

Extension de fuseau de la projection de Mercator Transverse

Application au réseau géodésique primordial Algérien

■ Bachir GOURINE - Abdesselam DAOUADI - Hebib TAIBI - Ali BENAHMED DAHO - Mohamed PACHA

La projection UTM, qui a été adoptée pour habiller le système géodésique national Algérien (Nord Sahara 1959), couvre l'Algérie en quatre fuseaux. Les zones de jonction situées entre deux fuseaux, présentent un problème pour les applications géodésiques (triangulation) ainsi que pour la cartographie à grande échelle (travaux locaux), à cause d'altérations importantes. A travers cet article, un programme, dénommé TRANMERCAFE, a été réalisé pour permettre de projeter l'Algérie en un seul fuseau étendu. L'application et la validation de ce programme ont été effectuées sur une partie importante du réseau primordial bidimensionnel, composé de 239 points, qui s'étale sur la partie Nord de l'Algérie, en adoptant trois méthodes : la projection de Mercator Transverse, le passage par la sphère de courbure moyenne et la projection de Gauss-Krüger. Les résultats obtenus pour chaque méthode et leurs comparaisons sont illustrés et discutés.

MOTS-CLÉS

Projection UTM, projection Gauss-Krüger, projection Mercator Transverse, passage par sphère à courbure moyenne, fuseau étendu, passages direct et inverse, Nord Sahara 1959 (NS-59).

altérations importantes dans les zones de jonction entre les fuseaux.

Afin de remédier à ces problèmes, le présent travail s'intéresse à l'extension de fuseau aux limites du territoire national, en vue d'exécuter une compensation globale du réseau géodésique primordial en un seul bloc.

C'est dans cette optique, que s'inscrit l'objectif assigné à ce travail et qui consiste à élaborer une étude sur trois approches d'extension de fuseaux, notamment, la projection de Mercator Transverse, le passage par la sphère de courbure moyenne et la projection de Gauss-Krüger. L'aboutissement de ce travail a été couronné par la réalisation d'un programme (TRANMERCAFE) d'extension de fuseau, basé sur ces trois approches développées, exprimant ainsi un nouveau système de coordonnées, d'une manière à assurer la meilleure précision possible en transformation des coordonnées géographiques aux coordonnées projection et inversement.

L'application a concerné un réseau du canevas géodésique primordial (réalisé par l'IGN) qui est caractérisé par deux chaînes parallèles (Nord et Sud). Une description succincte des différentes méthodes, les résultats de leurs applications et leurs comparaisons, sont abordés et discutés.

Transformation en fuseau étendu

Le principal inconvénient des formules classiques de la projection UTM réside dans le calcul des coordonnées chaque fois que l'on travaille sur une zone qui s'étale sur plusieurs fuseaux, car elles sont exprimées dans divers systèmes dont chacun correspond à un fuseau déterminé. La résolution de ce

Introduction

L'Algérie est un pays vaste qui s'étend sur une longitude d'amplitude de 18° au Nord et de 20° au Sud et d'une latitude d'amplitude de 18°. La cartographie de notre pays a commencé, par les travaux de l'IGN-France, à l'époque coloniale. Dès lors des problèmes techniques et applicatifs surgirent. D'une cartographie expédiée en passant par l'établissement des réseaux géodésiques afin de mettre en place une cartographie d'état-major, jusqu'à l'adoption du système géodésique national Nord Sahara 1959 (NS-59) avec la projection UTM, la géodésie et la cartographie en Algérie n'ont pas cessé d'évoluer.

Néanmoins, outre sa vétusté, la caractérisation d'un tel système géodésique (NS-59), issu d'un artifice de calcul basé sur deux différentes sources de données : un réseau géodésique (1^{er} ordre et 1^{er} ordre complémentaire, Nord de l'Algérie) calculé dans le système ED50 (European Datum 1950) utilisant l'ellipsoïde international et un réseau astronomique (sud de l'Algérie), pose

un problème au niveau de la définition de l'origine (point fondamental mal défini ou n'existe pas). En conséquence, la méconnaissance de la position et de l'orientation de l'ellipsoïde dans l'espace se répercute sur la qualité des résultats (réseau géodésique). D'autre part, les moyens de calculs utilisés lors de la définition du système Nord Sahara 1959 étaient, à l'époque, assez rudimentaires et les calculs d'ajustement ont été exécutés par petits blocs de quelques points s'appuyant les uns sur les autres. Pour un pays étendu comme l'Algérie, ce type d'ajustement peut altérer la précision et l'homogénéité du système Nord Sahara (problèmes d'échelle et d'orientation). Il est rappelé que le système NS-59 s'appuie sur un autre système plus ancien : le système Voirol 1875 qui a connu un certain nombre de problèmes [Reyt, 1960].

En termes de projection UTM, l'Algérie est à cheval sur quatre fuseaux (29, 30, 31 et 32). L'inconvénient de cette projection, d'une part, est que le système de coordonnées est différent pour chaque fuseau et d'autre part, l'existence des

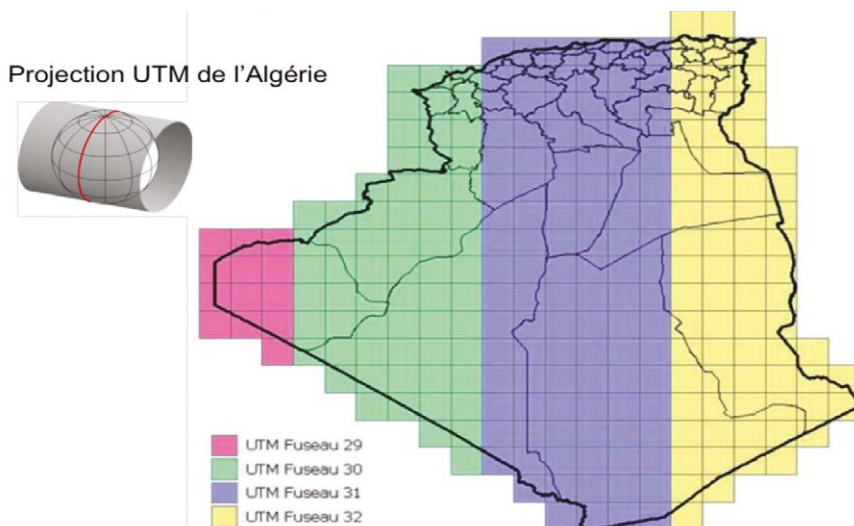


Figure 1. Fuseaux de la projection UTM de l'Algérie

problème revient à unifier le système de coordonnées.

L'Algérie est à cheval sur quatre fuseaux UTM qui sont de l'Ouest à l'Est 29, 30, 31 et 32 (cf. figure 1). L'approche consiste à l'extension d'un fuseau dont le méridien central correspond à 0° en longitude, jusqu'aux limites du territoire national (-8° , $+12^\circ$), en utilisant une méthode de projection qui permet de couvrir l'Algérie en un seul fuseau en assurant une déformation linéaire la plus minimale que possible. En d'autres termes, il s'agit d'assurer un calcul précis des coordonnées entre les passages direct et inverse, par l'utilisation de nouvelles formules de la représentation UTM.

Dans ce contexte, trois approches d'extension de fuseau ont été mises en œuvre. Elles se basent sur le principe de la projection de Mercator Transverse (MT) qui consiste à une double projections (c'est-à-dire, passer d'un ellipsoïde vers une sphère puis vers le plan). Ci-après une description succincte de ces approches, sans détailler leurs aspects théoriques. En annexe, sont explicités les algorithmes correspondant à chaque méthode.

Méthodes du passage au fuseau étendu utilisées

Les méthodes du passage au fuseau étendu proposées, sont basées sur l'utilisation des nombres complexes car elles sont des transformations conformes, d'après Riemann en 1851. Pour de plus amples détails sur ces transformations, il est recommandé de se référer au [Levallois, 1970]. Le détail

des algorithmes de chaque méthode est illustré, dans le mémoire d'ingénieur de [Daouadi, 2015].

La projection de GAUSS-KRÜGER

La projection de Gauss-Krüger (GK) est une projection conforme d'un ellipsoïde de la terre sur un plan en passant par une sphère où l'équateur et le méridien central sont une ligne isomorphe et un isomètre, respectivement, et dont le facteur d'échelle sur le méridien central est constant. La projection de GK se base sur le principe de la double projection. La projection de l'ellipsoïde sur la sphère, de rayon de courbure moyen, est connue sous le nom de la projection de Gauss-Schreiber (GS), elle est tangente à l'équateur. La deuxième projection est la

projection conforme de cette sphère sur le plan, c'est-à-dire de la projection de GS vers la projection de GK où l'échelle suivant le méridien central est rendue constante [Deakin et al., 2010].

