

## Géoïde : mythe ou réalité ?

■ Françoise DUQUENNE - François L'ECU - Julien GAZEUX

Il devient dorénavant possible de déterminer la hauteur de n'importe quel sommet montagneux avec une précision centimétrique. Il suffit pour cela d'y monter avec un récepteur GNSS multifréquence, de respecter les temps d'observations et d'utiliser les méthodes de calculs précis. On peut alors atteindre ce centimètre tant désiré dans la détermination de la hauteur au-dessus d'un ellipsoïde et dans un référentiel géodésique bien précis. Pourtant dans les colonnes de la plupart des journaux (on remarquera ici que XYZ ne fait pas partie du lot) on lit souvent que l'altitude a été mesurée au centimètre près. Le passage de la hauteur au-dessus de l'ellipsoïde à l'altitude n'a rien de trivial et le centimètre est difficile à obtenir dans cette transformation même si comme on l'entend souvent il suffit d'utiliser un géoïde. Le but des lignes ci-dessous est, tout en reprenant les notions de base, de faire le point sur ce qu'on peut attendre en matière de géoïde et de conversion de hauteur en altitude.

### MOTS-CLÉS

Géoïde, quasigéoïde, EGM2008, EIGEN\_6C4, altitude, orthométrie, normale, gravimétrie, mission spatiales gravimétriques

### ■ la force de gravitation exercée par la Terre

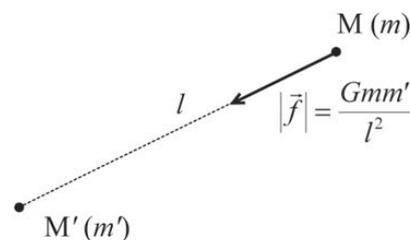


Figure 2. Force de gravitation exercée en M par M'

$G$  : constante de gravitation universelle  
 $m, m'$  : masses  
 $l$  : distance entre M et M'

Cette force ( $\vec{F} = m\vec{g}$ ) qui s'exerce sur tout point sur Terre ou dans l'espace, est la composante principale de la pesanteur. La direction du vecteur accélération de la pesanteur est la verticale et son intensité au niveau de la mer vaut environ  $9,8 \text{ m.s}^{-2}$  ( 980 gals ou  $\text{cm.s}^{-2}$ ). La gravimétrie consiste à mesurer l'intensité ( $g$ ) et l'astronomie donne l'orientation du vecteur.

Cette force dérive d'un potentiel difficile à calculer car la masse terrestre n'est pas uniformément répartie et la densité volumique  $\rho$  est variable.

$$W = G \iiint_{\text{Terre}} \frac{\rho}{l} d\tau$$

$d\tau$  : volume élémentaire de Terre dont la masse volumique  $\rho$  varie en fonction de sa position

$l$  : distance entre le point de calcul et le volume élémentaire

On appelle géoïde une surface équipotentielle particulière  $W=W_0$ . Calculer un géoïde consiste à calculer ce potentiel à partir de mesures du champ de pesanteur évoquées plus loin. Le géoïde présente des creux et des bosses qui peuvent atteindre une centaine de mètres par rapport à l'ellipsoïde.

Les équipotentielles du champ de pesanteur ne sont pas parallèles du fait principalement de l'aplatissement aux pôles et du relief de la Terre.

Dans un premier temps rappelons quelques notions fondamentales.

**La hauteur au-dessus de l'ellipsoïde** est une notion géométrique simple, il s'agit de la distance entre un point et l'ellipsoïde, comptée sur la normale à l'ellipsoïde passant par ce point. Pour être suffisante cette donnée doit s'accompagner du nom de l'ellipsoïde ainsi que de sa position par rapport à la Terre, c'est-à-dire le système géodésique sur lequel il est centré et orienté.

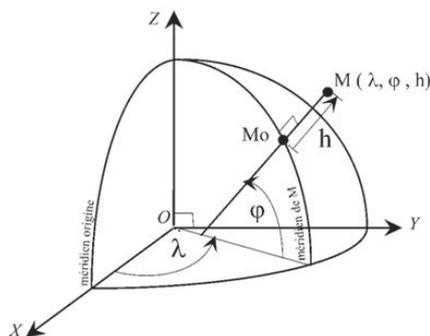


Figure 1. Système et ellipsoïde géodésique

Les marégraphes sont des instruments qui permettent de mesurer localement la hauteur de l'eau par rapport à un repère terrestre, d'en déduire une moyenne sur une période donnée en un lieu donné. Depuis les années 90 l'altimétrie par satellite permet de mesurer le niveau des océans sur toutes leurs surfaces et d'en connaître les variations avec une précision millimétrique.

Cette surface d'eau en équilibre prend alors la forme d'une équipotentielle du champ de pesanteur. De même, de manière naturelle, une étendue d'eau au repos quelconque est une surface d'altitude constante. L'altitude est donc liée au champ de pesanteur qui résulte de plusieurs forces :

### Qu'est-ce qu'une altitude ? [5]

L'altitude est une notion connue depuis beaucoup plus longtemps, qui semble simple mais ne l'est pas en réalité dès qu'il s'agit de la connaître avec une précision centimétrique.

Pour tout le monde, l'altitude c'est la hauteur au-dessus du niveau de la mer. La première question que l'on peut se poser, c'est de définir ce qu'on appelle niveau de la mer. Le niveau de la mer étant très variable, avec les vagues, les marées, on précise donc en général le niveau moyen des mers. De plus, ce niveau s'élevant d'environ 1 mm par an, on précise à quelle période il correspond.

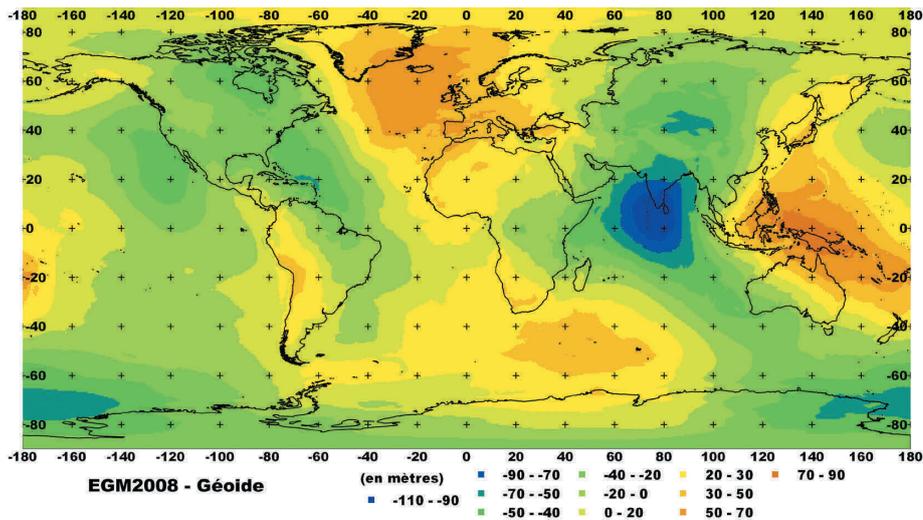


Figure 3. Géoïde

### La force axifuge due à la rotation de la Terre

Cette force dépend de la vitesse de rotation de la Terre ( $\omega$ ) et de la distance à l'axe de rotation de la Terre ( $p$ ) et ne s'applique qu'en un point tournant avec la Terre. Elle est constante dans le temps mais varie avec la latitude et l'altitude. L'intensité de l'accélération est faible environ  $0,033 \text{ ms}^{-2}$  (3,3 gals) à l'équateur au niveau de la mer.

