainsi que G vers D et réciproquement lors du premier test, sans voiture).

Nous pouvons remarquer que les valeurs de k observées lors des mesures de D vers G sont comprises entre -2.5 et -1.6. Leur moyenne est de -2.1 ce qui est identique à la moyenne de nos 26 visées de référence. Ces visées de D vers G passent au plus près à 15 cm du toit de la voiture. Manifestement, c'est

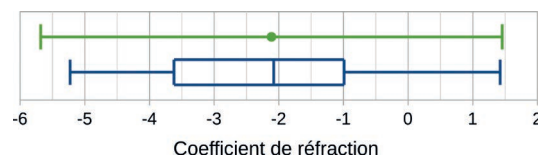


Figure 10. Diagramme en boîte (bleu) des coefficients de réfraction associés aux 26 visées indépendantes de la voiture. En vert, intervalle de confiance à 95 %.

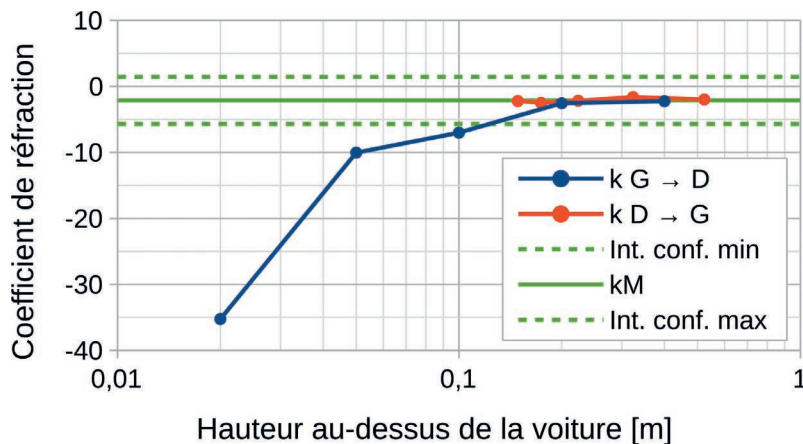


Figure 11. Coefficients de réfraction, en fonction de la hauteur au-dessus du toit de la voiture, mesurés depuis G (en bleu : $k_{G \rightarrow D}$) et D (en orange : $k_{D \rightarrow G}$). En vert, valeur moyenne sur les autres visées de k et son intervalle de confiance à 95 %.

κ	$G \rightarrow D$			$D \rightarrow G$		
	s	k	\mathcal{R}	s	k	\mathcal{R}
0.5	40	-2.2	-3	52	-2.0	-3
0.5	20	-2.5	-4	32	-1.6	-2
0.3	10	-7.0	-10	22	-2.2	-3
0.3	5	-10.0	-15	17	-2.5	-4
0.3	2	-35.3	-51	15	-2.2	-3

Tableau 4. Valeurs de k obtenues sur les visées passant à la hauteur s en cm au-dessus de la voiture et selon le coefficient d'asymétrie κ considéré. \mathcal{R} , exprimé en mm, correspond à l'effet de la réfraction sur la dénivelée.

► suffisamment haut pour qu'aucun effet significatif ne soit détectable.

Quant aux visées faites depuis G, en dessous de 10 cm du toit, nous constatons de forts effets sur la valeur de k qui atteint -35 à 2 cm. Pour ces trois visées, passant à 10, 5 et 2 cm du toit, les effets de réfraction sont respectivement de 10, 15 et 52 mm. Ces valeurs, bien au-delà de notre incertitude de mesure millimétrique, sont clairement significatives.

Ces résultats, exprimés dans le Tableau 4, ont été obtenus en négligeant l'asymétrie au-dessus de 20 cm de la voiture.

■ Discussion

Ce test mériterait d'être reproduit en augmentant le nombre de mesures. Néanmoins, l'objectif d'adapter l'asymétrie au nivellement trigonométrique est atteint. La formule 6 montre que l'équation du nivellement trigonométrique peut être légèrement modifiée

pour accepter le coefficient d'asymétrie κ . Quand ce dernier vaut 0.5, nous retombons sur le modèle symétrique.