Cette projection possède un ensemble d'équations qui assurent une précision du micron près ($1\mu\text{m}$) en tous endroits, dans un intervalle de 30° du méridien central. Le cœur de ces équations repose sur deux séries qui permettent de déterminer la relation entre la latitude rectifiée μ et la latitude conforme Φ . La première est une latitude sur la sphère de rayon rectifié A (rayon de parallèle de même circonférence d'une ellipse méridienne), la deuxième correspond à celle d'une projection conforme de l'ellipsoïde sur une sphère.

L'algorithme de ce programme, réalisé par [Karney, 2011], est basé sur le principe de la projection de Mercator Transverse et qui permet le passage direct et inverse vers un fuseau étendu. Les formules se basent sur des séries de Krüger, [Krüger, 1912], poussées jusqu'à l'ordre 8. Il contient deux fonctions, figure (2) :

Tranmerc_dir : pour le passage direct $(\lambda, \varphi) \rightarrow (X, Y)$.

Tranmerc_inv : pour le passage inverse $(X, Y) \rightarrow (\lambda, \varphi)$.

Approche de la sphère à courbure moyenne (SCM)

Notée SCM, cette approche se base sur

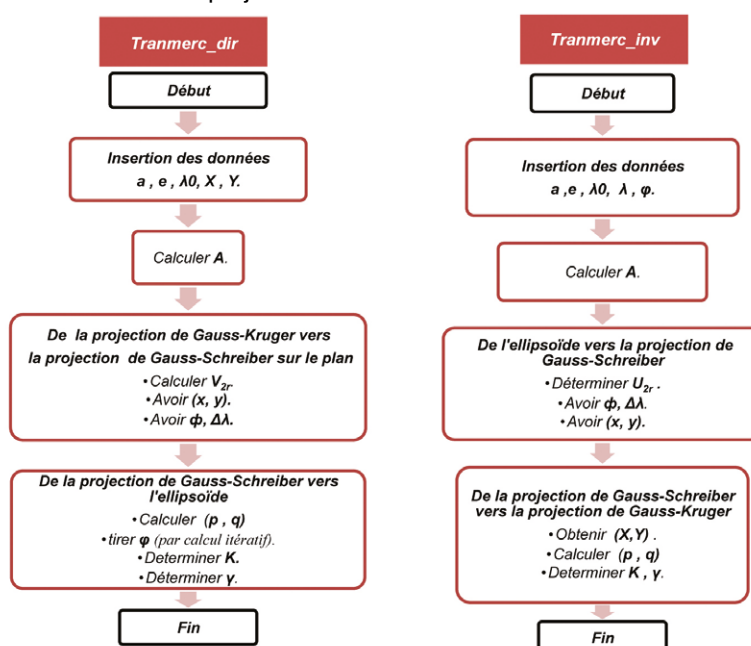


Figure 2. Organigrammes des passages direct et inverse de l'approche GK.

le passage par la sphère de courbure moyenne. C'est une représentation qui conserve le parallèle au point de contact de l'ellipsoïde et de la sphère. Il a sur l'ellipsoïde la latitude φ_0 et sur la sphère de rayon R , il aura la latitude Φ_0 , qui est donnée par :

$$N_0 \cotg \varphi_0 = R \cotg \Phi_0$$

Avec :
$$\begin{cases} \varphi_0 > \Phi_0 \\ \text{et} \\ R = \sqrt{\rho_0 N_0} \end{cases}$$

Pour plus de détails, consultez [Chirouf, 1987] et [Levallois, 1970].

Le programme de la méthode de passage par la sphère à courbure moyenne est inspiré du mémoire d'ingénieur d'état réalisé par Mr. Chirouf [Juin1987, CNTS]. Il contient deux fonctions, *figure 3* :

- SCM_étendu_dir : pour le passage direct $(\lambda, \varphi) \rightarrow (X, Y)$.
- SCM_étendu_inv : pour le passage inverse $(X, Y) \rightarrow (\lambda, \varphi)$.

Projection de Transverse Mercator de l'IGN [IGN, 1995]

Elle se base sur la double projection

où la sphère est tangente à l'équateur. L'algorithme de cette approche a été réalisé par IGN (France) en janvier 1995. La première édition contient un ensemble d'algorithmes avec quelques applications numériques.

Le programme développé se base sur cet algorithme, il contient deux fonctions, *figure 4* :

- MT_IGN_étendu_dir : pour le passage direct $(\lambda, \varphi) \rightarrow (X, Y)$.
- MT_IGN_étendu_inv : pour le passage inverse $(X, Y) \rightarrow (\lambda, \varphi)$.

■ Programme réalisé "TRANMAERCAFE"

Le programme "TRANMAERCAFE" (ou TRANsverse MERCAtor - Fuseau Etendu) a été réalisé sous MATLAB version 7.13, au niveau du Département de Géodésie Spatiale (CTS/Arzew), [Daouadi, 2015]. Il permet d'effectuer le passage direct des coordonnées géographiques en coordonnées cartésiennes (projection) et inversement, exprimées sur un fuseau étendu. Il permet aussi de représenter graphiquement les réseaux géodésiques

bidimensionnels (2D), selon les trois approches développées. Ces dernières basées essentiellement sur la projection de Mercator Transverse, trois programmes correspondants ont été réalisés : MT_IGN_étendu (MT_IGN), SCM_étendu (SCM) et Tranmerc (GK). Ci-après l'organigramme du programme TRANMAERCAFE et de ses modules (*cf. figure 5*).

■ Evaluation de la précision des approches utilisées

Prenant les limites de l'Algérie comme un jeu d'essai, ci-après la liste des points choisis et leur distribution géographique (*cf. figure 6 et tableau 1*).

Les points 5, 6, 7 et 8 désignent les limites extrêmes (exagérées) du réseau géodésique national.

Point	λ°	φ°
1	-12	38
2	-9	20
3	12	38
4	12	20
5	9	36
6	-3	36
7	9	32
8	-3	32

Tableau 1. Jeu d'essai en coordonnées géographiques.

Le *tableau 2* illustre les écarts en coordonnées géographiques, exprimés en millimètres, entre les passages direct et inverse suivant les trois approches. Prenant :

$$\begin{cases} \lambda_0 = 0^\circ \\ \varphi_0 = 0^\circ \text{ (MT_IGN et GK)} \\ \varphi_0 = 34^\circ \text{ (SCM)} \\ Cx = 500\,000 \text{ m} \\ Cy = 0 \text{ m} \end{cases}$$

La différence entre les passages direct et inverse est nulle pour 10^{-13} rd.

Notant que le calcul des écarts en coordonnées géographiques exprimés en millimètres est donné par :

$$\begin{cases} d\lambda = (\lambda - \lambda_{inv}) \cdot R_{moy} \\ d\varphi = (\varphi - \varphi_{inv}) \cdot R_{moy} \cdot \cos\varphi \end{cases}$$

Avec : $R_{moy} = 6371 \cdot 10^6 \text{ mm}$.

■ Comparaison entre les résultats des approches

L'approche de GK donne un résul-

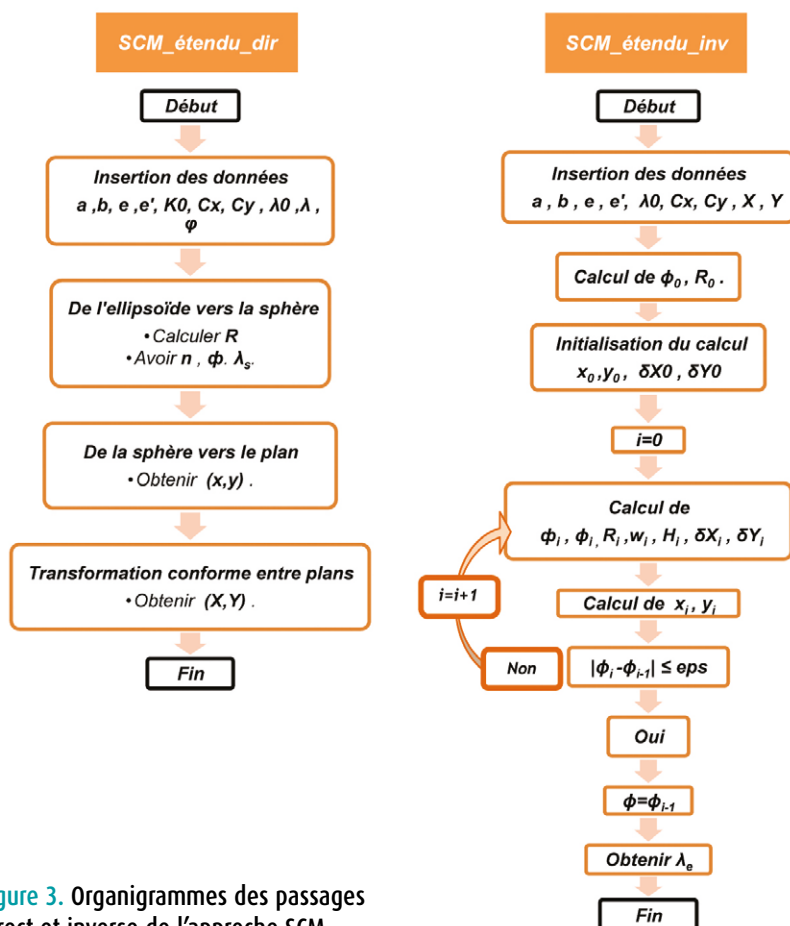


Figure 3. Organigrammes des passages direct et inverse de l'approche SCM.