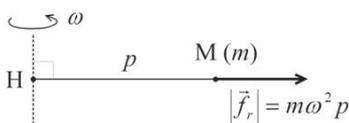


Figure 4. Force axifuge

### La force de marée due à l'attraction luni-solaire

L'attraction de la Lune et du Soleil ne s'exerce pas de la même façon en un point M à la surface et au centre de la Terre car elle dépend de la distance à l'astre, c'est ce qui engendre le phénomène de marée (océanique ou terrestre). On distingue la marée permanente, due à la présence de la lune et du soleil, et une marée périodique qui dépend des positions relatives de la Terre, de la Lune et du Soleil. L'intensité de l'accélération est faible de l'ordre de  $2,8.10^{-6} \text{ ms}^{-2}$ .

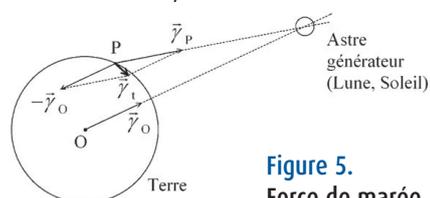


Figure 5. Force de marée

La partie variable est appliquée aux observations de gravimétrie, nivellement, GNSS en fonction de la date et l'heure. Pour la marée permanente il y a plusieurs façons de faire et on distingue 3 types de systèmes de marée.

- "mean tide" on ne tient pas compte de la marée permanente.
- "tide free" ou "non-tidal" on élimine la partie permanente de la géométrie de la Terre et du champ de pesanteur (une réduction vers un état où la lune et le soleil seraient absents). Pour être strict, le calcul de géoïde requiert l'élimination de toutes forces extérieures. Par contre, cette correction joue sur l'aplatissement de la terre qui n'est plus réaliste.
- "zero tide" c'est un compromis entre le "mean tide" et le "tide-free", on applique la correction de marée permanente sur la gravimétrie pour calculer le géoïde et on ajoute l'effet additionnel qui est causé par la déformation permanente.

La figure 6 montre que l'écart en altitude selon les corrections peut atteindre la vingtaine de centimètres.

Un champ de pesanteur normal a été introduit comme modèle mathématique du champ de pesanteur réel pour faciliter les calculs. Il est défini de la manière suivante :

- une de ses surfaces équipotentielles  $\mathcal{E}_0$  est un ellipsoïde géodésique géocentrique,
- le potentiel normal sur  $\mathcal{E}_0$  est égal au potentiel réel sur le géoïde :  $U_0 = W_0$

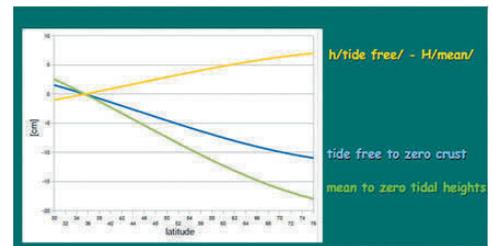


Figure 6. Ordre de grandeurs de corrections de marées

- $\mathcal{E}_0$  tourne à la même vitesse que la Terre,
- la masse du volume délimité par  $\mathcal{E}_0$  est égale à la masse de la Terre (atmosphère comprise).

La pesanteur normale est utilisée comme approximation de la pesanteur réelle, elle sert de solution approchée pour les problèmes de géodésie physique, et à la définition de certains types d'altitude.

La technique la plus simple pour déterminer une altitude à partir d'un point d'altitude connue est d'observer en nivellement géométrique, c'est-à-dire à l'aide d'un niveau, lunette dont l'axe optique est rendue horizontale, on lit sur deux mires graduées verticales, et on en déduit des dénivelées géométriques  $\delta h$  qui sont ensuite cumulées :

$$\Delta h_{AB} = \sum_A^B \delta h$$

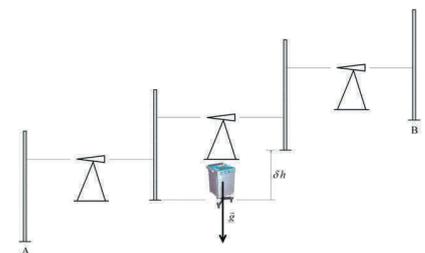


Figure 7. Le nivellement géométrique couplé à des mesures de gravimétrie

Mais les équipotentielles du champ de pesanteur ne sont pas parallèles, d'une part elles se rapprochent les unes des autres de l'équateur vers le pôle, d'autre part elles sont déformées par la présence de grosses masses (montagnes, volcans...). On se retrouve alors devant le paradoxe suivant : Imaginons que nous voulions déterminer l'altitude du point B', en faisant des mesures de nivellement géométriques à partir de A, et que l'on suive



deux chemins différents ABB' et AA'B' en creusant deux tunnels qui suivent les équipotentielle de AA' et BB'. L'altitude de A' est la même que celle de A et celle de B' est la même que celle de B. Sur les équipotentielles, le nivellement est parfaitement horizontal, donc la dénivelée est nulle. En suivant le premier chemin, la dénivelée trouvée est égale à HB, et pour le deuxième chemin elle est égale à KB'. Or ces deux distances ne sont pas égales puisque les équipotentielles ne sont pas parallèles. Cela veut dire que l'on va obtenir une altitude pour B' qui dépendra du chemin suivi.

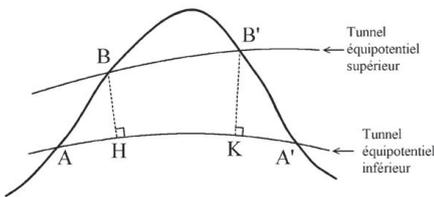


Figure 8. Nivellement géométrique : dépendance au chemin suivi

Et donc les mesures de dénivelées géométriques ne sont pas suffisantes, et on peut constater que la quantité qui est constante entre les deux équipotentielles est évidemment la différence de potentiel, c'est-à-dire

$$W_{B'} - W_A = W_B - W_A = W_{B'} - W_{A'}$$

$$= \int_A^B \vec{g} \cdot d\vec{s}$$

avec  $ds$  un déplacement élémentaire dans une direction quelconque. Or les dénivelées sont des quantités mesurées selon la verticale, c'est-à-dire dans la direction du vecteur  $g$ , mais comptées dans le sens inverse et donc on en déduit :

$$W_{B'} - W_A = - \sum_{AB} g \delta h$$

La solution est donc de faire des mesures gravimétriques pour compléter le nivellement et une altitude est donc définie par :

$$H^{(*)}(M) = - \frac{W(M) - W(A)}{\gamma^{(*)}(M)}$$

(\*) = type d'altitude (dynamique, orthométrique, normale...)

A = point fondamental (marégraphe)

$W(A) = W_0$

M = point quelconque

$W(M) - W(A)$  : différence de potentiel de

pesanteur entre l'origine et le point M.  $\gamma^{(*)}(M)$  : pesanteur moyenne entre M et la surface  $W_0$ , proche de la valeur réelle mais estimée de différentes façons. Cette définition rend l'altitude indépendante du chemin suivi lors des opérations de nivellement. En choisissant judicieusement  $\gamma^{(*)}$ , l'altitude peut être très proche de la "hauteur au-dessus du niveau de la mer". Les différents types d'altitude dépendent du choix de  $\gamma^{(*)}$

- cote géopotentielle

$$\gamma^{(G)} = 1$$

$$C(M) = W(A) - W(M)$$

$$1 \text{ UGP} = 10 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$$

En utilisant pour  $C(M)$  l'unité géopotentielle (GPU) on obtient une valeur proche de la hauteur au-dessus du géoïde à 2 % près. Ce type d'altitude est utilisé pour la compensation des réseaux scientifiques ou primordiaux. L'appellation "nombre géopotential" est quelquefois utilisée pour ce type d'altitude

- altitude dynamique

$\gamma^{(D)}$  : valeur de la pesanteur normale en un lieu défini : (exemple en France latitude 45° et hauteur = 0)

$$H^{(D)}(M) = \frac{C(M)}{\gamma^{(D)}}$$

Ce type d'altitude est proche à 0,3 % de la hauteur au-dessus du géoïde. Elle est utilisée dans les mêmes applications que la cote géopotentielle.

