



# N'ayez pas peur du coefficient de réfraction !

## Première partie sur les enjeux de réfraction en nivellement trigonométrique

■ Thomas TOUZÉ - Matthieu HANSEN

*Tout géomètre sait que ses visées optiques sont déviées du fait de la réfraction et qu'un modèle est utilisable pour le nivellement trigonométrique. Ce modèle est issu de la loi de Snell-Descartes à laquelle sont ajoutées quelques hypothèses qui sont tout à fait raisonnables lorsque les effets thermiques du sol sont négligeables. Ainsi, on introduit le coefficient de réfraction  $k$  qui pour des visées hautes au-dessus du sol, doit tendre vers 0.13. La validité de ce modèle pour des visées proches du sol est en revanche mal connue, de même que l'ordre de grandeur du coefficient de réfraction  $k$ . Pourtant, c'est proche du sol que nous mesurons. Dans ce premier article d'une série de deux, nous allons nous baser sur la littérature et des expériences pour tenter de répondre à ces deux questions. Les visées réciproques simultanées, en plus d'une manière d'obtenir des dénivelées justes, seront vues comme un moyen d'estimer  $k$ . Nous proposerons une méthode pour compenser un réseau d'auscultation en estimant au mieux les paramètres de réfraction. Pour ce faire, il sera nécessaire de considérer les effets de scintillement dus à la réfraction dans le modèle stochastique des angles zénithaux.*

### ■ MOTS-CLÉS

Coefficient de réfraction, nivellement trigonométrique, visées réciproques simultanées, techniques terrestres de la géodésie, ajustement par la méthode des moindres carrés.

tant d'adapter les modèles fonctionnels et stochastiques aux conditions réelles de réfraction rencontrées lors des mesures. Pire, des discussions avec plusieurs ingénieurs géomètres français et suisses laissent à penser que les professionnels, par manque de maîtrise des ordres de grandeur de  $k$ , hésitent à en modifier le paramétrage par défaut (d'où le titre de l'article).

Enfin, il est également connu que les mesures tachéométriques peuvent souffrir de cas de réfraction latérale – typiquement en topométrie souterraine dans des tunnels – ou que la réfraction peut ne pas être symétrique. Toutefois, la littérature est peu fournie pour aider les géomètres à traiter des données affectées de ces cas.

Cet article est le premier d'une série de deux dans laquelle nous allons exposer nos travaux et expériences sur la réfraction en tachéométrie. Cette première partie va se focaliser sur le modèle usuel dans le plan vertical de la visée. Après un rapide état de l'art, dont le but est d'en mettre en lumière les hypothèses simplificatrices, nous discuterons de l'ordre de grandeur des variations possibles de  $k$ . Ensuite nous traiterons deux cas réels dans le but de proposer une méthodologie que nous espérons utile aux géomètres.

### État de l'art de la réfraction

Dans cette partie, nous allons reconstruire, en partant de la loi de Snell-Descartes, la modélisation classique en topométrie de la réfraction via le coefficient de réfraction  $k$ . Les objectifs sont ici, d'une part, de mettre en avant les hypothèses sous-jacentes à ce modèle

### Notations

Dans cet article, nous respectons les conventions suisses de notation des mesures tachéométriques. Dans les formules, les longueurs seront exprimées par défaut en mètres et les angles en radians. Nous désignerons par les lettres suivantes :

- $r$  : les directions horizontales ;
- $\zeta$  : les angles zénithaux ;
- $d$  &  $D$  : les distances respectivement horizontales et inclinées ;
- $l$  &  $S$  : les hauteurs respectivement d'instrument et de prisme ;
- $h'$  : la dénivelée brute ;
- $h$  : la dénivelée corrigée du niveau apparent ;
- $R$  : le rayon de la Terre ;
- $n$  : l'indice de réfraction ;
- $k$  : le coefficient de réfraction.

### Introduction

La réfraction est le phénomène physique qui, du fait des variations de pression et de température le long de nos visées, dévie ces dernières de la droite euclidienne. Cet effet est bien connu des géomètres d'autant qu'un modèle simple, faisant appel au coefficient de réfraction  $k$ , existe pour le traitement du nivellement trigonométrique ; la difficulté, cependant, réside dans le fait d'en connaître la valeur. S'il existe une valeur de référence de  $k$ , son domaine de validité est bien moins connu, de même que ses ordres de grandeur pour des visées proches du sol.

De plus, lorsqu'il s'agit de compenser des données tachéométriques, dans un contexte d'auscultation par exemple, il n'existe pas de méthodologie permet-





et, d'autre part, de discuter des ordres de grandeurs et de la variabilité de ce coefficient. Nous terminerons par un rapide état des lieux des méthodes susceptibles de déterminer la valeur de  $k$ .

**Loi de Snell-Descartes**

Si un rayon lumineux passe au travers d'un dioptre séparant deux milieux de réfringences différentes, dont les indices de réfraction sont respectivement  $n_1$  et  $n_2$ , alors les angles  $i_1$  et  $i_2$  définissant les faisceaux incidents et émergents par rapport à la normale au dioptre sont liés par la loi de Snell-Descartes, selon la relation 1. Cette loi peut être illustrée par la figure 1.



Figure 1. Représentation de la loi de Snell-Descartes dans le cas discret. Le chemin optique est dévié par la traversée de trois milieux - l'air, le verre et l'eau - dont les réfringences sont nettement différentes. [https://fr.wikipedia.org/wiki/Réfraction]

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \iff n \sin i = \text{cste} \quad (1)$$

Cette formulation est valable dans le cas d'un brusque changement de milieu. Lorsque le changement d'indice de réfraction  $n$  se fait de manière continue, il est possible, par la différentielle totale de la formule 1, d'exprimer la variation élémentaire  $\delta i$  de l'angle en fonction de celle de l'indice de réfraction, notée  $\delta n$ . On obtient ainsi la loi de Snell-Descartes dans le cas continu (cf. figure 2 et équation 2).