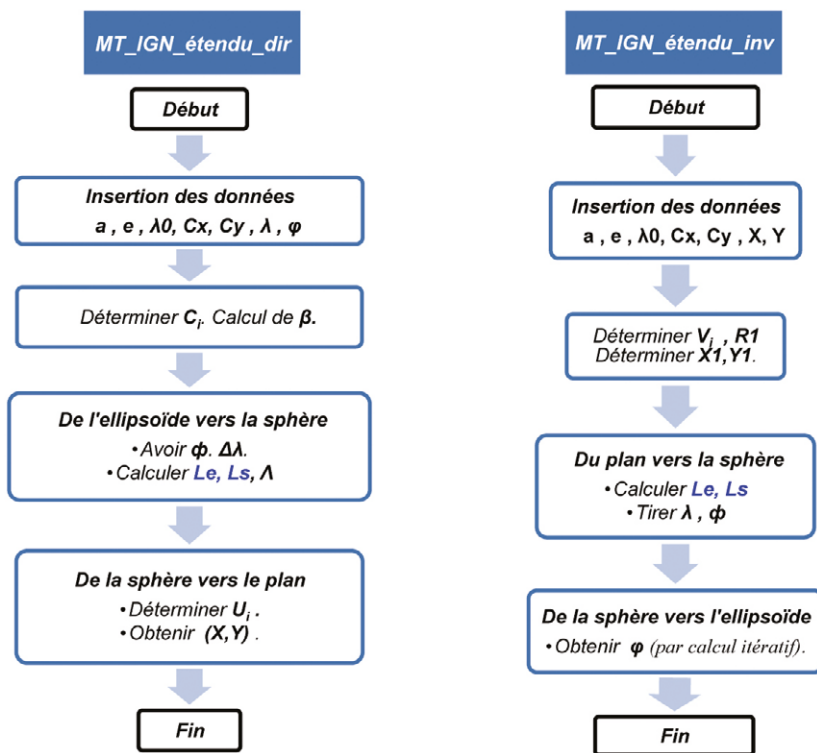


Figure 4. Organigrammes des passages direct et inverse de l'approche MT_IGN.

tat très fiable, de l'ordre de 10^{-6} mm en termes de différences entre les coordonnées géographiques (calcul développé et poussé au 8^e ordre), mais elle possède un facteur d'échelle variant en fonction du point (suivant

le parallèle du point), c'est-à-dire, tant que la latitude augmente le facteur d'échelle augmente. L'approche de MT_IGN fournit un calcul précis (10^{-3} mm) en termes de différences entre les coordonnées

géographiques, elle présente des formules finies et simples à manipuler. Pour ces deux approches, on remarque qu'elles assurent une grande précision de calcul entre les deux passages direct et inverse de l'ordre de 10^{-13} rd, en tout point de la région test. Néanmoins, les résultats obtenus par l'approche de SCM présentent des différences de calcul significatives entre les passages direct et inverse pour une amplitude de $\Delta\lambda = 12^\circ$ de part et d'autre du méridien central (cas du Sud de l'Algérie). Par contre pour une amplitude $\Delta\lambda = 09^\circ$ de part et d'autre du méridien central (cas du Nord de l'Algérie), les résultats sont satisfaisants de l'ordre du millimètre. Une comparaison entre les résultats des trois approches, selon les limites du réseau géodésique national, est illustrée suivant le tableau 3. Les approches utilisées pour l'extension d'un fuseau sont testées et validées par le passage direct et inverse pour une amplitude maximale $\Delta\lambda = 24^\circ$ (i.e., 12° de part et d'autre du méridien central), cela assure une couverture globale de l'Algérie.

Notant que les deux approches de GK et MT_IGN se basent sur le même principe qui est la transformation passant par une sphère tangente à l'équateur, la différence entre elles est la formulation mathématique utilisée. Cependant, l'approche de SCM utilise une sphère de courbure moyenne. Les critères de choix de l'une des approches sont comme suit :

- le champ d'application le plus étendu (Tableau 2),
- la variation des écarts en coordonnées géographiques entre le passage direct et inverse,
- la précision du calcul mathématique,
- la comparaison entre les résultats des trois approches (Tableau 3).

D'après l'analyse des résultats obtenus, les trois approches fournissent une précision satisfaisante pour une couverture du Nord de l'Algérie, assurant le millimètre dans le cas le plus défavorable (cas de l'approche de SCM).

En ce qui concerne la couverture totale du pays, les approches GK et MT_IGN sont à recommander.

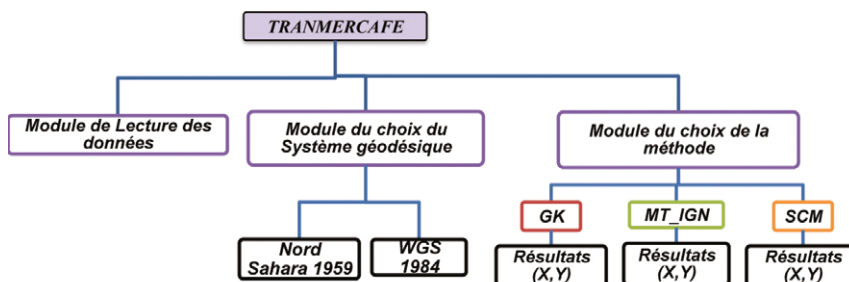


Figure 5. Organigramme des principaux modules du programme TRANMERCAFE.

Point	λ°	φ°	GK			MT_IGN		SCM	
			$d\lambda$ (10^{-6} mm)	$d\varphi$ (10^{-6} mm)	K	$d\lambda$ (10^{-3} mm)	$d\varphi$ (10^{-3} mm)	$d\lambda$ (mm)	$d\varphi$ (mm)
1	-12	38	0.0	0.0	1.0138	-0.6	0.8	1728	1 26
2	-9	20	0.1	0.3	1.0111	-0.1	0.7	258	13
3	12	38	0.0	0.0	1.0138	0.6	0.8	-1728	126
4	12	20	-0.1	0.3	1.0198	0.1	0.7	-1094	71
5	9	36	-0.1	0.0	1.0081	0.4	0.8	-414	23
6	-3	36	0.0	0.0	1.0009	-0.1	0.8	1	0.0
7	9	32	0.3	0.6	1.0090	0.3	0.7	-407	23
8	-3	32	0.0	0.0	1.0010	-0.1	0.8	1	0.0

Tableau 2. Écarts entre les passages direct et inverse des trois approches. Le facteur d'échelle K est calculé par l'équation dans l'annexe A4.



Figure 6. Distribution géographique des points tests.

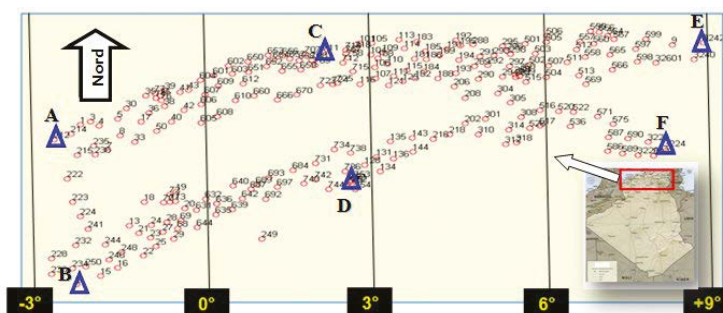


Figure 7. Réseau géodésique primordial national (IGN). Les points en triangles sont considérés comme points critiques utilisés dans le test des différentes méthodes.

point	λ°	φ°	SCM - MT_IGN		MT_IGN - GK		GK - SCM	
			ΔX (mm)	ΔY (mm)	ΔX (mm)	ΔY (mm)	ΔX (mm)	ΔY (mm)
5	9	36	414	23	4×10^{-4}	8×10^{-4}	414	23
6	-3	36	1	8×10^{-4}	1×10^{-4}	8×10^{-4}	1	8×10^{-4}
7	9	32	407	23	3×10^{-4}	7×10^{-4}	407	23
8	-3	32	1	8×10^{-4}	1×10^{-4}	8×10^{-4}	1	0

Tableau 3. Les écarts entre les trois approches exprimés en mm (cas du Nord de l'Algérie). Ces écarts sont des différences entre coordonnées issues de deux projections.