- altitude orthométrique

$$H^{(O)}(M) = \frac{C(M)}{\tilde{g}(M)}$$

$\gamma^{(O)} = \tilde{g}$  valeur de la pesanteur réelle entre le point M et l'équipotentielle  $W_0$ . Cette valeur ne peut pas être mesurée, seule la valeur en M peut être mesurée,

$$H^{(O)}(M) = \frac{C(M)}{\tilde{g}(M)}$$

$$H^{(O)}(M) = \frac{C(M)}{\tilde{g}(M)}$$

$$\tilde{g} = g \left( \frac{H}{2} \right) = g(M) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g}{\partial H} \right) H^{(O)}(M)$$

elle est donc calculée avec :

$\left( \frac{\partial g}{\partial H} \right)$  est la variation de  $g$  en fonction de l'altitude et n'est pas connue exactement.

Il y a plusieurs façons d'approcher cette valeur et donc pas de façon unique d'obtenir une altitude orthométrique. En utilisant la formule de Bruns on obtient des altitudes orthométriques de Helmert

$$\frac{\partial g}{\partial H} = -2gJ + 4\pi G\rho - 2\omega^2$$

J est la courbure moyenne du géoïde. La valeur de la densité volumique  $\rho$  peut être réaliste ou on prend une valeur moyenne comme dans le gradient de Poincaré-Prey qui utilise une valeur moyenne de la densité  $\rho = 2,67 \text{ g.cm}^{-3}$

$$\frac{\partial g}{\partial H} = -0,848 \times 10^{-6} \text{ s}^{-2}$$

Souvent on assimile le gradient de  $g$  au gradient de la pesanteur normale. On obtient alors une altitude orthométrique normale (c'est ce qui a été utilisé comme altitude en France pour le système Lallemand).

L'altitude orthométrique est la valeur la plus proche de la hauteur au-dessus du géoïde et est usuellement utilisée pour les réseaux de nivellement nationaux.

- altitude normale

$$H^{(N)}(M) = \frac{C(M)}{\tilde{\gamma}(M)}$$

$\tilde{\gamma}(M)$  est la valeur de la pesanteur normale pour un point de même latitude que M et de hauteur ellipsoïdale égale à la moitié de l'altitude de M.

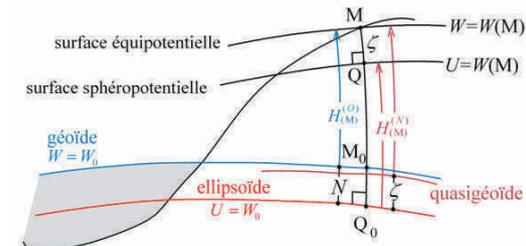


Figure 9. Altitude normale et altitude orthométrique

Explication la figure 9 :

Soit Q un point sur la verticale de M, de telle sorte qu'en ce point le potentiel normal est égal au potentiel réel en M. Lorsque le point M décrit la surface topographique, le point Q décrit une surface appelée Telluroïde.  $M_0$  et  $Q_0$  sont les intersections de la verticale de M avec respectivement le géoïde ( $W=W_0$ ), et l'ellipsoïde normal ( $E_0$ ). La courbure de la verticale est considérée comme négligeable.





$$\begin{aligned}
 H^{(N)}(M) &= \frac{W(M_0) - W(M)}{\bar{\gamma}} \\
 &= \frac{U(Q_0) - U(Q)}{\bar{\gamma}} \\
 H^{(N)}(M) &= \frac{1}{\bar{\gamma}} \int_{Q_0}^{Q_0} \gamma \, dh \\
 &= Q_0 Q = h(Q)
 \end{aligned}$$

$h(Q)$  : hauteur de Q au-dessus de l'ellipsoïde

L'écart entre les équipotentielle  $W(M)$  et  $U(Q)$  est l'anomalie d'altitude  $\zeta$ . Cette quantité est nulle si le point M est au niveau de la mer et croît avec l'altitude. En reportant l'altitude normale à partir de M, on trouve une surface, proche du géoïde, à une distance  $\zeta$ , c'est le **quasi-géoïde**.

Relation entre l'altitude normale et l'altitude orthométrique :

Soit  $N$  la hauteur du géoïde au-dessus de l'ellipsoïde

$$\begin{aligned}
 H^{(O)}(M) &= h(M) + N \\
 H^{(N)}(M) &= h(M) + \zeta \\
 H^{(O)}(M) - H^{(N)}(M) &= N - \zeta
 \end{aligned}$$

La figure 10 montre que l'écart entre altitude orthométrique et altitude normale est nulle pour un point proche de la mer, proche de 70 cm au Mont-Blanc et est supérieur à 2 mètres dans l'Himalaya. Il est donc important quand on veut donner l'altitude d'une montagne avec une précision centimétrique de préciser le type d'altitude.

Soit  $T$  le potentiel perturbateur :

$$\begin{aligned}
 T(M) &= W(M) - U(M) \\
 N &= \frac{T(M_0)}{\gamma(M_0)} \quad (\text{formule de Bruns}) \\
 \zeta &= \frac{T(M)}{\gamma(M)}
 \end{aligned}$$

On remarquera ici que seules les cotes géopotentielle et les altitudes dynamiques décrivent exactement l'écoulement de l'eau.

## Système de référence verticale (SRV)

Dans ce qui précède on a pu appréhender qu'il n'y avait pas de façon unique de définir une altitude, mais du point de vue pratique, il a fallu préciser un certain nombre de paramètres de définition au niveau des pays, puis des continents (Europe) et maintenant au niveau mondial (voir l'article page 61), et c'est ce qui constitue le système de référence vertical. Il peut être défini par

- l'origine des altitudes (à partir de mesures marégraphiques, à un moment et en un lieu),
- le type d'altitude choisi,
- les constantes liées au type d'altitude (paramètres de l'ellipsoïde normal, valeur de la constante  $\gamma^{(D)}$ )
- un modèle de géoïde ou quasi-géoïde associé,
- le niveau de corrections de marée (zero, mean, free),

- le référentiel de gravimétrie dans lequel sont données les mesures de gravimétrie.

Traditionnellement la réalisation du SRV consiste à matérialiser par un réseau de repères accessibles facilement. Ces repères sont reliés par des observations de nivellement de précision (dénivelées géométriques et gravimétrie) suivi d'un processus de calcul qui inclut une compensation. Il faut noter ici que les mesures gravimétriques ne sont pas faites sur tous les repères mais surtout sur le réseau primordial et aussi sur les ordres inférieurs en zone montagneuse. On complète ces observations en appliquant sur les dénivelées une correction orthométrique qui consiste à calculer la variation de  $g$  en fonction de la latitude et de l'altitude en prenant un modèle de pesanteur normale.

De nombreux réseaux de nivellement n'intègrent même aucune gravimétrie, et bien qu'on ait du mal à qualifier le type d'altitude obtenu, on l'assimile en général à une altitude orthométrique de précision plutôt décimétrique. En théorie, un SRV pourrait être aussi réalisé par un modèle de géoïde ou quasi-géoïde exprimé dans un système de référence terrestre géocentrique, mais comme on pourra le deviner dans la suite, se pose le problème de la résolution et de la précision d'un tel modèle.