Ensuite nous pouvons également remarquer qu'en dehors des visées perturbées par la voiture, nos observations se comportent telles que [Hübner, 1977] le prédisait pour des mesures à hauteur d'homme au-dessus du sol par une journée ensoleillée, en l'occurrence k compris entre -2 et -3.

Enfin, pour toutes les visées passant à plus de 15 cm du toit de la voiture, nous constatons que cette dernière n'a plus d'effet significatif.

Proposition d'une modélisation 3D de la réfraction

■ Retour aux origines

Dans un souci de généralisation, est-il possible de construire une modélisation de la réfraction sur les visées tachéométriques qui soit capable, par une unique équation, de prendre en charge tous les cas de figure présentés dans ces deux articles ? Pour ce faire revenons à l'équation 4 de [Touzé et Hansen, 2019] que nous rappelons ci-après. Cette formule exprime la déviation élémentaire δi subie par une section $\delta \vec{M}$ du chemin optique du fait du gradient de l'indice de réfraction n . Elle peut être reformulée sous la forme d'un produit vectoriel. Nous pouvons noter qu'à ce stade, aucune hypothèse n'a été formulée sur la direction du gradient ni sur la symétrie de la déviation.

$$\begin{aligned} \delta i &= -\frac{\|\text{grad } n\|}{n} \sin i \delta s \\ &= \pm \left\| \frac{\text{grad } n}{n} \wedge \delta \vec{M} \right\| \end{aligned} \quad (7)$$

Au signe près, la valeur de la déviation angulaire élémentaire est égale à la norme du produit vectoriel du gradient de n par la section élémentaire du chemin optique. Ce vecteur résultant correspond, sur la figure 2 de [Touzé et Hansen, 2019], à la direction normale au schéma. En ce sens, on peut concevoir dans l'espace que corriger la réfraction puisse s'exprimer sous la forme d'une rotation d'un certain angle autour d'un certain vecteur, cet angle et ce vecteur étant tous deux fonctions de n , de son gradient et de $\delta \vec{M}$.

■ La réfraction comme une rotation

Plaçons-nous dans la Figure 12 dans laquelle nous considérons une visée tachéométrique orientée de A vers B, exprimée dans le repère local astronomique (RLA) en A, et soumise à une déviation due à la réfraction. L'azimut α et l'angle zénithal ζ mesurés sont biaisés par la réfraction. Néanmoins ces deux mesures définissent un vecteur \vec{u} dont la réalité physique est incontestable en tant que tangente au chemin optique en A. Soit \vec{u} le vecteur directeur de la droite euclidienne (AB). Le point A et les deux vecteurs \vec{u} et \vec{u} forment un plan dont le vecteur normal unitaire est \vec{K} . Soit θ_A , l'angle dans notre plan de \vec{u} à \vec{u} . En respectant les conventions de signe du schéma, nous pouvons écrire la relation 8, dans laquelle $R_{\vec{K}}(\theta_A)$ est la matrice de rotation d'angle θ_A autour du vecteur \vec{K} .

$$\vec{u} = R_{\vec{K}}(\theta_A) \vec{u} \quad (8)$$

Avec les vecteurs \vec{u} et \vec{u} définis ainsi dans le RLA en A :

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} \sin \alpha \sin \zeta \\ \cos \alpha \sin \zeta \\ \cos \zeta \end{bmatrix} \text{ et } \vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} \quad (9)$$

Introduisons \vec{v} comme le vecteur unitaire directeur du gradient de n , défini par un azimut α_n et un angle zénithal ζ_n dans le repère local astronomique de A (cf. formule 10).