Application et résultats

L'application et la validation du programme TRANMERCAFE ont été effectuées sur le réseau primordial Algérien, réalisé par l'IGN/France en 1955. Le réseau disponible contient 239 points de 1^{er} ordre (cf. figure 7) s'étalant sur toute la partie Nord de l'Algérie, couvrant ainsi trois fuseaux UTM (30, 31 et 32). L'ellipsoïde de référence est celui du Clarke 1880 Anglais¹. Une étude comparative est faite entre chaque approche avec elle-même et avec les autres approches. Les tableaux ci-après donnent les statistiques des résultats des différentes méthodes.

Dans le tableau 4, on affiche les statistiques relatives aux différences en coordonnées géographiques (exprimées en mm), issues de l'aspect direct et inverse de chaque méthode. Les valeurs maximales des approches GK et MT_IGN, ne dépassent pas 10^{-3} mm. En revanche, des valeurs centimétriques, voire même décimétriques sont observées, dans le cas de la méthode SCM.

¹ Les paramètres de l'ellipsoïde de Clarke 1880 Anglais sont : $a = 6378249.145$ m et $1/f = 293.465$.

D'après le tableau 5, qui illustre les différences de coordonnées géographiques (aspect direct et inverse) aux points critiques, il est clair que les deux méthodes, GK et MT_IGN, donnent

les meilleures précisions de l'ordre de 10^{-3} à 10^{-7} mm. Par contre, la méthode SCM exprime des écarts décimétriques, notamment aux points E et F (qui se trouvent à l'extrême Est du réseau). Cela s'explique par leur éloignement du méridien central à 9° de longitude.

Enfin, le tableau 6 donne les écarts absolus entre les différentes méthodes. D'après les résultats obtenus, les approches de GK et MT_IGN sont les plus appropriées pour le réseau géodésique primordial. Cependant, il s'avère que l'approche GK est celle dont la précision de calcul pour le champ d'application étendu (cas de l'Algérie) est la meilleure. Par conséquent, il est à recommander d'exprimer le réseau géodésique suivant cette projection.

	SCM		MT_IGN		GK	
	$\Delta \lambda$ (mm)	$\Delta \varphi$ (mm)	$\Delta \lambda$ (mm)	$\Delta \varphi$ (mm)	$\Delta \lambda$ (mm)	$\Delta \varphi$ (mm)
Max	0.8	28.1	5×10^{-4}	9.2×10^{-4}	4×10^{-7}	17×10^{-7}
Moy	-37.2	1.8	1×10^{-4}	8.5×10^{-4}	-0.1×10^{-7}	-1×10^{-7}
Min	-478.8	-17×10^{-7}	-1×10^{-4}	7.8×10^{-4}	-4×10^{-7}	-11×10^{-7}

Tableau 4. Statistiques des différences en coordonnées géographiques exprimées en mm, par approche.

Point	SCM		MT_IGN		GK	
	$\Delta \lambda$ (mm)	$\Delta \varphi$ (mm)	$\Delta \lambda$ (mm)	$\Delta \varphi$ (mm)	$\Delta \lambda$ (mm)	$\Delta \varphi$ (mm)
A	0.7	22×10^{-3}	-1×10^{-4}	8.8×10^{-4}	-4×10^{-8}	-5×10^{-7}
B	0.3	$10. \times 10^{-3}$	-0.8×10^{-4}	8.1×10^{-4}	4×10^{-8}	6×10^{-7}
C	-0.5	16×10^{-3}	1×10^{-4}	9.2×10^{-4}	8×10^{-8}	-5×10^{-7}
D	-1.6	50×10^{-3}	1×10^{-4}	8.5×10^{-4}	0	-5×10^{-7}
E	-478.8	29.1	5×10^{-4}	9.0×10^{-4}	4×10^{-7}	6×10^{-7}
F	-322.2	18.0	4×10^{-4}	8.4×10^{-4}	1×10^{-7}	0

Tableau 5. Différences en coordonnées géographiques exprimées en mm, aux points critiques du réseau primordial (cf. figure 7).

Point	SCM - MT_IGN		MT_IGN - GK		SCM - GK	
	$\Delta \lambda$ (mm)	$\Delta \varphi$ (mm)	$\Delta \lambda$ (mm)	$\Delta \varphi$ (mm)	$\Delta \lambda$ (mm)	$\Delta \varphi$ (mm)
A	0.712	0.021	1×10^{-4}	8.7×10^{-4}	0.69	0.021
B	0.28	0.009	7×10^{-5}	8.2×10^{-4}	0.299	0.009
C	0.53	0.015	1×10^{-4}	9.1×10^{-4}	0.529	0.015
D	1.57	0.049	1×10^{-4}	8.4×10^{-4}	1.569	0.049
E	478.76	29.09	4×10^{-4}	8.9×10^{-4}	478.779	29.089
F	322.19	17.9	3×10^{-4}	8.4×10^{-4}	322.199	17.9

Tableau 6. Écarts absolus entre les trois approches aux points critiques du réseau primordial.



Conclusion

La présente étude s'insère dans le cadre de l'application de la représentation du territoire Algérien suivant un seul fuseau en gardant une meilleure précision possible, en passant des coordonnées géographiques aux coordonnées cartésiennes (projection) et inversement. Cela était réalisé par le programme TRANMERCAFE.

La méthode de l'extension de fuseau permet d'avoir une précision millimétrique (± 1 mm), de part et d'autre du méridien central, pour une longitude d'amplitude de $\Delta \lambda = 18^\circ$ (cas de l'Algérie). Cette extension a été réalisée par trois approches : la projection de Mercator Transverse (MT_IGN), le passage par la sphère de courbure moyenne (SCM) et la projection de Gauss-Krüger (GK). Les approches de GK et MT_IGN fournissent une précision largement suffisante de l'ordre de (10^{-6} mm et 10^{-3} mm) respectivement, entre passages direct et inverse, elles sont par conséquent à recommander. Tandis que la 3^e approche de SCM permet d'atteindre une précision décimétrique lorsqu'on s'éloigne du méridien central ($C\Delta \lambda = 18^\circ$).

L'avantage majeur de l'extension de fuseau, c'est qu'il permet la matérialisation d'un système de référence, comme le Nord Sahara 1959, par un système de coordonnées unique permettant d'exprimer tout le réseau géodésique national Algérien, dans un même repère avec un gain en précision. Notre étude s'est limitée à la transformation des coordonnées géographiques en coordonnées fuseau étendu UTM et inversement, il serait intéressant de l'étendre, aux calculs

géodésiques tels que : le module linéaire ellipsoïde plan (m) ; correction de réduction à la corde (dv) et convergence des méridiens, pour des applications d'ajustement de réseaux et de cartographie. ●

Contacts

Bachir GOURINE - Abdesselam DAOUADI
Hebib TAIBI

Département de Géodésie Spatiale, Centre des Techniques Spatiales (CTS)

Arzew, Oran, Algérie.

bachirgourine@yahoo.com

bgourine@cts.asal.dz

Ali BENAHMED DAHO - Mohamed PACHA

Institut National de Cartographie

et de Télédétection (INCT)

Alger, Algérie.

Remerciements

Ce travail s'inscrit dans le cadre d'un projet de collaboration nationale (CTS/INCT) pour la réfection du réseau géodésique national (Nord Sahara 1959). Les auteurs tiennent à exprimer leur gratitude aux éléments, des deux institutions CTS et INCT, qui ont contribué à ce projet.

Bibliographie

Adams O. S., 1921 *Latitude developments connected with geodesy and cartography*, special publications n°67, USA, 1921.

Chirouf A., 1987 *Extension d'un fuseau UTM*. Mémoire d'ingénieur d'état, Centre National des Techniques Spatiales (CNTS) - Arzew, Juin 1987.

Daouadi A., 2015 *Ajustement d'un réseau géodésique étendu en utilisant le fuseau étendu de la projection UTM*. Mémoire d'ingénieur d'état, Centre des Techniques Spatiales (CTS, ex. CNTS) - Arzew, 17 mars 2015.

Deakin R.E., M. N. Hunter and C. F. F. Karney 2010 *The gauss-Kruger projection*. Victorian Regional Survey Conference, Warrnambool - Australia, 10-12 September, 2010.

IGN, 1995 *Projection cartographique de Mercator Transverse (Algorithmes)*, Notes techniques NT/G76, IGNFrance, 1995.

Karney F., 2011 *Transverse Mercator projection with an accuracy of few nanometers*, Journal of geodesy, USA, 2011.

Krüger L., 1912 *Konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene (Conformal mapping of the ellipsoidal earth to the plane)*, Potsdam, 1912.

Levallois J., 1970 *Géodésie classique bidimensionnelle*, Tome2, Edition Eyrolles, 1970.

Reyt A., 1960 *Les principes étapes de la géodésie en Afrique du nord*, IGN - France, 1960.

ABSTRACT

Key-words: UTM projection, Gauss-Krüger Projection, Transverse Mercator Projection, Passage by sphere with mean radius, Extended zone, Direct and inverse passages, Nord Sahara 1959 (NS-59).