## Qu'est-ce qu'un modèle de géoïde (ou de quasi-géoïde) ?

Un modèle de géoïde (ou quasi-géoïde) est représenté par la valeur de la hauteur du géoïde au-dessus de l'ellipsoïde (ou par l'anomalie d'altitude) en fonction des coordonnées du point de calcul. Il y a plusieurs façons de faire cette représentation

- par des harmoniques sphériques

$$f(\lambda, \theta, r) = \frac{GM}{\gamma r} \sum_{n=0}^{n_{\max}} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^n (P_{nm}(\cos \theta) (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda))$$

$n, m$ , : degré, ordre du développement  
 $f(\lambda, \theta, r) = N$  ou  $\zeta$  pour un géoïde ou un quasi-géoïde  
 $(\lambda, \theta, r)$  coordonnées sphériques du points de calcul : longitude, colatitude, distance à l'origine

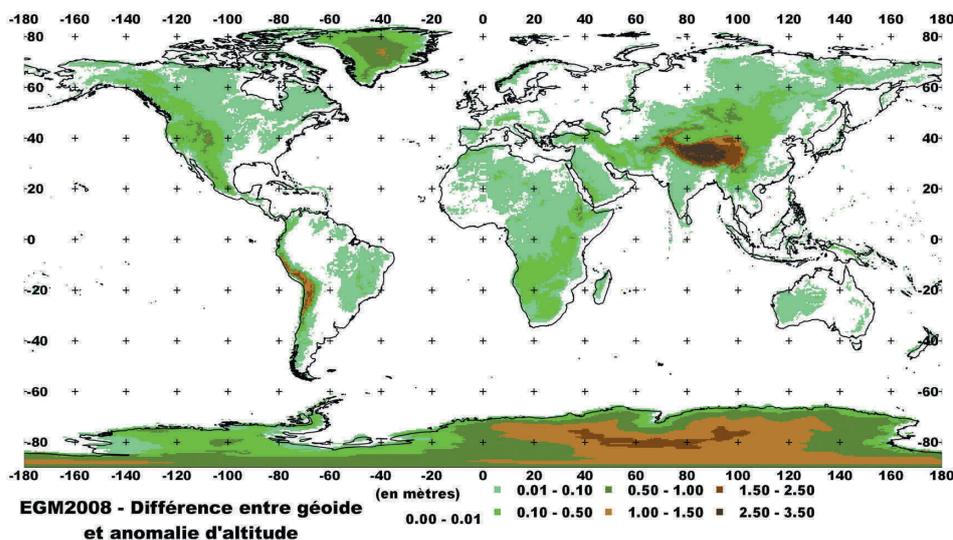


Figure 10. Différences ( $N-\zeta$ ) calculées à partir du module de calcul de l'ICGEM (icgem.gfz-postdam.de)

$a$  : rayon équatorial de la terre  
 $(C_{nm}, S_{nm})$  coefficients de Stokes  
 $P_m(\cos \theta)$  polynômes de Legendre

$$P_{1,0} = \cos \theta$$

$$P_{2,0} = \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2}$$

Pour en savoir plus le lecteur pourra lire la référence [2] téléchargeable sur le site de l'ICGEM.

Plus le degré du développement en harmoniques sphériques est élevé, plus la résolution du géoïde est grande, le tableau ci-dessous en donne un ordre de grandeur :

Degré n	Nombre de coefficients	Résolution en km
2	9	1 000
360	1 369	56
2 000	3 004 001	10

Il ne faut pas confondre résolution et précision, un géoïde précis développé à un degré faible sera peu résolu, un exemple est donné dans la *figure 11* avec le quasi-géoïde EGM2008 sur une zone en France bien pourvue en gravimétrie de surface et pour laquelle le modèle est précis. On voit qu'entre le développement à 2 190 et celui à 360 il y a des écarts entre -40 cm et +40 cm. Les développements en harmoniques sphériques sont utilisés surtout pour les géoïdes globaux.

#### - par une grille

En général il s'agit de grille en coordonnées géographiques dont le pas

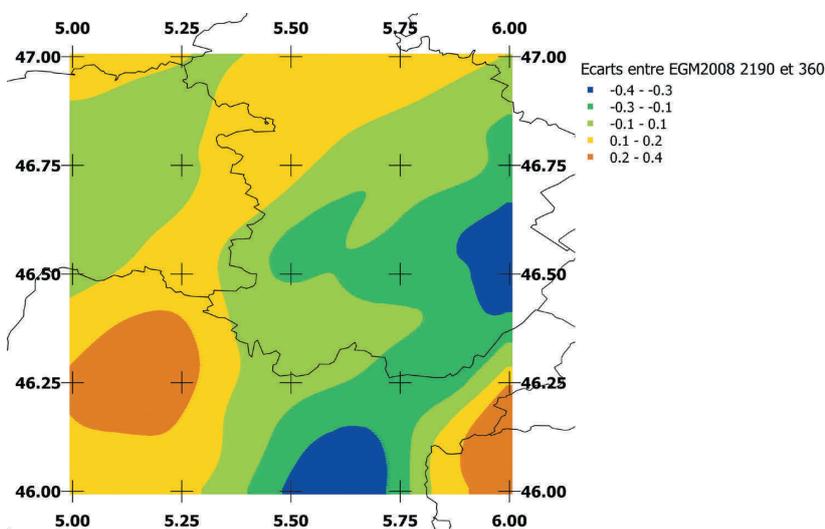


Figure 11. Écarts en mètres entre les quasi-géoïdes EGM2008 de degré 360 et de degré 2190

peut être décidé selon les besoins de représenter plus ou moins finement le modèle.

La valeur de  $N(\zeta)$  est donnée au nœud de la grille et peut être issue soit d'un développement en harmoniques sphériques d'un modèle global que l'on peut restreindre à une zone géographique, soit directement issu d'un calcul de géoïde régional.

Cette représentation est très facile d'utilisation, une interpolation bilinéaire est en général suffisante, mais pour les zones montagneuses ou si le pas est trop large, l'utilisation d'autres types d'interpolation (bicubique, splines, etc.) est conseillée.

C'est ainsi que des modèles globaux ou régionaux sont implémentés dans les logiciels, en particulier dans les récepteurs GNSS pour donner l'altitude en temps réel, dans les logiciels de calcul GNSS, ou des logiciels de transformations de coordonnées. Mais hélas on n'a pas toujours accès aux informations importantes qui impactent la précision du résultat comme le type de modèle (géoïde ou quasi-géoïde), le pas de la grille, le mode d'interpolation. C'est particulièrement le cas pour les logiciels diffusés gratuitement sur internet.

Ces deux représentations, en harmoniques sphériques ou en grilles, sont les plus utilisées dans le domaine GNSS, mais il en existe d'autres comme des développements en ondelettes ou bien des polynômes divers et variés.