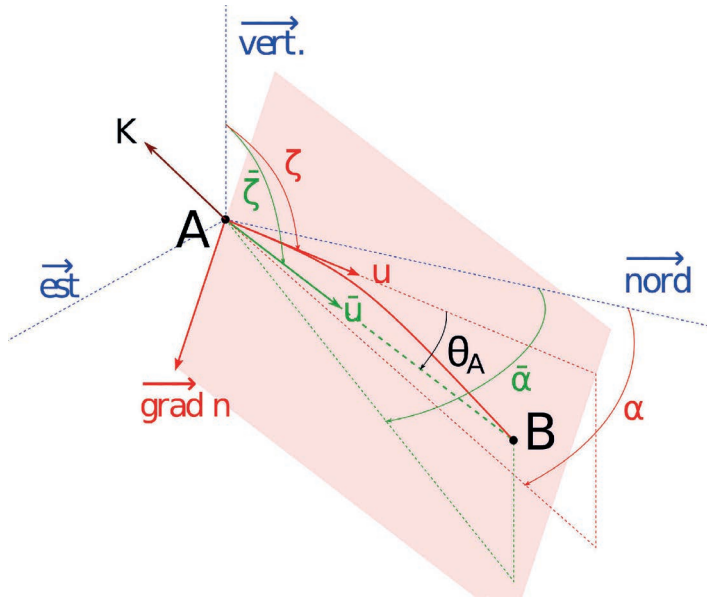


Figure 12. La réfraction dans l'espace sous la forme d'une rotation. Pour aller du vecteur mesuré \vec{u} au vecteur corrigé \vec{u} , on applique une rotation d'angle θ_A dans le plan rouge, de vecteur normal \vec{K} , lié au gradient de n et à \vec{u} .

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \sin \alpha_n \sin \zeta_n \\ \cos \alpha_n \sin \zeta_n \\ \cos \zeta_n \end{bmatrix} \quad (10)$$

Ainsi nous pouvons définir le vecteur v autour duquel agit la réfraction en *formule 11*, dans laquelle est la distance inclinée vraie de A à B et i_A est l'angle entre v et le vecteur AB.

$$\vec{K} = \frac{\vec{v} \wedge \overrightarrow{AB}}{\|\vec{v} \wedge \overrightarrow{AB}\|} = \frac{\vec{v} \wedge \overrightarrow{AB}}{D \sin i_A} \quad (11)$$

Posons K la matrice anti-symétrique telle que, quel que soit le vecteur \vec{p} , $\vec{K} \wedge \vec{p} = K \vec{p}$.

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -K_z & K_y \\ K_z & 0 & -K_x \\ -K_y & K_x & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Angle de la rotation

Dans notre article précédent, nous avons pu établir que la déviation angulaire totale Δi de la visée optique, due à la réfraction, pouvait s'exprimer des manières suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta i &= -n_A \sin i_A \int_A^B \frac{\|\overrightarrow{\text{grad } n}\|}{n^2} ds \\ &= \theta_A + \theta_B = \frac{D}{\rho} \end{aligned} \quad (13)$$

Dans lesquelles θ_A et θ sont les déviations constatées en A et en B, et ρ est le rayon de courbure de la déviation.

Hypothèses du modèle standard

• Verticalité du gradient : $\sin i_A = \pm \sin \zeta$

• Symétrie : $\theta_A = \theta_B = \frac{\Delta i}{2}$

Nouvelles hypothèses

1. $\sin i_A = \left\| \vec{v} \wedge \frac{\overrightarrow{AB}}{D} \right\|$
2. $\theta_A = (1 - \kappa) \Delta i$ et $\theta_B = \kappa \Delta i$

Si nous définissons le coefficient de réfraction k de la manière suivante :

$$k = \frac{R}{\rho \sin i_A} \quad (14)$$

Alors nous pouvons, en appliquant ce résultat et nos hypothèses à la *formule 13*, obtenir l'expression de l'angle θ_A de notre rotation de la réfraction.

$$\theta_A = (1 - \kappa) \frac{k D \sin i_A}{R} \quad (15)$$

Connaissant le vecteur (ainsi que sa matrice anti-symétrique associée K) et l'angle θ_A , nous pouvons obtenir la matrice de la rotation de la réfraction selon la *formule 16*².

$$R_K(\theta_A) = \mathbb{I} + \sin \theta_A K + (1 - \cos \theta_A) K^2 \quad (16)$$

Fort de ces définitions, appliquée à la *formule 8*, avec $\kappa=1/2$, $\alpha_n=0$ et $\zeta_n=200$ gon, ce qui équivaut aux hypothèses du modèle standard de la réfraction, nous obtenons les corrections d'azimut et d'angles zénithaux en 17 qui coïncident exactement avec les résultats démontrés dans l'article précédent. Le calcul a été effectué avec