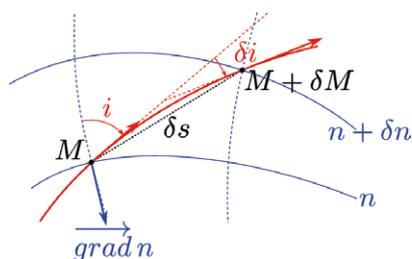


Figure 2. Vue schématique de la loi de Snell-Descartes dans le cas continu.

$$\delta i = -\frac{\tan i}{n} \delta n \quad (2)$$

Or la variation  $\delta n$  de l'indice de réfraction est liée au gradient de  $n$  le long de la section  $\delta M$  du chemin optique, de longueur  $\delta s$ . On a ainsi la relation 3.

$$\delta n = \langle \text{grad } n | \delta \vec{M} \rangle = \|\text{grad } n\| \cos i \delta s \quad (3)$$

En introduisant ce dernier résultat dans la formulation continue de la loi de Snell-Descartes, on peut faire apparaître, en formule 4, le rayon de courbure  $\rho$  de notre chemin optique tel que défini dans [Torge, 2001].

$$\delta i = -\frac{\|\text{grad } n\|}{n} \sin i \delta s = -\frac{\delta s}{\rho} \quad (4)$$

Le long d'un chemin optique de A vers B, la déviation angulaire totale  $\Delta i$  sera l'intégrale de cette dernière équation (cf. figure 3 et équation 5).

$$\Delta i = -\int_A^B \frac{\|\text{grad } n\|}{n} \sin i ds \quad (5)$$

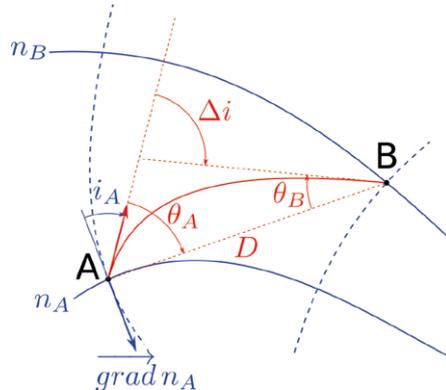


Figure 3. Déviation totale  $\Delta i$  due à la réfraction sur le chemin optique de A à B.

En appliquant une fois encore la loi de Snell-Descartes, il est possible de sortir le sinus de l'intégrale. En effet, on a l'équation 6.

$$n \sin i = n_A \sin i_A \quad (6)$$

Avec  $i_A$  l'angle entre le gradient et le chemin optique à la station en A. En

appliquant ce résultat dans l'équation 5, on obtient le résultat en formule 7.

$$\Delta i = -n_A \sin i_A \int_A^B \frac{\|\text{grad } n\|}{n^2} ds \quad (7)$$

Sur la figure 3, on note  $\theta_A$  l'angle entre la tangente au chemin optique en A et la droite euclidienne (AB). De la même manière, on note  $\theta_B$  en B. Géométriquement, on peut aisément démontrer que  $\Delta i = \theta_A + \theta_B$ .

**Modèle usuel en vertical**

Si A et B correspondent aux centres optiques, respectivement d'un tachéomètre et d'un prisme, nos mesures angulaires en A vers B sont faites par rapport à la tangente au chemin optique en A. Dès lors l'angle  $\theta_A$  est celui qui nous intéresse pour corriger nos mesures de direction horizontale  $\rho$  et d'angle zénithal  $\zeta$ .

Pour obtenir la modélisation usuelle en topométrie, certaines hypothèses sont faites pour simplifier la formule 7. En l'occurrence, on suppose que :

- Le gradient de  $n$  est exclusivement vertical. Dès lors, si on note les corrections  $\Delta r$  et  $\Delta \zeta$  à apporter sur respectivement les directions horizontales et les angles zénithaux, on a  $\Delta r = 0$  et  $\Delta \zeta = \theta_A$ . Cela implique également qu'à la station on ait  $\sin i_A = \pm \sin \zeta$ .
- La déviation est symétrique en A et en B, ce qui revient à dire que  $\Delta \zeta = \theta_A = \Delta i/2$ .

On peut alors modéliser le chemin optique comme étant un arc de cercle, dans un plan vertical, de rayon  $\rho$ . Si on note D la distance inclinée et d la distance horizontale de A à B, on obtient :

$$\Delta i = \frac{D}{\rho} \quad (8)$$

Introduisons maintenant le coefficient de réfraction  $k$ , lié au rapport entre le rayon de la Terre  $R$  et ce rayon de courbure moyen du chemin optique en équation 9. L'ajout du  $\sin \zeta$  change légèrement la définition commune du coefficient de réfraction, mais cela permet de s'affranchir d'une hypothèse forte d'horizontalité des mesures.

$$k = \frac{R}{\rho \sin \zeta} \quad (9)$$

On obtient alors la modélisation usuelle en topométrie, liant la correction des



angles zénithaux avec ce coefficient  $k$  [Torge, 2001].

$$\Delta i = \frac{k D \sin \zeta}{R} = \frac{k d}{R} \Rightarrow \Delta \zeta = \frac{k d}{2R} \quad (10)$$

Si on identifie les termes de la formule 10 avec ceux en 7, après application de nos hypothèses, on peut interpréter le coefficient  $k$  comme une forme de moyenne pondérée par les distances du gradient de  $n$  le long du chemin optique. En effet, on a :

$$k \approx \pm \frac{n_A R}{D} \int_A^B \frac{\|\text{grad } n\|}{n^2} ds \approx \pm n_A R \frac{\sum_j \frac{\|\text{grad } n_j\|}{n_j^2} s_j}{\sum_j s_j} \quad (11)$$

### ■ Variabilité du coefficient de réfraction $k$

Le coefficient de réfraction est généralement modélisé par la valeur  $k = 0.13$  [Torge, 2001] ou encore  $k = 0.16$  [AFTOPO, 2000]. Ces valeurs sont obtenues en considérant le gradient standard de  $n$  avec l'altitude, essentiellement dû aux gradients de pression et de température, lorsqu'on est suffisamment haut au-dessus du sol pour que celui-ci n'ait plus d'effet thermique. D'après [Torge, 2001], cette valeur est applicable quand la hauteur dépasse 40 m. C'est sans doute une valeur à nuancer en introduisant la notion de couche limite de la basse atmosphère qui sépare la zone convective, soumise aux effets thermiques du sol, et la zone stratifiée. La hauteur de cette couche limite est très variable – entre 1 m et 1 km – et est difficile à estimer<sup>1</sup>.

Une publication ancienne mais particulièrement intéressante [Hübner, 1977] propose le schéma en figure 4 qui synthétise remarquablement les ordres de grandeur du coefficient de réfraction  $k$  en fonction des heures de la journée et de la hauteur de la visée au-dessus du sol.