## Détermination d'un modèle de géoïde (ou quasi-géoïde) [6]

On pourrait dire que toutes mesures liées au champ de pesanteur peuvent être utilisées pour déterminer un modèle, et on peut en faire un inventaire :

### ■ Déviation de la verticale : nivellement astro-géodésique

La déviation de la verticale est l'angle entre la normale à l'ellipsoïde et la verticale. On peut calculer les composantes est et nord de la déviation de la verticale

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_a - \varphi_g \\ (\lambda_a - \lambda_g) \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$\lambda_a, \varphi_a$  : longitude et latitude déterminée par astronomie

$\lambda_g, \varphi_g$  : longitude et latitude déterminée par géodésie

$$\theta_\alpha = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha$$

$\alpha$  azimut de la direction AB

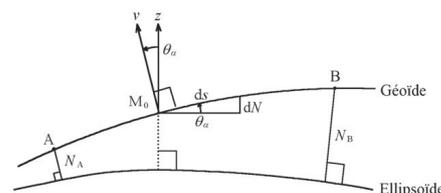


figure 12. Méthode du nivellement astro-géodésique

$$dN = -\theta_\alpha ds$$

$$N_B - N_A = \int \theta_\alpha ds$$

Cette méthode a été une des premières utilisées pour des géoïdes nationaux (en France le géoïde astro-géodésique de Levallois (1970)) et on voit qu'il s'agit d'une méthode relative qui permet de calculer la hauteur de géoïde en B à partir de A, et donc elle impose de fixer une origine arbitraire ( $N=0$ ). Par ailleurs ces modèles nationaux sont donnés dans les systèmes géodésiques nationaux (NTF pour la France) et ne sont pas compatibles. Des modèles continentaux ont aussi été calculés comme en Europe dans le système ED50.

Ce type d'observation est aujourd'hui toujours utilisé, combiné avec d'autres types observations dans certains géoïdes nationaux très précis (en Autriche par exemple).

## ■ Couplage GNSS et nivellement

Les mesures GNSS donnent la hauteur au-dessus de l'ellipsoïde et le nivellement donne l'altitude. En opérant ces deux types de mesure sur le même point on peut déterminer soit une hauteur de géoïde, soit une anomalie d'altitude selon que l'altitude est orthométrique ou normale.

Les observations de ces deux types doivent se faire dans les meilleures conditions :

- Nivellement de précision rattaché au SRV
- Mesures GNSS en méthode statique géodésique, avec rattachement précis au système géodésique.

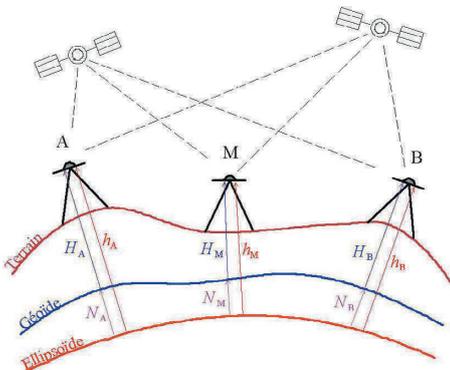


Figure 13. Couplage de mesure GNSS et nivellement de précision

## ■ La gravimétrie de surface

Il s'agit de mesurer l'intensité de la pesanteur ( $g$ ) sur l'écorce terrestre, en bateau, ou en avion très proche de la surface topographique avec des gravimètres relatifs ou absolus. On peut estimer pour ces mesures une précision de quelques milligals, même si maintenant on arrive à descendre dans certains cas en dessous du milligal.

Depuis les années 60 le BGI (bureau gravimétrique international) a récolté et validé des millions de mesures qui sont gérées et diffusées grâce à une base de données. Ces données même anciennes sont toujours utilisées pour des calculs de géoïde dans le monde entier. A la fin des années 90, après les premiers calculs de géoïdes nationaux ultra-précis de nombreux pays ont voulu densifier ou améliorer leur gravimétrie en particulier avec de la gravimétrie aéroportée, comme continuent encore à faire certains grands pays (Canada, Etats-Unis...).



Figure 14. Gravimètre absolu A10

L'arrivée récente de gravimètres absolus (à chute de coin cube) de terrain, a amélioré la mise en référence gravimétrique. Actuellement, le développement de gravimètres à atomes froids fait miroiter la perspective de mesure absolue dans des mobiles, ce qui est une amélioration considérable pour la gravimétrie marine, qui devait jusqu'alors subir la dérive des gravimètres relatifs et ne pouvait se rattacher qu'au départ et à l'arrivée d'une croisière.

## ■ Perturbation d'orbite de satellite

Le mouvement d'un satellite autour de la Terre dépend principalement du champ de pesanteur. Si la Terre était une boule isolée de densité constante, la trajectoire du satellite serait une ellipse, c'est-à-dire une orbite képlérienne. Cette orbite est perturbée par les irrégularités du champ de pesanteur. La mesure laser de distances entre des stations au sol et le satellite permet d'obtenir une orbite observée, qui comparée à une orbite calculée avec un champ de pesanteur approché (développé à un degré  $p$ ), met en évidence les écarts dus aux termes non pris en compte par le modèle approché, ce qui permet de l'améliorer en calculant des termes  $C_{nm}$  et  $S_{nm}$  complémentaires du développement en harmoniques sphériques.

Cette méthode a été utilisée dès la mise en orbite de Spoutnik (1957) qui a donné le premier terme  $C_{2,0}$  (dû à



Figure 15. Lageos

l'aplatissement de la Terre) observé par géodésie spatiale. Par la suite des satellites dédiés à l'étude du champ de pesanteur ont été lancés.

Les premiers sont de petits satellites d'une vingtaine de centimètres de diamètre, couverts de réflecteurs sur lesquels on procède à des tirs laser à partir du sol : Starlette (lancé par le CNES en février 1975 à environ 800 km d'altitude), Lageos 1 (lancé par la NASA en mai 1976 à environ 6000 km), LAGEOS 2 (lancé par la NASA en octobre 1992 à environ 6000 km) et Stella (lancé par le CNES en septembre 1993 à environ 1000 km). Ces petits satellites relativement bas, neutres électromagnétiquement, sont très sensibles aux perturbations du champ de pesanteur.

**Champ** - Ce satellite est lancé par le GFZ (GeoForschungsZentrum) en juillet 2000 à une altitude d'environ 500 km et est retombé sur Terre en septembre 2010. L'objectif de ce satellite est l'étude du champ magnétique, du champ de pesanteur et de l'atmosphère. Des accéléromètres et un récepteur GPS sont embarqués d'une part pour mesurer les accélérations non gravitationnelles, et d'autre part restituer l'orbite réelle.



Figure 16. satellite CHAMP (GFZ)

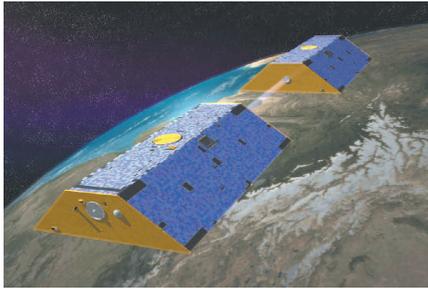


Figure 17. Les deux satellites de la mission Grace

**Grace** (*Gravimetry recovery and climate experiment*), mission lancée par la NASA en mars 2002 avec deux satellites distants d'environ 220 km à une altitude d'environ 500 km, et qui sont toujours en orbite. Le but de cette mission est l'étude des variations du champ due aux phénomènes naturels (fonte des glaces, séismes, tsunamis, inondations, sécheresse, moussons, El Niño...). Des mesures laser donnent la vitesse relative entre les deux satellites avec une précision de l'ordre du micron par seconde, un réflecteur laser permet de faire des tirs au laser à partir du sol et des accéléromètres mesurent les accélérations non gravitationnelles.

**Gradiométrie** - Le satellite Goce lancé par l'ESA en mars 2009 à une altitude basse (260 km) est retombé sur Terre en 2013. Un gradiomètre embarqué très précis mesure des différences d'accélération à l'intérieur du satellite. Un récepteur GPS et un réflecteur permettent de positionner le satellite.