The UTM projection, which was adopted as grid projection of the Algerian national geodetic System (Nord Sahara 1959), covers Algeria by four zones. The junction zones located between two adjacent zones, present a problem in geodetic applications (triangulation) also for mapping in great scales (local works), caused by important alterations. In this paper, a program named TRANMERCAFE was developed and it permits to project Algeria in one extended zone. Both application and validation of this program were realized on important part of the primordial bi-dimensional geodetic network, composed of 239 points covering the northern part of Algeria, with adoption of three methods: the Transverse Mercator Projection, the use of the intermediate mean radius sphere, and the Gauss-Krüger Projection. The results obtained from each method and their comparisons are shown and discussed.

Annexe

❖ Algorithme de la projection de Gauss-Krüger (GK) :

➤ Cas direct : Tranmerc_dir

Pour réaliser cette transformation, on doit d'abord calculer :

- La longueur de l'arc d'un méridien β , suivant (A1.1).
- La longueur quadratique de l'ellipsoïde Q qui est la longueur d'un arc de méridien compté à partir de l'équateur jusqu'au pôle, elle est calculée à partir de la formule de β pour $\varphi = \pi/2$ tel que :

$$\beta\left(\frac{\pi}{2}\right) = Q = \frac{a\pi}{2(1+e)} C_0$$

- Le rayon rectifiant A , qui est un rayon de parallèle qui a la même circonférence que l'ellipse méridienne.

$$A = \frac{2Q}{\pi} = \frac{a}{(1+e)} \left(1 + \frac{e^2}{4} + \frac{e^4}{64} + \frac{e^6}{256} + \frac{25e^8}{16384} + \dots \right)$$

- La latitude rectifiée μ déterminée par (A2).
- La latitude conforme ϕ exprimée dans (A3).

A- Passage de l'ellipsoïde vers la sphère (projection de Gauss-Schreiber) :

Les équations pour la projection de Transverse Mercator d'une sphère conforme sont exprimées en fonction de la latitude conforme, telles que :

$$\begin{cases} x = R \sinh^{-1} \left(\frac{\sin \Delta\lambda}{\sqrt{\tan^2 \phi + \cos^2 \Delta\lambda}} \right) \\ y = R \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\operatorname{tg} \phi}{\cos \Delta\lambda} \right) \end{cases}$$

On pose :

$$\delta = \sinh \left(e \cdot \operatorname{tgh}^{-1} \left(\frac{e \cdot \operatorname{tg} \phi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \phi}} \right) \right)$$

On obtient :

$$\operatorname{tg} \phi = \operatorname{tg} \varphi \sqrt{1 + \delta^2} - \delta \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}$$

B- Passage de la projection de Gauss-Schreiber vers la projection de Gauss-Krüger :

En utilisant la théorie de la conformité d'une projection et les fonctions complexes et on suppose que :

$$\frac{1}{A} Z = f(z)$$

$$\frac{1}{A} (Y + iX) = f(y + ix)$$

avec :

$z = y + ix$: la projection de Gauss-Schreiber sur le plan

$Z = Y + iX$: la projection de Gauss-Krüger sur le plan

A : rayon rectifiant.

où l'axe des X est l'image de l'équateur et l'axe des Y est l'image de méridien central.

$$Z = f(y + ix) = \frac{y}{R} + i \frac{x}{R} + \sum_{r=1}^{\infty} U_{2r} \sin(2rz)$$

Par séparation de la partie entière de la partie imaginaire, en s'arrêtant à l'ordre $r=8$, on obtient :

$$\begin{cases} X1 = A \left(\frac{x}{R} + \sum_{r=1}^{\infty} U_{2r} \cos(2r \frac{y}{R}) \sinh(2r \frac{x}{R}) \right) \\ Y1 = A \left(\frac{y}{R} + \sum_{r=1}^{\infty} U_{2r} \sin(2r \frac{y}{R}) \cosh(2r \frac{x}{R}) \right) \end{cases}$$

Les coefficients U_{2r} sont donnés par (A3.3). On aura finalement :

$$\begin{cases} X = K_0 \cdot X1 + Cx \\ Y = K_0 \cdot Y1 + Cy \end{cases}$$

- $(X1, Y1)$ sont comptées à partir de l'intersection de l'image de l'équateur et le méridien central de longitude λ_0 .
- (Cx, Cy) sont des constantes à ajouter afin d'avoir (X, Y) en coordonnées positives dans la zone d'étude. ($Cx = 500\,000$ m, $Cy = 0$).

► **Cas inverse : Tranmerc_inv**

A- Passage du plan de la projection de Gauss-Kruger vers la projection Gauss-Schreiber :

D'une manière similaire que pour le passage direct, on suppose que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} z &= \mathcal{F}(Z) \\ \frac{1}{a} (y + ix) &= \mathcal{F}(Y + iX) \\ \text{Où } z &= y + ix \text{ la projection de Gauss-Schreiber sur le plan} \\ Z &= Y + iX \text{ la projection de Gauss-Kruger sur le plan} \\ z &= \mathcal{F}(Y + iX) = \frac{Y}{A} + i \frac{X}{A} + \sum_{r=1}^{\infty} V_{2r} \sin(2rZ) \end{aligned}$$

Et on a (X, Y), (Cx, Cy) et K0 :

$$X1 = \frac{X - Cx}{K0} ; \quad Y1 = \frac{Y - Cy}{K0}$$

Par séparation de la partie entière de la partie imaginaire, jusqu'à r=8, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{x}{a} = \frac{X1}{A} + \sum_{r=1}^{\infty} V_{2r} \cos(2r \frac{Y1}{A}) \sinh(2r \frac{X1}{A}) \\ \frac{y}{a} = \frac{Y1}{A} + \sum_{r=1}^{\infty} V_{2r} \sin(2r \frac{Y1}{A}) \cosh(2r \frac{X1}{A}) \end{cases}$$

C'est un passage entre deux plans, en passant ensuite au coordonnées sur la sphère par :

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\sin(\frac{Y}{a})}{\sqrt{\sinh^2(\frac{X}{a}) + \cos^2(\frac{Y}{a})}}$$

$$\operatorname{tg} \Delta\lambda = \frac{\sinh(\frac{X}{a})}{\cos(\frac{Y}{a})}$$

B- Passage de la projection de Gauss-Schreiber vers l'ellipsoïde :

La longitude λ est déterminée par la formule suivante : $\lambda = \Delta\lambda - \lambda_0$

La latitude φ est obtenue après avoir déterminé la latitude conforme ϕ sur la sphère. Ce calcul se base sur une méthode itérative.

Posons :

$$\begin{cases} t = \operatorname{tg} \phi \\ t' = \operatorname{tg} \phi \end{cases} \quad \text{alors} \quad t' = t\sqrt{1 + \sigma^2} - \sigma\sqrt{1 + t^2}$$

et

$$\sigma = \sinh \left[e \operatorname{tgh}^{-1} \left(\frac{e \cdot t}{\sqrt{1 + t^2}} \right) \right]$$

La variable t peut être évaluée par la méthode de calcul itératif de Newton-Raphson pour les racines réels de l'équation $f(t) = 0$ telle que :

et

$$t_{i+1} = t_i - \frac{f(t_i)}{f'(t_i)}$$

avec

$$f(t) = t\sqrt{1 + \sigma^2} - \sigma\sqrt{1 + t^2} - t'$$

donc

$$f'(t) = \frac{d}{dt} [f(t)]$$

$$f'(t) = (\sqrt{1 + \sigma^2} \sqrt{1 + t^2} - \sigma t) \frac{(1 - e^2) \sqrt{1 + t^2}}{1 + (1 - e^2) t^2}$$

Pour initialiser le calcul, on prend : $t_1 = t' = \operatorname{tg} \phi$ et on détermine $\begin{cases} f(t_1) = f(\operatorname{tg} \phi) \\ f'(t_1) = f'(\operatorname{tg} \phi) \end{cases}$. Ce calcul s'arrête quand le critère d'arrêt sera satisfait $|t_{i+1} - t_i| \leq \text{eps}$. Par exemple : $\text{eps} = 10^{-13}$ rd.

A la fin, on obtient : $\varphi = \operatorname{tg}^{-1}(t_{i+1})$.



❖ **Algorithme de la projection de Transverse Mercator de l'IGN [IGN, 1995]**

➤ **Cas direct : MT_IGN_étendu_dir**

Pour réaliser ce passage, il faut introduire les paramètres suivants :

$$a, e, Cx, Cy, \lambda_0, \lambda, \varphi, R1 \text{ et } \Delta\lambda, \text{ où } \begin{cases} R1 = k0 \cdot a \\ \Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 \\ Cx = 500\,000 \text{ m} \\ Cy = 0 \text{ m} \end{cases}$$

$R1$: rayon de la sphère intermédiaire.

λ_0 : longitude du méridien central.

$k0$: facteur d'échelle sur le méridien central (=0,9996).

CX, CY : Constantes de la projection Transverse Mercator suivant X et Y, respectivement.