Tout d'abord, la température a un cycle journalier. Sa variation quotidienne est maximale au levé et au coucher du soleil. Lors de ces périodes

<sup>1</sup>Voir la définition de la couche limite atmosphérique, et notamment la couche de surface : <http://www.areelis.fr/documentation-couche-limite-atmospherique-43.html>

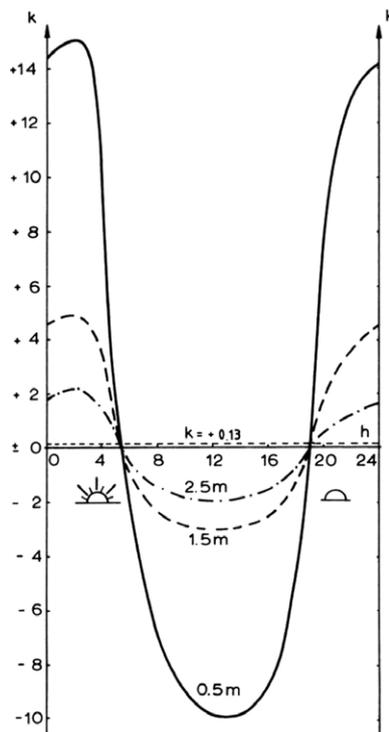


Figure 4. Ordre de grandeur de la valeur de  $k$  en fonction de l'heure de la journée et de la hauteur au-dessus du sol [Hübner, 1977].

de la journée, la valeur du coefficient  $k$  varie énormément et ce, d'autant plus si la visée est proche du sol (0.5 m, 1.5 m puis 2.5 m sur la figure 4). Cet état de fait a été confirmé par [Hirt et al., 2010].

Il est donc recommandé d'éviter les mesures proches du levé ou du coucher du soleil. Au milieu de la journée, même si la valeur de  $k$  peut être très différente de 0.13 (ainsi on lit  $k = -3$  pour des visées à 1.5 m, la hauteur typique de canne), la variation de ce paramètre est minimale.

### ■ Comment mesurer ou prédire $k$ ?

Pour qui souhaite obtenir des résultats exacts en nivellement trigonométrique, il est nécessaire, si la distance dépasse quelques centaines de mètres, de connaître la valeur de  $k$ . En table 1, on peut se représenter à 300 m seulement quels effets peuvent engendrer la réfraction sur la dénivelée.

$k$	$\mathcal{R} = \frac{k d^2}{2R}$ [mm]
0.13	1
-1	-7
-3	-21

Table 1. Effets en mm de la réfraction sur une dénivelée trigonométrique longue de 300 m.

Déterminer  $k$  est un problème ancien. La première solution, bien connue mais peu appliquée désormais, consiste à effectuer des visées réciproques simultanées. Cette méthode, qui sera décrite dans la suite de cet article, est efficace, pour peu que la réfraction influe de manière symétrique sur le chemin optique. Toutefois, elle a l'inconvénient de nécessiter deux instruments au lieu d'un, et de ce fait de doubler le nombre d'opérateurs.

Une autre méthode a été proposée par [Ingensand, 2002] et testée récemment par [Kasser et Magnenat, 2017], en l'occurrence la dispersométrie qui tire profit du fait que la déviation due à la réfraction varie également en fonction de la longueur d'onde du faisceau propagé. Ainsi si un objet est mesuré angulairement à deux longueurs d'onde différentes connues, il est possible de déduire la vraie valeur de  $k$  de la différence angulaire mesurée. L'inconvénient de cette méthode est la précision angulaire requise pour déduire la valeur de  $k$ . Le travail de [Kasser et Magnenat, 2017] a entre autres eu le mérite de montrer que les outils de traitement d'images pouvaient être une piste intéressante dans cette voie.

La dernière piste à notre connaissance consiste à disposer suffisamment de capteurs météorologiques pour construire un modèle du gradient de  $n$  et prédire, par la méthode des éléments finis, les coefficients  $k$  à appliquer pour chaque mesure à chaque instant. Si cette piste peut être éventuellement envisagée dans un contexte industriel ou métrologique, en auscultation d'ouvrages extérieurs elle n'est pas raisonnable d'un point de vue pratique.

## Visées simultanées [quasi] réciproques

Dans cette partie, nous allons décrire le fondement des visées réciproques dans leur capacité à s'affranchir presque totalement des problèmes de réfraction. Nous proposerons quelques idées simples à mettre en place sur le terrain pour en bénéficier sans recourir à du matériel spécial.





### ■ Principe des visées réciproques simultanées

Une visée de A vers B est déviée par la réfraction. Lors de cette visée, on mesure la distance inclinée D séparant les deux points et on définit angulairement la tangente au chemin optique à la station A. Si au même instant la mesure réciproque est effectuée, on dispose alors de la définition de la seconde tangente. Si, conformément à la figure 5, on désigne  $\alpha \approx d/R$  l'angle au centre de la Terre (avec d la distance horizontale) et  $\zeta_A$  et  $\zeta_B$ , les deux angles zénithaux mesurés, on obtient la relation 12.

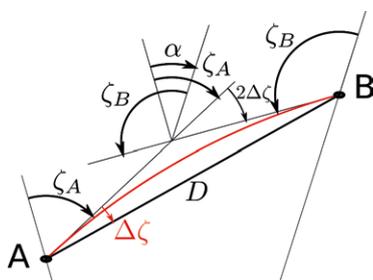


Figure 5. Schéma de principe des visées réciproques simultanées. Les mesures des angles zénithaux aux deux extrémités permettent de déduire la correction de réfraction.

$$\zeta_A + \zeta_B + 2\Delta\zeta = \pi + \alpha \quad (12)$$

D'où la correction des angles zénithaux  $\Delta\zeta$  suivante, qui permet, si besoin est, de calculer la valeur du coefficient de réfraction k.

$$\Delta\zeta = \frac{k d}{2R} = \frac{\pi}{2} + \frac{d}{R} - \frac{\zeta_A + \zeta_B}{2} \quad (13)$$

Néanmoins, on peut noter les inconvénients suivants à ce modèle :

- Il n'est efficace que si l'hypothèse d'une déviation symétrique est validée.
- Il nécessite la visée réciproque des centres optiques des deux tachéomètres ce qui, en mode de pointé automatique, peut représenter un risque d'interférence des ATR (*Automatic Target Recognition*) si les instruments sont semblables.