2 https://fr.wikipedia.org/wiki/Matrice_de_rotation

le logiciel libre et open source de calcul formel *wxMaxima*³.

$$\begin{cases} \bar{\alpha} - \alpha = \Delta r = 0 \\ \text{et} \\ \bar{\zeta} - \zeta = \Delta \zeta = \frac{k d}{2R} \end{cases} \quad (17)$$

Discussion

Cette proposition de modélisation de la réfraction n'a pas pour but de décrire avec exactitude le chemin optique associé à une visée tachéométrique. Pour ce faire, il faudrait connaître les gradients de pression et de température tout le long de la visée et faire du lancé de rayon en appliquant l'équation eikonale. Nous recommandons au lecteur intéressé par cette approche de se référer au chapitre sur la réfraction astronomique dans [Guillaume, 2015].

Notre modèle permet, selon une mise en équation faisant appel à un nombre restreint de paramètres, d'exprimer le problème de la réfraction en 3D. Il est équivalent dans les cas symétriques et verticaux aux formules du nivellement trigonométrique, mais permet un début de généralisation aux cas latéraux ou asymétriques de la réfraction.

Maintenant, nous allons réfléchir aux sens physiques des paramètres κ , k , α_n et ζ_n que nous utilisons pour modéliser la réfraction.

Le coefficient de réfraction k est lié à la courbure du chemin optique. Dans notre article précédent, en *formule 11*, nous avons démontré qu'il était lié à la moyenne, pondérée par les distance, du gradient de l'indice de réfraction n le long du chemin optique.

Le vecteur $v(\alpha_n, \zeta_n)$ est un vecteur unitaire directeur assimilé ici à la direction du gradient de l'indice de réfraction n . Il est défini par l'azimut α_n et l'angle zénithal ζ_n . Nous supposons qu'il correspond à la direction moyenne du gradient de n le long du chemin optique pondérée également par les distances.

Le coefficient d'asymétrie κ est un nombre strictement compris entre 0 et 1 qui caractérise l'asymétrie de la déviation du chemin optique du fait de la réfraction. Si le chemin optique passe à proximité d'une source de perturbation

3 <https://wxmaxima-developers.github.io/wxmaxima/>



thermique, ce coefficient correspond à la position longitudinale de cette source par rapport à la visée, divisée par la longueur de cette dernière. En cas de symétrie, on a $\kappa=0.5$, ce qui traduit la présence d'un objet perturbateur au milieu de la visée ou des conditions homogènes de température et de pression tout le long de la visée. De ce fait, le barycentre est bien au milieu de la visée.

Remarque : Dans cette étude, l'anomalie locale de la réfraction est traitée de manière ponctuelle ce qui est, évidemment, une approximation. Dans d'autres cas plus généraux, cette approximation pourrait s'avérer insuffisante.

Implémentation dans un logiciel de compensation 3D

Pour mettre à l'épreuve ce modèle 3D de la réfraction, nous avons implémenté un outil d'ajustement des mesures topométriques et géodésiques à l'aide du logiciel libre et *open source* *Scilab*⁴ de calcul numérique. Dans son fonctionnement, ses fichiers d'entrées et de sortie, cet outil est très fortement inspiré du logiciel Trinet+ [Guillaume et al., 2008] de compensation 3D. Nous allons tout d'abord décrire succinctement les modèles fonctionnels implémentés.

■ Modèle fonctionnel des mesures tachéométriques

Nos formules 8 et 9 font le lien entre le vecteur, exprimé dans le repère local astronomique de notre station A, lié aux coordonnées, et nos mesures biaisées par la réfraction, en l'occurrence l'azimut α et l'angle zénithal ζ . Tout d'abord, introduisons ω , l'orientation astronomique de la station et r , la mesure brute de la direction horizontale. Nous pouvons écrire la relation suivante.

$$\alpha = \omega + r \quad (18)$$

D'où

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin r \sin \zeta \\ \cos r \sin \zeta \\ \cos \zeta \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$= R_z(\omega) \begin{bmatrix} \sin r \sin \zeta \\ \cos r \sin \zeta \\ \cos \zeta \end{bmatrix}$$

⁴ <https://www.scilab.org/>

Pour décrire plus avant le deuxième membre de la *formule 9*, nous allons devoir introduire quelques repères.