A- Passage de l'ellipsoïde vers la sphère :

- Calcul de la longueur de l'arc d'un méridien β , à partir de (A1.2).
- Calcul de la latitude isométrique L_e et la latitude croissante L_s sont obtenues, à partir de (A3).
- Calcul de longitude sphérique Λ , telle que :

$$\Lambda = \arctg\left(\frac{\sinh L_s}{\cos \Delta\lambda}\right)$$

B- Passage de la sphère vers le plan

Posons : $Z = f(z)$ c'est-à-dire $(Y + iX) = f(\Lambda + iL_s)$

Où : $z = (\Lambda + iL_s)$ les coordonnées sont exprimées sur la sphère.

$Z = Y + iX$ la projection de TM (sphère) sur le plan

Donc la formule générale, sous forme d'un polynôme de 1^{er} degré, sera :

$$Z = f(\Lambda + iL_s) = R1 U_1 z + R1 \cdot \sum_{r=1}^4 U_{r+1} \sin(2rz)$$

Avec : $\sin(2rz) = \sin(2r\Lambda) \cosh(2rL_s) + i \cos(2r\Lambda) \sinh(2rL_s)$

et

$$\begin{aligned} U_1 &= 1 - e^2/4 - 3e^4/64 - 5e^6/256 - 175e^8/16384 \\ U_2 &= e^2/8 - e^4/96 - 9e^6/1024 - 901e^8/184320 \\ U_3 &= 13e^4/768 + 17e^6/5120 - 311e^8/737280 \\ U_4 &= 61e^6/15360 + 899e^8/430080 \\ U_5 &= 49561e^8/41287680 \end{aligned}$$

Par séparation de la partie entière de la partie imaginaire, on obtient :

$$\begin{cases} X = \text{Im}(Z) + Cx \\ Y = \text{Re}(Z) + Cy \end{cases}$$

D'où :

$$\text{Im}(Z) = R1 [U_1 L_s + U_2 \cos(2\Lambda) \sinh(2L_s) + U_3 \cos(4\Lambda) \sinh(4L_s) + U_4 \cos(6\Lambda) \sinh(6L_s) + U_5 \cos(8\Lambda) \sinh(8L_s)] + Cx$$

$$\text{Re}(Z) = R1 [U_1 \Lambda + U_2 \sin(2\Lambda) \cosh(2L_s) + U_3 \sin(4\Lambda) \cosh(4L_s) + U_4 \sin(6\Lambda) \cosh(6L_s) + U_5 \sin(8\Lambda) \cosh(8L_s)] + Cy$$





➤ **Cas inverse : MT_IGN_étendu_inv**

A- Passage du plan vers la sphère :

- Calcul de $(X1, Y1)$: Posons $Z = Y1 + iX1$; ce qui fait que le passage inverse sera en fonction de z par :
 $z = \mathcal{F}(Z)$

Par conséquent, $z = \mathcal{F}(Y1 + iX1)$

$$Y1 = \frac{Y - Cy}{R1 V1} \quad ; \quad X1 = \frac{(X - Cx)}{R1 V1}$$

Où $V1$ est calculé en fonction de e , voir ci-après.

- Calcul de z : donné sous la forme d'un polynôme de 1^{er} degré, il s'exprime par :

$$z = Z - \sum_{r=1}^4 V_{r+1} \sin(2r Z)$$

Avec : $\sin(2r Z) = \sin(2r Y1) \cosh(2r X1) + i \cos(2r Y1) \sinh(2r X1)$

donc

$$\begin{cases} \text{Le} = \text{Re}(z) \\ \quad = Y1 - V2 \cos(2 Y1) \sinh(2 X1) - V3 \cos(4 Y1) \sinh(4 X1) \\ \quad \quad - V4 \cos(6 Y1) \sinh(6 X1) - V5 \cos(8 Y1) \sinh(8 X1) \\ \text{Ls} = \text{Im}(z) \\ \quad = X1 - V2 \sin(2 Y1) \cosh(2 X1) - V3 \sin(4 Y1) \cosh(4 X1) \\ \quad \quad - V4 \sin(6 Y1) \cosh(6 X1) - V5 \sin(8 Y1) \cosh(8 X1) \end{cases}$$

Où :

$$\begin{aligned} V1 &= 1 - e^2/4 - 3.e^4/64 - 5.e^6/256 - 175.e^8/16384 \\ V2 &= e^2/8 + e^4/48 + 7.e^6/2048 + e^8/61440 \\ V3 &= e^4/768 + 3.e^6/1280 + 559.e^8/368640 \\ V4 &= 17.e^6/30720 + 283.e^8/430080 \\ V5 &= 4397.e^8/41287680 \end{aligned}$$

• Calcul de (λ, ϕ) : la longitude λ et la latitude sphérique ϕ sont données par les formules suivantes :

$$\lambda = \lambda_0 + \arctg\left(\frac{\sinh Ls}{\cos Le}\right)$$

$$\phi = \arcsin\left(\frac{\sin Le}{\cosh Ls}\right)$$

B- Passage de la sphère vers l'ellipsoïde

La latitude géographique ϕ est déterminée par procédé itératif. Tout d'abord, on calcule la latitude croissante Ls , puis on détermine la solution initiale de ϕ par :

$$\phi_0 = 2 \arctg(e^{Ls}) - \frac{\pi}{2}$$

En incrémentant cette expression, on aura sa forme générale telle que :

$$\phi_i = 2 \arctg\left[\left(\frac{1 + e \sin \phi_{i-1}}{1 - e \sin \phi_{i-1}}\right)^{\frac{e}{2}} e^{Ls}\right] - \frac{\pi}{2}$$

En calculant ϕ_i , pour i de 1 jusqu'à que le critère d'arrêt soit satisfait (i.e., $|\phi_i - \phi_{i-1}| < \text{eps}$), on obtient, finalement : $\phi = \phi_i$



❖ Algorithme de la projection de la sphère à courbure moyenne (SCM) [Chirouf, 1987]

➤ Cas direct : SCM_étendu_dir

A- Passage de l'ellipsoïde vers la sphère :

Cette représentation réduit considérablement les calculs par l'élimination des termes de l'excentricité. Les géodésiens considèrent que les deux surfaces (l'ellipsoïde et la sphère) sont voisines l'une par rapport à l'autre. Le rapport de similitude entre elles est très proche de l'unité et le calcul des longueurs sur l'ellipsoïde se déduit à partir de celui des longueurs correspondantes sur la sphère. Ce dernier est facile à déterminer grâce à la trigonométrie sphérique. Cette représentation vérifie les conditions suivantes :

- Les longueurs sur les parallèles centraux sont conservées.
- Les courbures géodésiques de ces parallèles sont égales.

L'égalité des courbures géodésiques des parallèles centraux permet d'écrire :

$$\frac{N_0 \cotg \varphi_0}{R \cotg \phi_0} = 1 \quad \text{donc} \quad \tg \phi_0 = \frac{R}{N_0} \tg \varphi_0$$

La conservation des longueurs sur les parallèles centraux nous donne :

$$\Delta \lambda_s R \cos \phi_0 = \Delta \lambda_e N_0 \cos \varphi_0 \quad \text{donc} \quad \frac{\Delta \lambda_s}{\Delta \lambda_e} = \frac{\sin \varphi_0}{\sin \phi_0} = n$$

On calcule également la longueur de l'arc ω sur la sphère correspondante à la longueur de la méridienne sur l'ellipsoïde, où ϕ est comptée en radians, et donnée par :

$$\omega = R \phi$$

Les coordonnées cartésiennes du plan sont données par :

$$\begin{cases} x = \frac{R}{2} \log \left(\frac{1 + \cos \phi \sin \Delta \lambda_s}{1 - \cos \phi \sin \Delta \lambda_s} \right) \\ y = R \arctg \left(\frac{\tg \phi}{\cos \Delta \lambda_s} \right) \end{cases}$$

B- Passage du plan (x,y) vers le plan (X,Y) :

On pose que : $Z = f(z)$ c'est-à-dire $(Y + iX) = f(y + ix)$

Cette transformation est réalisée grâce à la fonction analytique $Z = f(z)$ qui s'obtient par un développement limité de Taylor au voisinage du point $z_0 = \omega$ où z_0 est le point de l'axe y situé sur le parallèle du point donné.

Où : $z = (y + ix)$ Coordonnées exprimées dans plan de la projection de la sphère.