### ■ Dénivelées réciproques simultanées

Prenons la formule d'une dénivelée brute  $h'$  en nivellement trigonométrique, avec I et S, les hauteurs respectivement de l'instrument et du prisme.

$$h' = I - S + D \cos \zeta \quad (14)$$

La dénivelée h est égale à cette dénivelée brute à laquelle on ajoute la correction de niveau apparent  $E - R$  [Touzé, 2017].

$$h = h' + \mathcal{E} - \mathcal{R} \quad \text{avec} \quad (15)$$

$$\mathcal{E} - \mathcal{R} = (1 - k) \frac{d^2}{2R}$$

Soit  $h_{AB}$  la dénivelée vraie entre deux points A et B. Si cette dénivelée est mesurée de manière réciproque, les deux visées partagent le même coefficient k. Il est donc possible d'écrire ce qui suit, aux erreurs de mesure près

$$\begin{aligned} \bar{h}_{AB} &= \frac{h_{AB} - h_{BA}}{2} \\ &= \frac{h'_{AB} - h'_{BA}}{2} + \frac{1 - k}{4R} (d_{AB}^2 - d_{BA}^2) \\ &\approx \frac{h'_{AB} - h'_{BA}}{2} \quad (16) \end{aligned}$$

Les distances horizontales réciproques étant sensiblement identiques, la dénivelée corrigée est obtenue par la moyenne des dénivelées brutes réciproques simultanées. Cette approche est particulièrement efficace si on dispose de cadres permettant de placer, à l'aplomb de chacun des tachéomètres, un prisme. Quant au risque d'interférence des ATR, il peut être toujours présent quoique amoindri par rapport au cas précédent.

### ■ Dénivelées quasi réciproques

À défaut de cadre spécial, il est possible de déporter un prisme à quelques mètres de chaque station. Dans ce cas

notre canevas correspond à la figure 6, dans laquelle les visées simultanées sont  $A \rightarrow B.1$  et  $B \rightarrow A.1$ . Si la distance séparant chaque station de son prisme déporté est négligeable par rapport à la distance entre les stations, on parle de visées quasi réciproques.

En appliquant la relation de Chasles sur nos dénivelées, on peut alors se ramener au cas précédent selon les formules 17 et 18, dans lesquelles  $\alpha$  et  $\beta$  sont respectivement les angles horizontaux  $(AB.1, AA.1)$  et  $(BA.1, BB.1)$  (cf. figure 6).

$$\bar{h}_{AB} = \frac{(h'_{AB.1} - h'_{BB.1}) - (h'_{BA.1} - h'_{AA.1})}{2} + (1 - k) \Delta \quad (17)$$

Avec

$$\Delta = \frac{d_{AA.1} d_{AB.1} \cos \alpha - d_{BB.1} d_{BA.1} \cos \beta}{2R} \quad (18)$$

L'expression de  $\Delta$  se retrouve aisément à l'aide de la loi des cosinus. Ce paramètre, homogène à une longueur, caractérise le biais de quasi-réciprocité. Il peut être déterminé à l'aide des mesures de distances et de directions horizontales. Comme il est peu probable que  $|1-k|$  soit supérieur à 10, si une exactitude  $\sigma$  sur la dénivelée est souhaitée, on peut considérer  $(1-k)\Delta$  négligeable quand  $|\Delta| < \sigma/10$ .

### ■ Mesure d'un triangle de 5 km de périmètre

En septembre 2018, les étudiants sortant de la 1<sup>re</sup> année de la filière géoma-

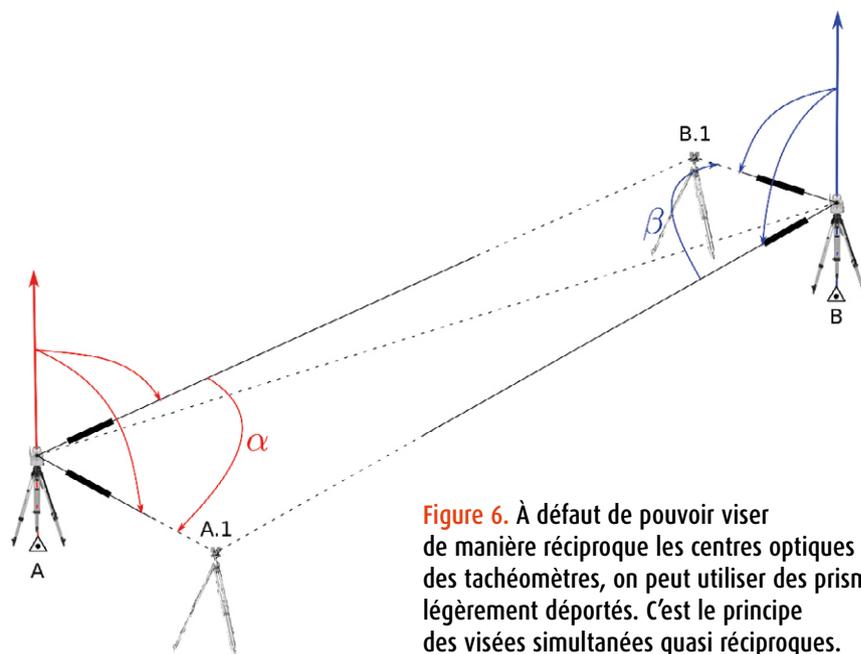


Figure 6. À défaut de pouvoir viser de manière réciproque les centres optiques des tachéomètres, on peut utiliser des prismes légèrement déportés. C'est le principe des visées simultanées quasi réciproques.

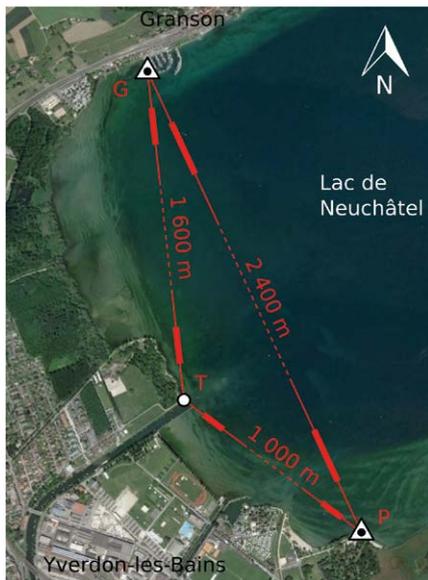


Figure 7. Triangle de visées simultanées quasi réciproques mesuré en septembre 2018. Les points P et G sont des références altimétriques données à une précision de 2 cm. [Image Google Earth]

La méthode des dénivelées simultanées quasi réciproques pour déterminer l'altitude du point T en s'appuyant sur celle des points cadastraux G et P, dont la précision est donnée à 2 cm. Les trois dénivelées ont été mesurées simultanément et de manière quasi réciproque, par trois séries d'observations dans les deux positions de la lunette.