- {A} : Le repère local astronomique en A ;
- {G} : Le repère local géodésique en A ;
- {E} : Le repère cartésien géocentrique (ECEF) ;
- {T} : Le repère topocentrique, correspondant au repère local astronomique du point moyen de notre chantier.

Dès lors, nous pouvons écrire :

$$[\vec{AB}]_A = R_G^A R_E^G R_T^E [\vec{AB}]_T = R_T^A [\vec{AB}]_T \quad (20)$$

Sur les termes de cette dernière relation, dont les expressions littérales pourront être trouvées au chapitre 5 de [Duquenne et Duquenne, 2002].

- R_G^A est la matrice de changement de base pour aller du repère local géodésique au repère local astronomique. Cette matrice s'écrit en fonction des composantes est et nord de la déviation de la verticale en A, ainsi que de la latitude de A.
- R_E^G est la matrice de changement de base pour aller du repère cartésien géocentrique au repère local géodésique. Cette matrice s'écrit en fonction de la longitude et de la latitude de A.
- R_T^E est la matrice de changement de base pour aller du repère topocentrique au repère cartésien géocentrique. Elle est constante et s'exprime en fonction des coordonnées géocentriques du topocentre ainsi que de la déviation de la verticale en ce point.
- $[\vec{AB}]_T$ correspond à la différence de coordonnées locales topocentriques de A à B.

Si nous introduisons D comme étant la distance selon la pente mesurée, nous pouvons donc construire la relation suivante à partir des équations 8, 19 et 20, aux erreurs aléatoires de mesures près :

$$D \begin{bmatrix} \sin r \sin \zeta \\ \cos r \sin \zeta \\ \cos \zeta \end{bmatrix} = R_z^t(\omega) R_K^t(\theta_A) R_T^A [\vec{AB}]_T \quad (21)$$

Le membre de gauche de cette relation est uniquement lié aux mesures tachéométriques brutes. Le membre de droite, quant à lui, ne dépend que des coordonnées, des autres paramètres à ajuster, en l'occurrence les orientations et les paramètres de la réfraction, ainsi

que des éventuelles constantes telles que les composantes de la déviation de la verticale.

Nous n'allons pas expliciter en détail notre modèle fonctionnel – pour ce faire, il faudrait un article uniquement dédié à cela – néanmoins nous pouvons apporter les informations suivantes :

- contrairement à ce qu'on pourrait penser au premier abord, calculer les dérivées partielles de ce modèle n'est pas complexe – quoique fastidieux – si on considère le problème matriciellement et en le décomposant en fonctions composées élémentaires. Il s'agit alors de gérer des produits et sommes de matrices jacobiniennes faciles à calculer ;
- vu l'enchaînement de matrices de rotation, pour conserver leurs orthogonalités, celles-ci ont toutes été traitées rigoureusement, sans aucune linéarisation.

■ Paramètres de réfraction pris en charge par le logiciel

Dans l'outil que nous avons développé, nous définissons dans le fichier de mesures en entrée, au format *.csv, pour chaque visée tachéométrique, un groupe de réfraction, défini par un nombre entier, ainsi que le coefficient d'asymétrie κ . Ensuite, dans un autre fichier d'entrée au format *.xls, un onglet spécifique est dédié à la réfraction.

Dans cet onglet, chaque ligne est associée à un groupe de réfraction, pour lesquelles nous saisissons :

- le numéro du groupe ;
- l'écart-type de k , pour tenir compte du scintillement dans le modèle stochastique des mesures (cf. § 5.4 de [Touzé et Hansen, 2019]) ;
- la valeur initiale du coefficient de réfraction k ;
- l'azimut en gon du gradient de n ;
- l'angle zénithal en gon du gradient de n ;
- trois booléens pour définir si on souhaite ajuster chacun des trois paramètres précédents.