### ■ Altimétrie par satellite

La NASA et le CNES mettent en orbite à 1300 km d'altitude, les satellites TOPEX POSEIDON en 1992, JASON 1 en 2001, Jason 2 en 2008 et Jason 3 en 2016. L'objectif de ces satellites est de mesurer le niveau de la mer.



Figure 18. Goce (ESA)

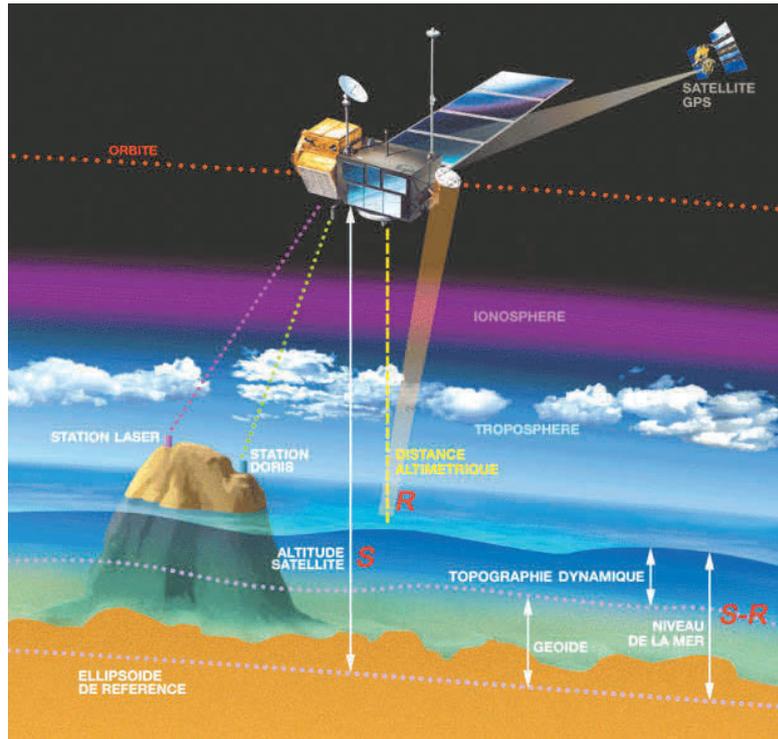


Figure 19. Altimétrie par satellite (CNES)

Le principe de l'altimétrie par satellite consiste à mesurer la hauteur instantanée de la mer dans un système géodésique et par rapport à l'ellipsoïde. Un radiomètre embarqué sur le satellite envoie une onde qui se réfléchit sur l'eau, et permet de déterminer la distance entre le satellite et la mer. L'orbite du satellite est déterminée très précisément grâce à un récepteur GPS et un récepteur DORIS à bord ainsi qu'un réflecteur qui permet des tirs laser à partir du sol. Ce qui est déterminé c'est la surface de la mer, qui présente un petit relief par rapport au géoïde (circulation océanique). Des observations altimétriques sont déduites des anomalies gravimétriques qui couplées à la gravimétrie marine permettent de calculer le géoïde sur les océans.

Les mesures satellitaires permettent de déterminer les grandes longueurs d'ondes (supérieures à 100 km) du modèle de géoïde, tandis que les détails à courtes longueurs d'ondes sont fournis par la gravimétrie de surface ou par le GNSS couplé au nivellement.

### Les modèles de géoïde globaux

Il existe de nombreux modèles globaux, l'*International Center for Global Earth Models* (ICGEM) en répertorie et diffuse 158 depuis le premier en 1966 (Figure 20). Cependant dans notre contexte de précision seuls les modèles à haute définition nous intéressent, et nous nous contenterons du modèle EGM2008, et EIGEN-6C4 développés

Nr	Model $\uparrow$	Year $\uparrow$	Degree $\downarrow$	Data $\uparrow$	Reference $\uparrow$	download	calculate
152	GECO	2015	2190	S(Goce),EGM2008	Gilardoni et al, 2015	<a href="#">gfc zip</a>	<a href="#">calculate</a>
148	EIGEN-6C4	2014	2190	S(Goce,Grace,Lageos),G,A	Förste et al, 2015	<a href="#">gfc zip</a>	<a href="#">calculate</a>
104	EGM2008	2008	2190	S(Grace),G,A	Pavlis et al, 2008	<a href="#">gfc zip</a>	<a href="#">calculate</a>
139	EIGEN-6C3stat	2014	1949	S(Goce,Grace,Lageos),G,A	Förste et al, 2012	<a href="#">gfc zip</a>	<a href="#">calculate</a>
131	EIGEN-6C2	2012	1949	S(Goce,Grace,Lageos),G,A	Förste et al, 2012	<a href="#">gfc zip</a>	<a href="#">calculate</a>
125	EIGEN-6C	2011	1420	S(Goce,Grace,Lageos),G,A	Förste et al, 2011	<a href="#">gfc zip</a>	<a href="#">calculate</a>
154	GOCO05c	2016	720	S,G,A (see model)	Pail, et al. 2016	<a href="#">gfc zip</a>	<a href="#">calculate</a>
153	GGM05C	2016	360	S(Grace,Goce),G,A	Ries et al, 2016	<a href="#">gfc zip</a>	<a href="#">calculate</a>
126	GIF48	2011	360	S(Grace),G,A	Ries et al, 2011	<a href="#">gfc zip</a>	<a href="#">calculate</a>
109	GGM03C	2009	360	S(Grace),G,A	Tapley et al, 2007	<a href="#">gfc zip</a>	<a href="#">calculate</a>
105	EIGEN-5C	2008	360	S(Grace,Lageos),G,A	Förste et al, 2008	<a href="#">gfc zip</a>	<a href="#">calculate</a>

Figure 20. Extrait de la table de modèles de géoïde globaux (ICGEM) classés par degré du développement en harmonique sphérique



au degré 2190. L'ICGEM offre la possibilité de télécharger les coefficients des harmoniques sphériques mais aussi dans son module de calcul de confectionner des grilles de géoïde, ou de quasi-géoïde, sur une zone donnée en coordonnées géographiques, et avec un pas que l'on peut choisir. La colonne Data précise le type de données qui ont servi dans le calcul S (satellite), G (gravimétrie de surface), A (altimétrie).

**EGM2008** est l'aboutissement d'une série de modèles calculés par des universitaires Américains commencé en 1968 dont les plus connus sont OSU91 (R.H Rapp), puis EGM96 (N.Pavlis), EGM2008 (N.Pavlis). Ces modèles qui sont de plus en plus précis et résolus, en particulier en intégrant de plus en plus de données satellitaires ou de gravimétrie de surface. EGM2008 a été calculé à partir du modèle satellitaire IT-Grace03 (degré 180) et combiné avec des millions de mesures de gravité de surface représentées sur une grille de pas 5' d'anomalies de gravité à l'air libre. Le modèle de terrain mondial utilisé est le SRTM (*Shuttle Radar Topography Mission*). L'altimétrie a permis de générer un modèle de surface océanique (*Dynamique Ocean Topographic Model*).[9].

EGM2008 est largement diffusé en particulier sur internet et utilisé par de nombreux logiciels. Cependant il se peut qu'on trouve des différences entre ces variantes, car derrière le nom EGM2008, il peut y avoir différentes réalisations, en particulier il existe en géoïde ou quasi-géoïde, il peut être développé au degré 360 ou 2190, mais aussi il existe des grilles avec des pas différents. Malheureusement les logiciels, en particulier ceux qui sont gratuits, ne précisent en général pas ce qu'ils utilisent et il est conseillé de vérifier ces logiciels avec le calcul du site web <http://earth-info.nga.mil/>.