Les visées ont été faites en milieu de matinée à environ 2 m au-dessus du lac de Neuchâtel (cf. figure 7). Le périmètre du triangle ainsi formé est de 5 km. Les conditions météorologiques étaient bonnes : temps couvert et plafond haut. Dans de telles conditions, les températures du sol et de l'air sont sensiblement égales, ce qui minimise l'épaisseur de la couche limite. L'expérience a duré 2 h, en incluant les déplacements, le montage et le démontage. Les tachéomètres employés avaient une précision angulaire de 3 cc (soit 0.3 mgon) et une précision en distance de 1 mm + 1 ppm.

Les biais de quasi-réciprocité  $\Delta$  étaient tous inférieurs, en valeur absolue, à 0.6 mm et, de ce fait, ils ont été négligés dans la formule 17. Les résultats des dénivelées obtenues sont affichés en table 2. Plusieurs remarques peuvent être faites :

- La somme des dénivelées est de

Dénivelée	$h_{moy}$ [m]	$h_{ref}$ [m]
$P \rightarrow G$	$-0.098 \pm 0.004$	$-0.094 \pm 0.028$
$G \rightarrow T$	$-0.900 \pm 0.004$	
$T \rightarrow P$	$0.981 \pm 0.001$	
$\Sigma$	$-0.017 \pm 0.006$	

17 mm, ce qui, par les écarts-types empiriques propagés, est légèrement hors de la tolérance à 99 %.

- Cette fermeture est, dans l'absolu, tout à fait satisfaisante pour du nivellement trigonométrique dont la précision, sur de longues distances, est sensiblement proportionnelle au carré de la distance [Touzé, 2017].
- La justesse de la base PG, par rapport aux altitudes des deux repères, est de 4 mm.

En 2 h de travail sur le terrain et environ autant de traitement, nous avons pu obtenir un résultat tout à fait sérieux en termes de précision et de justesse, par rapport à du nivellement géométrique ou GNSS, et ce, sur des visées kilométriques. De plus, une fois les dénivelées compensées, il est possible de déduire les valeurs de k pour chaque visée. Ces valeurs sont affichées dans le graphique en figure 8.

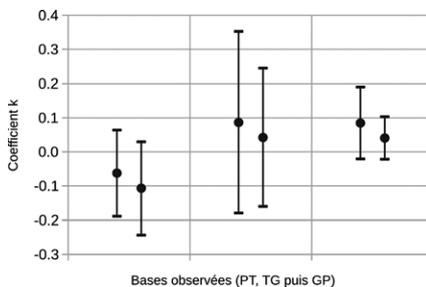


Figure 8. Pour chacune des six bases mesurées, valeurs moyennes de k et intervalles de confiance à 99 %.

Dans ces résultats, on peut constater que la valeur moyenne du coefficient de réfraction k est proche de 0. Cependant, les intervalles de confiance mettent en évidence que k est susceptible de varier dans le temps et dans l'espace dans un intervalle compris entre -0.2 et 0.3.

### Ajustement d'un réseau d'auscultation

Quel géomètre, amené à compenser régulièrement de grands réseaux tachéométriques, n'a jamais observé d'excellents résultats planimétriques

Table 2. Résultats des dénivelées moyennées, corrigées de la réfraction et valeur de la dénivelée de référence.

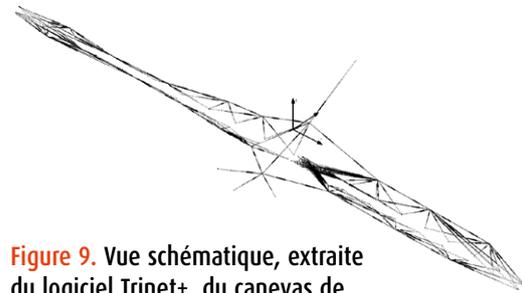


Figure 9. Vue schématique, extraite du logiciel Trinet+, du canevas de surveillance de ce chantier traité par la société SITES.

tandis qu'en altimétrie, la proportion d'angles zénithaux hors tolérance est alarmante ? Que faire ? Il s'agit sans doute du problème de réfraction le plus courant et pour lequel, néanmoins, on ne trouve pas dans la littérature de méthodologie de traitement.

La société SITES assure, parmi de nombreuses autres missions, des mandats d'auscultation d'ouvrages d'art. Le réseau présenté ci-après correspond à la surveillance d'une section droite de 800 m d'une ligne ferroviaire à grande vitesse, dans le Sud de la France. Il est situé dans une zone de remblai et contient en son centre, un petit viaduc routier (cf. schéma du canevas en figure 9). Les données de ce réseau ont aimablement été mises à disposition par M. Matthieu Hansen.

### Modèle mathématique

Pour pouvoir valider l'adéquation des mesures entre elles, sans influence des points fixes, une compensation libre a été effectuée. Pour ce faire, un unique point fixe en 2D+1 a été arbitrairement choisi, ainsi qu'un gisement entre les deux extrémités du réseau. L'échelle est donnée par les mesures de distance. La compensation a été réalisée en 2D+1 à l'aide du logiciel suisse LTOP, développé par SwissTopo<sup>2</sup>.

Pour la compensation altimétrique, la valeur considérée dans un premier temps du coefficient de réfraction est  $k = 0.13$ . Le modèle stochastique appliqué est quant à lui résumé en table 3.

<sup>2</sup> <https://www.swisstopo.admin.ch/fr/home/products/software/ltop.html>



Paramètres	Précisions <i>a priori</i>
Directions horizontales	1.5 cc
Angles zénithaux	1.5 cc
Distances inclinées	0.6 mm + 1 ppm
Centrages	0.4 mm
Hauteurs	0.3 mm
Coefficient de réfraction	0.06

**Table 3. Modèle stochastique initial de la compensation libre (avec 1 cc = 0.1 mgon).**

Groupe	Deg. lib.	Inf.	Quotient	Sup.
Tout	294	0.89	0.83	1.11
Distances	169.969	0.86	0.61	1.14
Dir. horiz.	124.031	0.84	1.06	1.17

**Table 5. Quotient d'erreur moyenne planimétrique et quotients des groupes d'observations, ainsi que leurs intervalles de confiance.**



Les précisions de centrage et de hauteur correspondent ici aux effets combinés à la station et au prisme. Ensuite, le fait d'introduire une précision sur le coefficient  $k$  est – à notre connaissance – une exclusivité du logiciel LTOP. Cela revient à dépendre les angles zénithaux associés aux visées lointaines du fait des variations du coefficient de réfraction (effet de scintillement dont nous parlons au paragraphe 5.4.).