■ Ajustement 3D des expériences

Certaines des expériences décrites dans cet article ainsi que dans le précédent ont été ajustées à l'aide de notre



outil. Nous allons dans cette dernière partie exposer brièvement les résultats calculés et les comparer à ceux obtenus précédemment de manière traditionnelle. Comme ce logiciel de compensation est purement 3D, certaines expériences n'ont pas pu être traitées du fait, notamment, qu'elles n'avaient pas été pensées lors des mesures pour tenir compte de la planimétrie. D'autres expériences, calculées des deux manières, pourront être vues dans [Touzé, 2018].

Ajustement d'un réseau d'auscultation

Dans l'article [Touzé et Hansen, 2019], nous avons compensé un réseau d'auscultation d'une ligne ferroviaire à haute vitesse dans le sud de la France. Le logiciel employé alors, LTOP de Swisstopo, ne permettait pas d'ajuster la valeur du coefficient de réfraction k mais nous avons pu en trouver une valeur optimale, en l'occurrence $k = -2.12$.

Dans notre logiciel de calcul 3D, nous avons défini un unique groupe de réfraction défini de la manière suivante :

- une direction du gradient fixe et dirigée vers le nadir ($\alpha_n = 0$ et $\zeta_n = 200$ gon) ;
- un écart-type de scintillement de k à $\sigma_k = 1$;
- un coefficient de réfraction libre, de valeur initiale $\hat{k} = 0.13$;
- toutes les visées ont un coefficient d'asymétrie $\kappa = 0.5$.

L'ajustement nous met en avant les mêmes mesures suspectes que LTOP et après dépondération de ces observations, nous trouvons comme valeur ajustée de k : $\hat{k} = -2.31 \pm 0.12$. Nous pouvons constater que la valeur optimale obtenue avec LTOP appartient à l'intervalle de confiance à 95 % de cette valeur ajustée.

$$-2.12 \in [-2.55; -2.07] \quad (22)$$

La Figure 13 représente les 760 résidus normés du calcul final qui, selon un test d'adéquation du χ^2 à 95 %, coïncide significativement avec la loi normale centrée réduite.

Réfraction latérale asymétrique

Enfin, nous avons pu ajuster à l'aide de notre logiciel les mesures de l'expérience présentée dans le paragraphe

Groupe	Dist. Mur[m]	k	α_n [gon]	ζ_n [gon]	k ?	α_n ?	ζ_n ?
1	/	-2	0	200	Libre	Fixe	Fixe
2	9.5	-2	0	200	Libre	Fixe	Fixe
3	0.2	-2	0	200	Libre	Fixe	Fixe
4	0.1	5	157	100	Libre	Fixe	Libre
5	0.075	8	157	100	Libre	Fixe	Libre
6	0.05	10	157	100	Libre	Fixe	Libre
7	0.05	14	157	100	Libre	Fixe	Libre

Tableau 5. Paramètres des groupes de réfraction lors du calcul. Les effets de réfraction latérale ne sont considérés que lors des visées à moins de 10 cm du mur.

Groupe	k	s_k	α_n [gon]	s_{α} [gon]	ζ_n [gon]	s_{ζ} [gon]
1	-2.85	0.15	0	/	200	/
2	-1.20	0.39	0	/	200	/
3	-0.94	0.39	0	/	200	/
4	5.69	0.58	157	/	83.2	4.3
5	8.49	0.58	157	/	86.6	2.8
6	12.47	0.59	157	/	105.9	1.9
7	14.18	0.59	157	/	95.2	1.6

Tableau 6.

Résultat de l'ajustement des paramètres de la réfraction.