EIGEN-6C4, calculé par l'ESA, est quant à lui l'aboutissement de géoïdes calculés par les européens, plutôt orientés pour les calculs de trajectographie et donc de degré peu élevé. Ce modèle bénéficie des observations de 25 ans le LAGEOS (1/2), 9 ans de Grace et 4 ans de GOCE. Il a été déve-

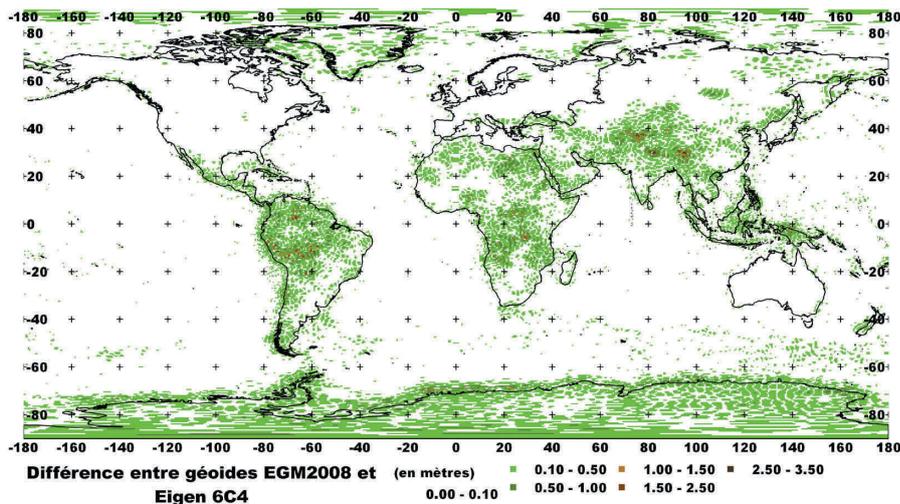


Figure 21. Différence entre les géoïdes EGM2008 et EIGEN6C4.

loppé au degré 2190 en utilisant la gravimétrie de surface et du DOTM de EGM2008.[7]

La figure 21 visualise la différence entre ces deux modèles de géoïde. Dans les zones blanches ces deux géoïdes sont quasiment confondus et cela correspond à des zones où la gravimétrie de surface est abondante. Dans les zones vertes, les différences peuvent atteindre le mètre et dans les zones montagneuses elles peuvent dépasser 2 mètres. Il semble que cette différence vienne de l'apport de GOCE dans

EIGEN sur les zones à gravité de surface presque inexistante (ou non diffusée). Contrairement à EGM2008, les différentes variantes de EIGEN portent des noms différents (ex. : EIGEN-6C4, EIGEN-6C3stat...).

Ces deux modèles sont donnés *tide free*, dans le système WGS84 pour le premier et ITRF pour le second.

Pour évaluer la précision de ces modèles globaux on peut les comparer sur des points GPS nivelés. Le tableau ci-dessous répertorie quelques jeux

N° jeu test	Zone	Nombre de points	Ecart moy.(m)	Ecart Min.(m)	Ecart Max.(m)	Ecart type(m)	Réf.
1	USA	6169	0,248	NC	NC		ICGEM
2	Canada	2691	0,128	NC	NC		ICGEM
3	Europe	1014	0,125	NC	NC		ICGEM
4	Australie	201	0,217	NC	NC		ICGEM
5	Japon	816	0,083	NC	NC		ICGEM
6	Brésil	1112	0,460	NC	NC		ICGEM
7	Arabie Saoudite	5187	0,536	-3,788	+2,435	0,258	[1]
8	Corée du Sud	500	0,096	-0,52	+1,43	0,185	[8]
9	Inde (Sud)	61	0,20	-0,22	+0,91	0,42	[10]
10	Sri-Lanka	207	-1,760	-2,465	-0,991	0,284	[2]
11	France	7869	-0,228	-0,507	-0,009	0,069	IGN
12	Guyanne	59	0,305	-0,143	0,575	0,173	IGN
13	Guadeloupe	38	0,780	0,642	1,041	0,072	IGN
14	Martinique	46	0,730	0,531	1,037	0,110	IGN
15	La Réunion	93	1,324	0,575	1,672	0,202	IGN
16	Sénégal	214	0,540	-0,286	0,653	0,076	IGN
17	Soudan	595	0,790	-0,018	1,618	0,276	IGN

Tableau 1. Comparaison de EGM2008 avec des points GPS nivelés



tests soit trouvés dans des articles publiés, soit calculés pour cet article par François l'Écu (IGN) sur des zones d'intervention de l'IGN.

On remarque que les sources différentes de données n'ont pas permis de sortir les mêmes paramètres de comparaison. La moyenne est parfois une moyenne quadratique, ou une moyenne arithmétique sans qu'on ait pu le savoir dans la référence. L'écart-type est plus significatif pour indiquer la précision mais rarement donnée. Pour la France le jeu de point est celui présenté *page 50 figure 2*, qui ne couvre pas toute la France, en particulier pas les Alpes qui pourraient donner des écarts plus forts.

Faisons une analyse de ces écarts :

- Dans les zones bien couvertes en gravimétrie de surface (jeux 2,3,5) les écarts sont proches du décimètre, même si comme en France ils peuvent atteindre 50 cm. Pour les autres les écarts peuvent dépasser le mètre. Ceci confirme que EGM2008 n'a pas la même précision partout.
  - En GPS nivelé la quantité calculée dépend de la référence Géodésique (GPS) et de la référence verticale du nivellement. Or ces références ne sont en général pas les mêmes que celles du modèle de géoïde. Le marégraphe qui définit le zéro des altitudes ne correspond pas au  $W_0$  du modèle. Exemple en France : au marégraphe de Marseille, l'altitude IGN69 zéro est 66 cm au-dessus du modèle EGM2008.
- On peut aussi remarquer ici que tous les marégraphes n'ont pas leur zéro sur la même équipotentielle mais aussi que tous les modèles de géoïde n'utilisent pas tous le même  $W_0$ .
- Le système géodésique lui non plus n'est pas le même, et même si de nombreux pays disent travailler en WGS84, on sait qu'en fait chaque pays a une réalisation géodésique nationale WGS84 qui peut être très différente du WGS84 d'EGM2008. (jeux 10,13,14,15)
  - Il existe des systématismes dans la réalisation du SRV (exemple en France la pente nord-sud), dans le modèle, même si l'apport des satellites depuis 2000 a bien amélioré

Zone	a (m)	b (m/100 km)	c (m/100 km)	Résidu min (m)	Résidu max (m)	Écart type (m)
France	-0,228	-0,035	-0,014	-0,133	-0,322	0,069
Guyane	0,304	0,208	0,169	-0,245	0,425	0,163
Guadeloupe	0,780	-0,025	-0,029	-0,264	0,140	0,075
Martinique	0,730	-0,153	-0,024	-0,328	0,197	0,112
Réunion	1,324	-0,363	0,031	-0,263	0,787	0,197
Sénégal	0,540	0,037	0,016	-0,094	0,818	0,074
Soudan	0,790	-0,024	0,006	-0,799	0,867	0,267

Tableau 2. Calcul d'une tendance (données et calculs IGN)

- les déterminations des grandes longueurs d'ondes du champ mais aussi dans la position du géoïde dans le système géodésique associé.
- Comme cela a été mis en évidence pour la France, EGM2008 est moins précis en montagne du fait de l'imprécision du MNT utilisé (SRTM).
- Enfin toutes les observations de nivellement, GPS, gravimétrie sont entachées d'erreurs accidentelles et donc ont une précision et une exactitude propre.