Le niveau de confiance  $1 - \alpha$  pour les tests statistiques de première espèce est 99 %. Vu les degrés de libertés  $r$  des calculs planimétriques et altimétriques, respectivement 294 et 159, cela nous amène à une tolérance  $T$  sur les résidus *studentisés*<sup>3</sup>  $w_i$ , dans les deux cas, de 2.6. Le grand nombre d'observations  $n$  (507 et 253) combiné au niveau de confiance fait que le nombre  $p$  de probables bonnes observations hors tolérance n'est pas négligeable. Nous en tenons compte ainsi que du seuil  $\delta$  défini comme la valeur de la loi de Student au-delà de laquelle la probabilité est de  $1/n$ .

$$\begin{cases} p = \text{arrondi}(n\alpha) \\ \delta \text{ tel que } \frac{1}{n} = \mathcal{P}(|\tau_r| \geq \delta) \end{cases} \quad (19)$$

Lors d'un calcul de compensation d'un grand réseau, avec beaucoup d'observations, étudier les résidus *studentisés*  $w_i$  par rapport à ces trois paramètres  $T$ ,  $\delta$  et  $p$ , plutôt que de la seule tolérance

Dimension	$n$	$r$	$T$	$\delta$	$p$
Planimétrie	507	294	2.59	3.12	5
Altimétrie	253	159	2.61	2.92	3

**Table 4. Nombre d'observations  $n$ , degrés de libertés  $r$ , tolérances à 99 %  $T$ , seuils d'inacceptabilité  $\delta$  et nombres probables de bonnes observations hors tolérance  $p$ .**

<sup>3</sup> Si on divise les résidus par leurs précisions *a priori*, on obtient les résidus normalisés qui suivent la loi normale centrée réduite. Si on prend la précision *a posteriori*, ils suivent la loi du  $\tau$  de Student à  $r$  degrés de liberté. On parle alors de résidus *studentisés*.

$T$ , permet de limiter la désactivation de bonnes observations légèrement hors tolérance en respectant la queue de distribution de la loi de Student. On limite ainsi la diminution inéluctable des indicateurs de précision *a posteriori* qui, sans cela, peuvent parfois devenir irréalistes.

**■ Compensation planimétrique**

En planimétrie, afin d'obtenir un nombre raisonnable de résidus *studentisés* entre  $T$  et  $\delta$ , il a été nécessaire de dépendre 10 observations, soit 2 % des mesures, en dégradant leur précision de centrage jusqu'à 3 mm au maximum. Aucune mesure n'a été désactivée. Cela fait, il reste 6 résidus compris entre 2.6 et 3.1. Le quotient d'erreur moyenne<sup>4</sup>  $Q$  obtenu est de 0.83 ; il est légèrement inférieur à son intervalle de confiance. Notre résultat est donc plus précis que prévu d'un rapport 0.83. L'étude des quotients des groupes d'observations en *table 5*, tels que définis dans [Sillard, 2001], montre que ce sont les distances qui sont trop précises. Comme il ne nous a pas paru raisonnable de modifier le modèle stochastique des distances qui est déjà très strict, nous avons validé ce résultat, excellent au demeurant.

**■ Premiers calculs altimétriques**

Lors de la première compensation libre altimétrique, nous avons eu 95 résidus hors tolérance sur 253 observations, soit 38 %. Une telle proportion étant inacceptable, nous avons supposé dans un premier temps la présence de quelques grandes fautes. Pour ce faire, nous avons effectué une compensation robuste de Huber avec un coefficient de 2.5 [Guble, 2003]. L'amélioration est relative puisqu'il reste 69 résidus hors tolérance, soit 27 % des observations, ce qui reste une proportion déraisonnable. Lors d'une compensation robuste, nous devrions effectivement nous attendre à avoir une réduction drastique du

<sup>4</sup> C'est-à-dire la racine carrée du rapport entre les facteurs de variance *a posteriori* sur *a priori*.

nombre de fautes. Le problème est vraisemblablement à imputer à une insuffisance du modèle fonctionnel ou du modèle stochastique.

Les mesures ayant été faites à hauteur d'homme au-dessus du ballast, lors de journées très chaudes et ensoleillées typiques du mois d'août dans le sud de la France, nous avons supposé que l'origine du problème était lié exclusivement à la réfraction.

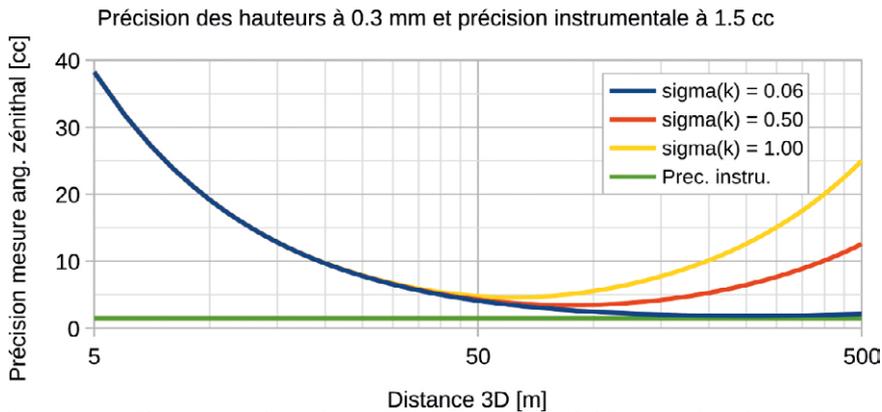
**■ Adaptation du modèle stochastique altimétrique**

Lorsqu'on regarde à l'œil nu l'horizon (*cf. figure 10*), selon l'ensoleillement, chacun peut constater un scintillement plus ou moins prononcé selon la distance. Ce phénomène est naturellement plus visible par le biais du grossissement du télescope d'un tachéomètre. Ce scintillement est dû aux brusques variations dans le temps du coefficient de réfraction ; il est d'autant plus prononcé quand le gradient de l'indice de réfraction est élevé, par temps chaud notamment. Si ce phénomène engendre du bruit dans ce que nous observons à l'œil nu, comment pourrait-il ne pas affecter la précision de nos mesures d'angles zénithaux ? Or, à notre connaissance, LTOP est le seul logiciel qui permet d'en tenir compte dans le modèle stochastique.

$$\bar{\zeta} = \zeta + \Delta\zeta + \varepsilon \quad (20)$$



**Figure 10. Image typique d'une route par temps chaud. Le mirage démontre la présence d'un coefficient  $k$  négatif. Avec nos propres yeux, l'image vibrerait. Cet effet de scintillation est dû aux brusques variations de  $k$  dans le temps.**



**Figure 11.** Modèle stochastique des mesures des angles zénithaux en fonction de la distance et des précisions de hauteurs, des lectures instrumentales et de la réfraction.