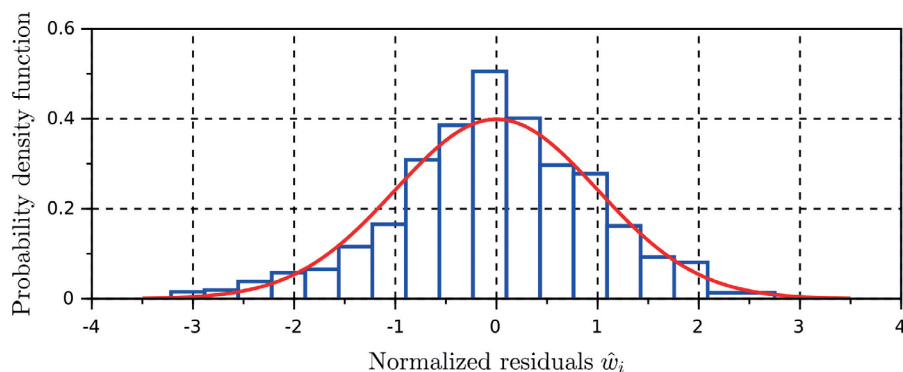


Figure 13. Histogramme des 760 résidus normés du réseau d'auscultation et densité de probabilité de la loi normale centrée réduite.

réfraction verticale. Pour ce faire nous avons défini un groupe de réfraction pour les visées de G vers D de chaque triangle. Les visées vers ou depuis O correspondent au groupe 1. La réfraction latérale ainsi que l'asymétrie ne sont

considérées que pour les visées à moins de 10 cm du mur. Dans ce cas, l'azimut du gradient de n considéré a été imposé comme étant celui de la normale au mur, en l'occurrence 187 gon. Ces informations sont récapitulées dans le Tableau 5.

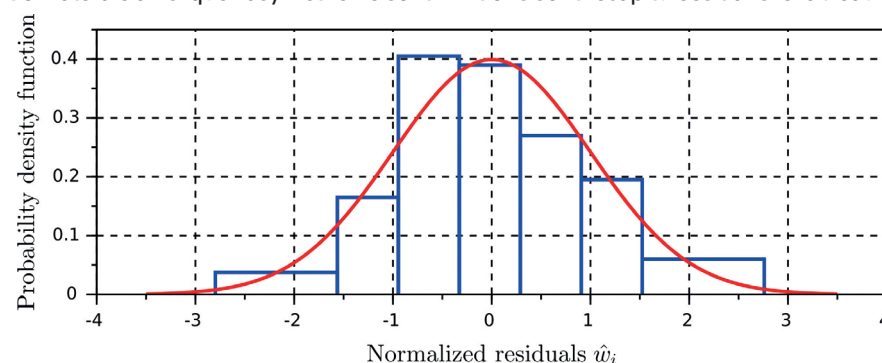


Figure 14. Histogramme des 108 résidus normés de l'expérience de la réfraction latérale et densité de probabilité de la loi normale centrée réduite.



Les résultats de l'ajustement en mode libre avec contraintes de trace minimale [Caspary, 1988] sur les points sont fournis, pour les paramètres de la réfraction, en *Tableau 6*. Les coefficients de réfraction 3D ajustés sont sensiblement identiques à ceux obtenus lors des calculs initiaux.

Pour information, cet ajustement, qui correspond pourtant à un cas extrême de réfraction, a permis d'obtenir des précisions de l'ordre de 1 mm sur tous les points et ce, sans avoir à désactiver ni même dépendre d'une seule observation. Cependant il faut noter une surabondance relativement faible (108 observations pour 63 inconnues).

En *Figure 14*, nous pouvons voir l'histogramme des résidus normés qui coïncident également significativement avec la loi normale centrée réduite.

Conclusion

Ces travaux permettent de tirer des conclusions à plusieurs niveaux.

■ Conclusions "terrain"

Tout d'abord, en nous basant sur les résultats exposés ici nous pouvons renforcer les conclusions de [Hübner, 1977] selon lesquelles, lors de journées ensoleillées avec des visées à hauteur d'homme au-dessus du sol, un coefficient de réfraction de l'ordre de -2 est nettement plus approprié que +0.13.

Ensuite, sur les cas extrêmes de réfraction latérale ou asymétrique que nous avons étudiés, nous constatons qu'à partir de 20 cm de la source de perturbation, les effets latéraux ou asymétriques sont négligeables. Bien évidemment, cette limite de 20 cm dépend de la longueur des visées (de l'ordre de 150 m dans nos expériences) et de la valeur de la perturbation thermique. Néanmoins, nous supposons que c'est un bon ordre de grandeur à avoir en tête pour le topographe sur le terrain.