En calculant une tendance on obtient un modèle simple de ces différentes erreurs

$$\zeta_{GPS-niv,i} - \zeta_{EGM2008,i} = a + b(\varphi_i - \varphi_0) + c(\lambda_i - \lambda_0)\cos\varphi + v_i$$

- $i$  : indice du point GPS nivelé
- $a, b, c$  modélisent les erreurs systématiques
- $v_i$  : résidus

Pour la France on retrouve bien dans le coefficient b, le biais nord-sud bien connu de IGN69 et confirmé récemment par le nivellement scientifique NIREF. Le biais est-ouest qui apparaît par contre n'a pas été confirmé par NIREF et viendrait plutôt d'un biais de EGM2008 dans les grandes longueurs d'ondes. Cela se voit moins sur les zones plus petites.

En appliquant cette tendance et en répartissant les résidus, on obtient un modèle de géoïde adapté aux références nationales, et une grille de conversion de hauteur en altitude qui selon l'endroit peut être décimétrique.

## Les modèles régionaux

Dès les années 90, de nombreux pays commencent à calculer des géoïdes gravimétriques nationaux ultra précis. Le principe consiste à partir d'un géoïde global (à ce moment-là c'était OSU91), à l'améliorer avec toutes les données gravimétriques disponibles. Les premières comparaisons faites alors sur des points GNSS nivelés montrent des insuffisances sur le modèle de champ, les données gravimétriques, les hauteurs ellipsoïdales. D'autre part le modèle numérique de terrain utilisé pour les calculs de correction de terrain n'est souvent pas assez précis. Il s'ensuit de campagnes de mesures gravimétriques de surface (particulièrement aéroportées), des mesures de points GNSS nivelés plus systématiques, des améliorations des premiers termes des modèles globaux par des lancements de missions satellitaires et amélioration des modèles numériques de terrain (lidar).

EGM2008 profitera de toute cette gravimétrie nouvelle, mise à disposition au BGI, pour l'établissement du développement au degré 2190.

Dans les pays disposant d'une infrastructure de nivellement dense et précise (c'est le cas général en Europe), le modèle de géoïde national est adapté aux références nationales par combinaison avec des points GNSS nivelés.

Des grilles de conversion de hauteurs en altitudes sont calculées et permettent de faire des déterminations d'altitudes



avec une précision de quelques centimètres par GNSS.

En France la première grille a été RAF98, suivie de RAF09 que l'on a déjà évoqué dans XYZ (voir [4]), François L'Écu fait le point sur l'avancement de la future grille dont la précision sera meilleure que le centimètre sur 90 % du territoire (voir page 49).

Dans les pays qui ne disposent pas d'infrastructure de référence verticale suffisamment précise et dense, une nouvelle référence verticale est créée à base du modèle de géoïde national. C'est ce qui est en cours de réalisation aux Etats-Unis et au Canada. Ça pourrait être aussi une solution pour l'Afrique, l'Amérique du Sud et d'autres pays en Asie, à condition de procéder à des campagnes d'observations de gravimétrie aéroportée.

Dans ce numéro, l'article de Jean-Louis Carme et Xavier Wanner expose page 52 les méthodes de détermination pratique de modèle de géoïde régional.

## Conclusion

Le géoïde n'est qu'une abstraction, que l'on réalise par différents modèles dont la précision est très variable. Les grilles de conversion de hauteurs en altitudes sont issues de calculs de géoïdes ou quasi-géoïdes régionaux ultra-précis combinés à des points GPS nivelés et peuvent être très précises. Cependant en montagne même les grilles les plus précises n'atteignent que quelques centimètres de précision. Dans les autres zones l'adaptation de géoïdes globaux à des points GPS nivelés peut fournir une conversion décimétrique, mais malheureusement on peut remarquer ici qu'en montagne la précision est moindre par manque de gravimétrie de surface disponible pour EGM2008, ainsi que par manque de points GPS nivelés.

Dans les zones où seuls existent des modèles globaux, on doit s'attendre à avoir en montagne une altitude avec une précision de quelques décimètres à plusieurs mètres.

Certains voudraient préconiser de remplacer l'altitude par la hauteur mais l'altitude est toujours nécessaire aux travaux de génie civil liés à l'écoulement de l'eau, on ne peut pas accepter que les égouts coulent dans le mauvais sens où que les flaques d'eau s'accumulent sur les autoroutes ? Par contre, quand on veut mettre en évidence des mouvements verticaux, les mesures GNSS donnant la hauteur sont plus efficaces.

On peut conclure que l'altitude d'aucune montagne n'est connue au centimètre, mais est-ce si grave, quand le moindre caillou qu'on peut rencontrer au sommet a une taille plus grande que le centimètre. ●

## Bibliographie

- [1] Alothman, Gruber T., and Bouman J. - *Evaluation of Height System Biases for Regional Levelling Network in Saudi Arabia Using EGM08 and GOCE Models*, EGU, General Assembly 2013, Vienne, Autriche
- [2] Abeyratne, P.G.V. and Featherstone, W.E and Tantrigoda - D.A. 2009. *Assessment of EGM2008 over Sri Lanka, an area where 'fill-in' data were used in EGM2008* - Newton's Bulletin. 4.
- [3] Barthelmes Franz - *Definition of functions of the Geopotential and their calculation from spherical Harmonic Models-Scientific Technical Report STR09/02*, Janvier 2013, Helmholz Gemeinschaft
- [4] Duquenne F., Coulomb A., L'Écu F. *La démarche française de modernisation de la référence verticale* - XYZ n°143, p21
- [5] Duquenne H.- *Altitudes, nivellement, systèmes de référence altimétrique* - cours au Mastère "Photogrammétrie positionnement mesures de déformations" - ENSG-2008
- [6] Duquenne H.- *La modélisation du géoïde à haute résolution* - cours au Mastère "Photogrammétrie positionnement mesures de déformations" - ENSG-2008
- [7] Förste Ch. et al., *EIGEN-6C4-The latest combined global gravity field model including GOCE data up to degree and order 2190 of GFZ Potsdam and GRGS Toulouse*- EGU, Vienne, Autriche, 12-17 avril 2015

[8] Jekeli C. et al. - *Evaluation of EGM08 - Globally and Locally in South Korea- Ohio State University (Columbus-USA) - University of Séoul (Corée)*

[9] Pavlis N.K. et al. - *The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008)*-JGR, VOL. 117, B04406, doi:10.1029/2011JB008916, 2012

[10] Srinivas N. et al. - *Gravimetric geoid of a part of south India* - J. Earth Syst sci 121, n°4, Aout 2012

## Contacts

### Françoise DUQUENNE

Présidente de l'AFT,  
contact.fduquenne@gmail.com

### François L'ÉCU

Chef de département, service de la géodésie et du nivellement -IGN  
francois.l-ecu@ign.fr

### Julien GAZEUX

Ingénieur au service de la géodésie et du nivellement  
IGN julien.gazeaux@ign.fr

## ABSTRACT

*It is nowadays possible to assess the height of any mountain summit with centimetre accuracy. One just has to climb to the summit with a multifrequency GNSS receiver, respect the observation periods and use precise calculation methods. It is then possible to reach that centimetre, so desired in the assessment of the height above an ellipsoid and in a very precise geodetic reference. In most newspapers columns however (excluding XYZ) one can often read that altitude has been calculated with centimetre accuracy. The conversion from height above the ellipsoid to altitude is not trivial and the centimetre is difficult to obtain in that transformation even if, one can often read that it only needs the use of a geoid. While reviewing the basic notions about altitude, this article states what can be expected regarding accuracy and converting height into altitude.*