Considérons la *formule 20* qui lie l'angle zénithal vrai  $\zeta$  avec l'angle mesuré  $\zeta_s$ , la correction de réfraction  $\Delta\zeta$  et l'erreur aléatoire  $\varepsilon$ . Par propagation d'erreur, il est possible de déterminer le modèle stochastique de notre erreur de mesure  $\sigma_\varepsilon$  en fonction des précisions  $\sigma_h$  des hauteurs,  $\sigma_\zeta$  des lectures angulaires et  $\sigma_k$  du coefficient de réfraction. On obtient la *formule 21* dans laquelle  $d$  est la distance horizontale.

$$\sigma_\varepsilon \approx \sqrt{\frac{\sigma_h^2}{d^2} + \sigma_\zeta^2 + \frac{d^2 \sigma_k^2}{4R^2}} \quad (21)$$

La *figure 11* applique cette formule selon les précisions instrumentales et de hauteur de notre réseau, tout en considérant trois valeurs de  $\sigma_k$  caractérisant le bruit dû aux variations brusques de  $k$  par l'effet de scintillement. Augmenter la valeur de ce paramètre revient donc à dépendre les angles zénithaux associés aux visées lointaines. La valeur initiale  $\sigma_k = 0.06$  est celle implémentée par défaut dans LTOP.

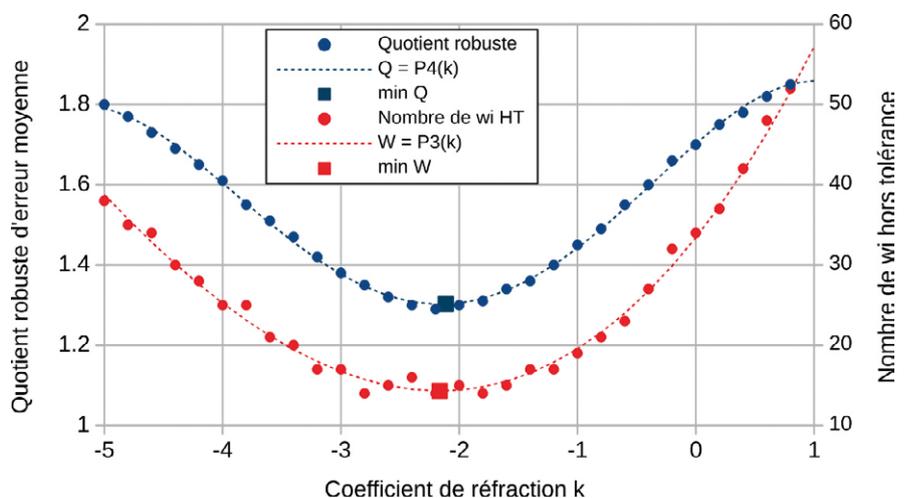
Toujours en mode robuste, nous avons dans un premier temps défini  $\sigma_k = 0.5$ , ce qui, selon la *figure 11*, engendre un bruit de scintillement de 10 cc à 400 m. De 69, nous sommes passés à 63 résidus hors tolérance, soit 25 % des observations. Jugeant ce gain insuffisant, nous avons choisi de définir  $\sigma_k = 1.0$ , c'est-à-dire 10 cc à 200 m. L'amélioration est ici nette puisqu'il ne reste plus que 36 résidus hors tolérance, soit 14 % des mesures.

### ■ Recherche du coefficient $k$ optimal

Il reste désormais à définir quelle valeur moyenne du coefficient de réfraction  $k$  est optimale pour le calcul de ce réseau. En effet, selon [Hübner, 1977] et la

*figure 4*, par temps chaud au-dessus du sol,  $k$  a peu de chance d'être proche de 0.13. LTOP ne permettant pas d'ajuster la valeur de  $k$ , nous avons donc effectué plusieurs compensations en mode robuste en faisant varier  $k$  de -5 à +1 par pas de 0.2 et nous avons retenu deux critères, le quotient d'erreur moyenne et le nombre de résidus hors tolérance. Nous obtenons le graphique en *figure 12*.

Les courbes associées au quotient et au nombre de résidus hors tolérance admettent manifestement un minimum pour des valeurs de  $k$  sensiblement identiques. Après une régression polynomiale, nous avons déterminé les valeurs de  $k$  minimisant ces deux courbes (*cf. table 6*). Une moyenne pondérée nous a permis d'obtenir le coefficient  $k$  optimal de ce réseau, en l'occurrence  $k = -2.12$ . Pour cette valeur, le nombre de résidus hors tolérance est de 14, soit 6 % des mesures.



**Figure 12.** En mode robuste, recherche du coefficient  $k$  optimal minimisant le quotient d'erreur moyenne et le nombre de résidus hors tolérance.

Courbe	$\hat{k}$	$\sigma_{\hat{k}}$
$\min_k Q$	-2.114	0.014
$\min_k W$	-2.165	0.036
Moyenne	-2.121	0.018

**Table 6.** Valeurs de  $k$  minimisant le quotient d'erreur moyenne et le nombre de résidus hors tolérance.

### ■ Calcul final

Pour la compensation libre altimétrique finale, nous avons donc appliqué comme paramétrage de la réfraction  $k = -2.12 \pm 1.0$  et nous avons quitté le mode robuste. Pour achever cette compensation, il a été nécessaire de dépendre 10 angles zénithaux (4 % des mesures) en dégradant la précision de hauteur à 3 mm au pire. Cela fait, il reste 3 résidus compris entre 2.6 et 2.9, ce qui est cohérent avec la loi de Student. Le quotient d'erreur moyenne altimétrique final est de 1.13. Il est acceptable par rapport à l'intervalle de confiance déduit de la loi du  $\chi^2$ , en l'occurrence [0.84;1.16]. Nous considérons que la libre altimétrique est validée. Les précisions finales des altitudes ajustées des 90 points du réseau sont comprises entre 0.4 et 1.2 mm. La précision médiane est de 0.8 mm.