■ Conclusions pour la topométrie souterraine

Nous n'avons pas exploité d'expérience de topométrie souterraine de précision. Pourtant, c'est probablement dans ce domaine que les effets latéraux ou

asymétriques de la réfraction sont les plus impactants. À défaut, nous proposons un modèle et un prototype de solution logicielle qui pourraient s'avérer utile dans ce domaine lorsque les mesures sont affectées par une source unique de perturbations thermiques. En effet, le travail que nous avons effectué, même s'il requiert plus de données pour être pleinement validé, semble capable de prendre en charge des cas extrêmes de réfraction par l'ajout de quelques paramètres supplémentaires.

■ Validation physique

Enfin, d'avant d'appliquer cette proposition de modèle, il faudrait mener de plus amples investigations composées de mesures tachéométriques et météorologiques, et confrontées à l'équation eikonale de propagation des ondes. ●

Contact

Thomas TOUZÉ
thomas.touze@edf.fr

Bibliographiques

- [Bolzon et Chevallier, 2017] Bolzon, N. et Chevallier, N. (2017). *Quantification de la réfraction latérale, Projet de semestre de Bachelor 3*. Rapport technique, HEIG-VD/EC+G.
- [Caspary, 1988] Caspary, W. (1988). *Concepts of network and deformation analysis. Rapport technique*, University of New South Wales, Australia.
- [Chevallier, 2017] Chevallier, N. (2017). *Étude en 3d de la réfraction sur des visées tachéométriques, travail de Bachelor*. Rapport technique, HEIG-VD/EC+G. <https://tb.heig-vg.ch/6154>.
- [Duquenne et Duquenne, 2002] Duquenne, F. et Duquenne, H. (2002). *Cours de géodésie, dernière révision*. ESGT. https://www.aftopo.org/download-ouvrage.php?id_ouvrage=20.
- [Guillaume, 2015] Guillaume, S. (2015). *Determination of a Precise Gravity Field for the CLIC Feasibility Studies*. Thèse de doctorat, ETHZ. <https://www.research-collection.ethz.ch/handle/20.500.11850/126895>
- [Guillaume et al., 2008] Guillaume, S., Muller, C. et Cattin, P.-H. (2008). *Trinet+, logiciel de compensation de réseaux 3D, mode d'emploi*. HEIG-VD, version 6.1 édition.
- [Hübner, 1977] Hübner, E. (1977). *Einfluss*

der terrestrischen refraction auf den laserstrahl in bodennahen luftschichten. Vermessungstechnik, 25(10).

[Touzé, 2017] Touzé, T. (2017). *Nivellement trigonométrique*. Cours de bachelor 1 de la HEIG-VD.

[Touzé, 2018] Touzé, T. (2018). *How to solve the refraction problem of long distance measurements*, In *Trimble Dimensions*. <https://trimbledimensions.com/session-info/catalog/?search=refraction#/>.

[Touzé et Hansen, 2019] Touzé, T. et Hansen, M. (2019). *N'ayez pas peur du coefficient de réfraction, première partie sur les enjeux de réfraction en nivellement trigonométrique*. XYZ n° 158, (158).

[Wilhelm, 1994] Wilhelm, W. (1994). *Die seitenrefraktion : Ein unbeliebtes thema ? oder ein thema nur für insider ?* Géomatique Suisse. <https://www.e-periodica.ch/cntmng?pid=geo-006:1994:92::747>.

ABSTRACT

Terrestrial refraction in geodesy is usually considered by introducing two contingencies: the deflection fits in the vertical plan of the sight and is symmetrical. However it is known, particularly in underground surveying, that both of those contingencies can sometimes be false. In this article, we have been studying two experiments showing lateral and asymmetrical effects of refraction by doing measurements getting closer to a wall or to a car roof during a very sunny day. From the work of [Wilhelm, 1994], we show that the asymmetrical case can be solved by adding a coefficient of asymmetry. It corresponds to the position of the thermal perturbation source along the sight. The lateral case can also be solved, but it requires, in the proposed model, to consider the problem of refraction as a 3D rotation matrix where we introduce two extra parameters in order to define the direction of the refractive index gradient. The implementation of this model in a 3D adjustment software shows very promising results, even in such extremal cases of refraction, but it requires more experiments in order to be validated.