$Z = (Y + iX)$ Coordonnées de la transformée du plan.

$$Z = f(y + ix) = f(z_0) + \left(\frac{dZ}{dz} \right)_{z_0} (z - z_0) + \left(\frac{d^2 Z}{dz^2} \right)_{z_0} \frac{(z - z_0)^2}{2!} + \dots$$

Le développement de Z se réduit donc à :

$$Z = f(y + ix) = \beta + z - \omega + e'^2 \frac{\sin 2\varphi}{12 R^3 \sqrt{(1 + e'^2 \cos^2 \varphi)}} (z - \omega)^4 + \dots$$

Et par un changement de variables on trouve finalement :

$$Z = f(y + ix) = \beta + y - \omega + H \cos 4\theta + i(x + H \sin 4\theta)$$

$$\text{avec} \quad H = r^4 R e'^2 \frac{\sin 2\varphi}{12 \sqrt{(1 + e'^2 \cos^2 \varphi)}};$$

$$r = \frac{\sqrt{x^2 + (y - \omega)^2}}{R}$$

$$\theta = -\arctg \left(\frac{y - \omega}{x} \right)$$

$$\begin{cases} \delta Y = H \cos 4\theta \\ \delta X = H \sin 4\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y1 = \beta + y - \omega + \delta Y \\ X1 = x + \delta X \end{cases}$$

Si $\Delta \lambda_s < 5^\circ$, on considère que l'amplitude est faible, on peut donc simplifier le calcul des corrections $\delta Y, \delta X$ comme suit :

$$\begin{cases} \delta Y = 4H \theta = -4H \frac{y - \omega}{x} \\ \delta X = H \end{cases}$$

Où la longueur d'un arc de méridien β est calculée par (A1.3).

Afin d'obtenir les coordonnées (X,Y), il suffit donc de multiplier les coordonnées (X1,Y1) par le facteur d'échelle K, (Cx,Cy) sont des constantes à ajouter. On aura donc :

$$\text{On obtient donc : } \begin{cases} X = K \cdot X1 + Cx \\ \text{et} \\ Y = K \cdot Y1 + Cy \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} Cx = 500\,000 \text{ m} \\ Cy = \begin{cases} 0 \text{ m pour } \varphi > 0 \\ 10\,000\,000 \text{ m pour } \varphi < 0 \end{cases} \\ K0 = 0.9996 \end{cases}$$



► **Cas Inverse : SCM_étendu_inv**

A- Passage du plan vers la sphère :

Les coordonnées planes (X1, Y1) sont obtenues par :

$$\begin{cases} X1 = \frac{X - Cx}{K0} \\ Y1 = \frac{Y - Cy}{K0} \end{cases}$$

Les coordonnées géographiques sur la sphère (λ_s, ϕ) sont obtenues par la transformation suivante :

$$\begin{cases} \phi = \arcsin\left(\frac{\sin\left(\frac{Y}{R}\right)}{\cosh\left(\frac{X}{R}\right)}\right) \\ \Delta\lambda_s = \arctg\left(\frac{\sinh\left(\frac{X}{R}\right)}{\cos\left(\frac{Y}{R}\right)}\right) \end{cases}$$

B- Passage de la sphère vers l'ellipsoïde :

A priori la valeur du rayon R est inconnue. Il faut donc procéder par itération. Pour le calcul itératif, les conditions initiales sont :

$$\begin{cases} x_0 = X1 \\ y_0 = Y1 \\ \delta x = 0 \\ \delta y = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \varphi_0 = Y1 \sin(0.1 \text{ dmgr}) \\ R_0 = a^2 / b(1 + e'^2 \cos^2 \varphi_0) \end{cases}$$

À l'itération i, on calcule à partir de $x_{i-1}, y_{i-1}, R_{i-1}$:

$$\phi_i = \arcsin\left(\frac{\sin\left(\frac{y_{i-1}}{R_{i-1}}\right)}{\cosh\left(\frac{x_{i-1}}{R_{i-1}}\right)}\right)$$

En introduisant une variable auxiliaire ψ_i telle que : $\psi_i = \operatorname{arcsinh}(e' \sin 2\phi_i)/2$, on tire :

$$\varphi_i = \arccos\left(\frac{\cos\phi_i}{\cosh\psi_i}\right)$$

Alors :

$$\begin{aligned} R_i &= \frac{a^2}{b(1 + e'^2 \cos^2 \varphi_i)} \\ \omega_i &= R_i \phi_i \\ H_i &= \left(\frac{x_{i-1}}{R_i}\right)^4 R_i e'^2 \cdot \sin 2\varphi_i / 12 \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{cases} \delta Y_i = H_i \\ \delta X_i = -4 H_i \frac{y_{i-1} - \omega_i}{x_{i-1}} \end{cases}$$

On obtient donc :

$$\begin{cases} y_i = Y1 - \beta_i + \omega_i + \delta Y_i \\ x_i = X1 - \delta X_i \end{cases}$$

Ce calcul s'arrêtera une fois le critère $|\varphi_i - \varphi_{i-1}| < \text{eps}$ est satisfait.

Dès qu'on obtient les valeurs définitives de, y, ϕ , R, φ , on déterminera donc :

$$\Delta\lambda_s = \arctg\left(\frac{\sinh\left(\frac{X}{R}\right)}{\cos\left(\frac{Y}{R}\right)}\right)$$

En introduisant le rapport entre longitudes ellipsoïdique et sphérique, donné par :

$$n = \frac{\sin \varphi}{\sin \phi}$$

On aura, finalement :

$$\Delta\lambda_e = \frac{\Delta\lambda_s}{n}$$



A1. Calcul de la longueur d'un arc de méridien :

La formule générale de la longueur d'un arc de méridien est donnée par :

$$\beta = \int_0^\varphi \rho \, d\varphi = \int_0^\varphi \frac{a(1-e^2)}{W^3} \, d\varphi$$

avec :

$$W = (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}$$

1. Dans le cas de la méthode de la projection de Gauss-Krüger (GK), elle s'exprime par :

$$\beta = \frac{a}{(1+e)} [C_0 \varphi + C_2 \sin 2\varphi + C_4 \sin 4\varphi + C_6 \sin 6\varphi + C_8 \sin 8\varphi + C_{10} \sin 10\varphi + C_{12} \sin 12\varphi + C_{14} \sin 14\varphi + C_{16} \sin 16\varphi + \dots]$$

Où les coefficients C_{2i} sont déterminés, jusqu'à e^8 pour $i=0$ à 8:

$$\begin{aligned} C_0 &= 1 + e^2/4 + e^4/64 + e^6/256 + 25 e^8/16384 + \dots \\ C_2 &= -3 e^2/2 + 3 e^3/16 + 3 e^5/128 + 15 e^7/2048 + \dots \\ C_4 &= 15 e^2/16 - 15 e^4/64 - 75 e^6/2048 - 105 e^8/8192 - \dots \\ C_6 &= -35 e^3/48 + 175 e^5/768 + 245 e^7/6144 + \dots \\ C_8 &= 315 e^4/512 - 441 e^6/2048 - 1323 e^8/32768 - \dots \\ C_{10} &= -693 e^5/1280 + 2079 e^7/10240 + \dots \\ C_{12} &= 1001 e^6/2048 - 1573 e^8/8192 - \dots \\ C_{14} &= -6435 e^7/14336 + \dots \\ C_{16} &= 109395 e^8/262144 - \dots \end{aligned}$$

2. Dans le cas de la méthode de Transverse Mercator de l'IGN (MT_IGN), elle se calcule par :

$$\beta = C_1 \varphi + C_2 \sin(2\varphi) + C_3 \sin(4\varphi) + C_4 \sin(6\varphi) + C_5 \sin(8\varphi)$$

Où les coefficients C_i sont donnés, pour $i=1$ à 5 :

$$\begin{aligned} C_1 &= 1 - e^2/4 - 3 e^4/64 - 5 e^6/256 - 175 e^8/16384 \\ C_2 &= -3 e^2/8 - 3 e^4/32 - 45 e^6/1024 - 105 e^8/4096 \\ C_3 &= 15 e^4/256 + 45 e^6/1024 + 525 e^8/16384 \\ C_4 &= -35 e^6/3072 - 175 e^8/12288 \\ C_5 &= 315 e^8/131072 \end{aligned}$$

3. Dans le cas de la méthode du passage par la sphère de courbure moyenne (SCM), elle est donnée par :

$$\beta = \frac{a^2}{b} \left(C_0 - \frac{3}{2} e^2 C_2 + \frac{15}{8} e^4 C_4 - \frac{35}{16} e^6 C_6 + \frac{315}{128} e^8 C_8 \right)$$

Où, e est la deuxième excentricité et les coefficients A_r ($r=1,5$) sont calculés par:

$$\begin{aligned} C_0 &= \varphi \\ C_2 &= (C_0 + v)/2 \\ C_4 &= (3.C_2 + v.u)/4 \\ C_6 &= (5.C_4 + v.u^2)/6 \\ C_8 &= (7.C_6 + v.u^3)/8 \end{aligned}$$

avec :

$$u = \cos^2 \varphi \text{ et } v = \sin \varphi \cos \varphi$$

A2. Calcul de la latitude rectifiée μ :

D'après Adams [Adams, 1921], la latitude rectifiée μ est obtenue de manière que : "Si une sphère est déterminée de telle sorte que la longueur d'un grand cercle sur elle est égale en longueur à un méridien sur la terre, nous pouvons calculer les latitudes sur cette sphère telles que les arcs du méridien sont égaux aux arcs correspondants du méridien sur la terre". Elle est exprimée par :

$$\mu = \varphi + d_2 \sin 2\varphi + d_4 \sin 4\varphi + d_6 \sin 6\varphi + d_8 \sin 8\varphi + \dots$$