Ainsi, de 95 résidus hors tolérances, nous sommes passés à 10 observations raisonnablement dépendées et ce – principalement – en réglant la valeur de deux paramètres, la variation de  $k$  sous la forme d'un écart-type dans le modèle stochastique et la valeur moyenne de  $k$ . La méthode employée peut être appliquée, quel que soit le logiciel employé, pour peu que celui-ci



permette de régler la valeur moyenne de  $k$  et d'adapter facilement le modèle stochastique des observations. Le fait d'agir sur ces deux paramètres n'a pas été arbitraire. La valeur finale du coefficient de réfraction est cohérente par rapport aux constats de [Hübner, 1977]. Quant à la précision de  $k$  dans le modèle stochastique des angles zénithaux, il se justifie par l'effet de scintillement que tout à chacun peut constater de ses propres yeux.

## Conclusion

Des réflexions et expériences décrites précédemment, plusieurs conclusions peuvent être tirées sur les enjeux de réfraction en tachéométrie.

### ■ Sur le coefficient $k$ lui-même

Tout d'abord, les deux expériences décrites s'appuient sur des visées proches du sol ou de l'eau, de l'ordre du mètre. Que ce soit par un temps couvert ou radieux, les valeurs estimées du coefficient de réfraction sont différentes de 0.13 et se comportent tel que décrit dans [Hübner, 1977] et [Hirt et al., 2010]. Plus particulièrement, lors de journées très ensoleillées, pour des visées à hauteur d'homme au-dessus du sol, un coefficient  $k = -2$  est nettement plus vraisemblable que 0.13.

### ■ Sur les visées réciproques

Recommander d'employer la technique des visées réciproques pour assurer la justesse du nivellement trigonométrique n'est pas très novateur. Cependant, vu la faible utilisation de cette méthode, rappeler ce fait ne paraissait pas inutile. Mais plus généralement, en plus d'une dénivelée corrigée des effets de la réfraction, cette méthode permet également de déduire le coefficient  $k$ . Ainsi, lors d'un chantier d'auscultation, on pourrait envisager d'intégrer au canevas quelques visées réciproques, ne serait-ce que pour définir l'ordre de grandeur de  $k$  et de sa variabilité.

### ■ Lors de la compensation de réseaux

Avant tout, quelles que soient les conditions météorologiques lors du mesurage, il est nécessaire d'intégrer au modèle stochastique des angles zénithaux un paramètre de variabilité du

coefficient de réfraction sous la forme d'un écart-type. Son effet de dépendance des visées lointaines correspond au scintillement qui est d'autant plus marqué quand le temps est ensoleillé. Ensuite, quand bien même le logiciel de compensation ne permet pas d'ajuster la valeur de  $k$ , il est possible d'en estimer la valeur optimale qui minimise le quotient d'erreur moyenne ou le nombre de résidus hors tolérance.

Nous avons été, ces dernières années, amenés à compenser de nombreux réseaux. Rares ont été les cas où cette recherche de  $k$  était requise, de l'ordre de 5 %. L'idée est plutôt d'avoir le réflexe, en cas de mesures par temps ensoleillé, de se dire que des effets de réfraction peuvent survenir et qu'une méthodologie de traitement existe si c'est la cas.

### ■ Et la suite ?

Cet article s'est focalisé sur le coefficient  $k$  dans le modèle standard de la réfraction, quand le gradient de l'indice de réfraction est vertical et que la déviation est symétrique. Dans le second volet de ce travail, nous présenterons un cas de réfraction latérale asymétrique, lors de visées proches d'un mur ensoleillé. Nous proposerons également une modélisation généralisée de la réfraction sur les visées tachéométriques, dont nous démontrerons la capacité à prendre en charge avec succès toutes ces expériences. ●

## Bibliographie

- [AFTOPO, 2000] AFTOPO (2000). *Lexique topographique*. <https://www.aftopo.org/FR/Lexique-7.html>
- [Gubler, 2003] Gubler, E. (2003). *Description du progamme LTOP, version 94*. Swisstopo. <https://www.swisstopo.admin.ch/fr/home/products/software/ltop.html>
- [Hirt et al., 2010] Hirt, C., Guillaume, S., Wisbar, A., Bürki, B. et Sternberg, H. (2010). *Monitoring of the refraction coefficient in the lower atmosphere using a controlled setup of simultaneous reciprocal vertical angle measurements*. Journal of Geophysical research, Vol. 115. <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1029/2010JD014067>
- [Hübner, 1977] Hübner, E. (1977). *Einfluss der terrestrischen refraction auf den laserstrahl in bodennahen luftschichten*. Vermessungstechnik, 25(10).
- [Ingensand, 2002] Ingensand, H. (2002). *Concepts and solutions to overcome the*

*refraction problem in terrestrial precision measurement*. FIG XXII International Congress. [https://www.fig.net/resources/proceedings/fig\\_proceedings/fig\\_2002/js28/js28\\_ingensand.pdf](https://www.fig.net/resources/proceedings/fig_proceedings/fig_2002/js28/js28_ingensand.pdf)

[Kasser et Magnenat, 2017] Kasser, M. et Magnenat, J.-L. (2017). *Étude d'un nouveau procédé pour la mesure et la correction de la réfraction par corrélation d'images*. XYZ, (N° 153).

[Sillard, 2001] Sillard, P. (2001). *Estimation par moindres carrés*. Collection ENSG-IGN.

[Torge, 2001] Torge, W. (2001). *Geodesy, third completely revised and extended edition*. Walter de Gruyter.

[Touzé, 2017] Touzé, T. (2017). *Nivellement trigonométrique*. Cours de bachelor 1 de la HEIG-VD.

## Contacts

THOMAS TOUZÉ, HEIG-VD  
thomas.touze@gmail.com

MATTHIEU HANSEN, Ingénieur INSA  
Strasbourg – Chef du Groupe Topométrie,  
Mesures Instrumentation Monitoring – SITES –  
Aix en Provence - matthieu.hansen@sites.fr

## ABSTRACT

*Every surveyor knows that his lines of sights are deflected by refraction and that a model can be used for trigonometric leveling. This model comes directly from the Snell-Descartes law to which are added some assumptions that are quite reasonable when the ground thermal effects are negligible. Thus, we introduce the refraction coefficient  $k$  that for high enough observations above the ground, should tend towards 0.13.*

*The validity of this model for near-ground observations is, however, poorly known, as well as the order of magnitude of the refraction coefficient  $k$ . Yet it is close to the ground that we measure. In this first article in a series of two, we will base ourselves on literature and experiments to propose answers to both of these issues. Simultaneous reciprocal observations, in addition to a way of getting accurate height differences, will be seen as a way to estimate  $k$ . We will propose a method to compensate a monitoring network by adjusting the optimal refraction parameters. To do this, it will be necessary to consider the flicker effects due to refraction in the stochastic model of zenith angles.*