Les coefficients de d_{2i} sont calculés pour $i=1$ à 4:

$$\begin{aligned} d_2 &= -3 e^2/2 + 9 e^3/16 - \dots \\ d_4 &= 15 e^2/16 - 15 e^4/32 + \dots \\ d_6 &= -35 e^3/48 + \dots \\ d_8 &= 315 e^4/512 + \dots \end{aligned}$$

Dans le cas du calcul inverse, on peut calculer la latitude géographique, telle que:

$$\varphi = \mu + D_2 \sin 2\mu + D_4 \sin 4\mu + D_6 \sin 6\mu + D_8 \sin 8\mu + \dots$$

Les coefficients de D_{2i} pour $i=1$ à 4, sont:

$$\begin{aligned} D_2 &= 3e/2 - 27 e^3/32 - \dots \\ D_4 &= 21 e^2/16 - 55 e^4/32 + \dots \\ D_6 &= 151 e^3/48 - \dots \\ D_8 &= 1097 e^4/512 - \dots \end{aligned}$$



A3. Latitudes conforme(ϕ), isométrique (Le) et croissante (Ls) :

Soient à considérer les coordonnées suivantes :

- Λ, ϕ : longitude et latitude conforme sur la sphère, respectivement.
- λ, φ : longitude et latitude sur l'ellipsoïde, respectivement.
- Le : latitude isométrique sur l'ellipsoïde.
- Ls : latitude isométrique sur la sphère ou latitude croissante.

$$Le = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{\frac{e}{2}}$$

$$Ls = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right)$$

Une projection conforme de l'ellipsoïde (surface du datum) sur la sphère (surface de projection) est obtenue en réalisant la condition de conformité. Ceci mène à l'égalité entre la latitude croissante et la latitude isométrique, c.-à-d., (Ls = Le). Par conséquent, on peut tirer la latitude conforme ϕ par :

$$\phi = 2 \cdot \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{\frac{e}{2}} \right) - \frac{\pi}{2}$$

1. Dans le cas de la méthode de la projection de Gauss-Krüger (GK), la latitude conforme ϕ peut être exprimée sous la forme d'une série de Krüger [Krüger, 1912], telle que :

$$\phi = \varphi + g_2 \sin 2\varphi + g_4 \sin 4\varphi + g_6 \sin 6\varphi + g_8 \sin 8\varphi + \dots$$

Où les coefficients de g_{2r} pour $r=1$ à 4, sont:

$$g_2 = -2e + 2e^2/3 + 4e^3/3 - 82e^4/45 + \dots$$

$$g_4 = 5e^2/3 - 16e^3/15 - 13e^4/9 + \dots$$

$$g_6 = -26e^3/15 + 34e^4/21 + \dots$$

$$g_8 = 1237e^4/630 - \dots$$

2. D'une autre manière aussi, la latitude conforme ϕ peut être exprimée en fonction de la latitude rectifiée μ , suivant la série de Krüger développée jusqu'à l'ordre e^8 , telle que :

$$\phi = \mu + V_2 \sin 2\mu + V_4 \sin 4\mu + V_6 \sin 6\mu + V_8 \sin 8\mu + V_{10} \sin 10\mu + V_{12} \sin 12\mu + V_{14} \sin 14\mu + V_{16} \sin 16\mu + \dots$$

Les coefficients V_{2r} pour $r=1$ à 8, sont:

$$V_2 = -e/2 + 2e^2/3 - 37e^3/96 + e^4/360 + 81e^5/512 - 96199e^6/604800 + 5406467e^7/38707200 - 7944359e^8/67737600 + \dots$$

$$V_4 = -e^2/48 - e^3/15 + 437e^4/1440 - 46e^5/105 + 1118711e^6/3870720 + 51841e^7/1209600 - 24749483e^8/348364800 + \dots$$

$$V_6 = -17e^3/480 + 37e^4/840 + 209e^5/4480 - 5569e^6/90720 - 9261899e^7/58060800 + 6457463e^8/17740800 - \dots$$

$$V_8 = -4397e^4/161280 + 11e^5/504 + 830251e^6/7257600 - 466511e^7/2494800 - 324154477e^8/7664025600 + \dots$$

$$V_{10} = -4383e^5/161280 + 108847e^6/3991680 + 8005831e^7/63866880 - 22894433e^8/124540416 - \dots$$

$$V_{12} = -20648693e^6/638668800 + 16363163e^7/518918400 + 2204645983e^8/12915302400 + \dots$$

$$V_{14} = -219941297e^7/5535129600 + 497323811e^8/12454041600 + \dots$$

$$V_{16} = -191773887257e^8/3719607091200 + \dots$$

3. Pour le calcul inverse dans (GK), la latitude rectifiée est exprimée en fonction de la latitude conforme, telle que [Deakin, 2010] :

$$\mu = \phi + U_2 \sin 2\phi + U_4 \sin 4\phi + U_6 \sin 6\phi + U_8 \sin 8\phi + U_{10} \sin 10\phi + U_{12} \sin 12\phi + U_{14} \sin 14\phi + U_{16} \sin 16\phi + \dots$$

Les coefficients U_{2r} sont déterminés par, pour $r=1$ à 8 :

$$U_2 = e/2 - 2e^2/3 + 5e^3/16 + 41e^4/180 - 127e^5/288 + 7891e^6/37800 + 72161e^7/387072 - 18975107e^8/50803200 + \dots$$

$$U_4 = 13e^2/48 - 3e^3/5 + 557e^4/1440 + 281e^5/630 - 1983433e^6/1935360 + 13769e^7/28800 + 148003883e^8/174182400 - \dots$$

$$U_6 = 61e^3/240 - 103e^4/140 + 15061e^5/26880 + 167603e^6/181440 - 67102379e^7/29030400 + 79682431e^8/79833600 + \dots$$

$$U_8 = 49561e^4/161280 - 179e^5/168 + 6601661e^6/7257600 + 97445e^7/49896 - 40176129013e^8/7664025600 + \dots$$

$$U_{10} = 34729e^5/80640 - 3418889e^6/1995840 + 14644087e^7/9123840 + 2605413599e^8/622702080 + \dots$$

$$U_{12} = 212378941e^6/319334400 - 30705481e^7/10378368 + 175214326799e^8/58118860800 + \dots$$

$$U_{14} = 1522256789e^7/1383782400 - 16759934899e^8/3113510400 + \dots$$

$$U_{16} = 1424729850961e^8/743921418240 + \dots$$



A4. Facteur d'échelle et convergence de méridiens :

Le Facteur d'échelle est donné par l'expression:

$$K = K_0 \left(\frac{A}{a} \right) \sqrt{q^2 + p^2} \left(\frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \phi} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \phi + \cos^2 \Delta \lambda}} \right)$$

K_0 : facteur d'échelle suivant le méridien central (0,9996).

A : rayon rectifiant.

a : demi grand axe de l'ellipsoïde.

La convergence des méridiens est exprimée par :

$$\gamma = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{q}{p} \right) + \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\operatorname{tg} \phi \operatorname{tg} \Delta \lambda}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \phi}} \right)$$

Avec les paramètres (p, q) sont:

$$p = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} 2r U_{2r} \cos(2r \cdot \frac{y}{a}) \sinh(2r \cdot \frac{x}{a})$$

$$q = - \sum_{r=1}^{\infty} 2r U_{2r} \sin(2r \cdot \frac{y}{a}) \cosh(2r \cdot \frac{x}{a})$$

Les coefficients U_{2r} sont calculés jusqu'à l'ordre $r=8$, voir (A3.3).

Prix de l'AFT 2018 pour les Jeunes Ingénieurs diplômés en Topographie

Les étudiants des écoles d'ingénieurs sont invités à soumettre au comité de rédaction de la revue XYZ un article portant sur leur travail de fin d'études d'ingénieur géomètre-topographe. Les meilleurs articles seront récompensés et publiés dans la revue XYZ.

Un montant global de 2 000 euros est prévu en 2018, pour attribution en 2019.

Conditions de participation

- être âgé(e) de moins de 26 ans ;
- joindre l'attestation du diplôme d'ingénieur ;
- proposer au comité de rédaction de la revue XYZ un article de 6 pages au moins en français (environ 4000 mots, avec mots clés et un résumé en français et anglais), en vue d'une publication dans la revue, rajouter une présentation sommaire de son parcours (résumé du curriculum vitae) et suivre les consignes aux auteurs qui sont téléchargeables sur le site de l'AFT : www.aftopo.org ;
- soumettre le texte avec une proposition de mise en page (texte / illustrations) sous format PDF et joindre en fichiers attachés le texte seul en format modifiable (docx ou équivalent) avec les images et illustrations aussi en fichiers séparés intégrables (JPG ou équivalent) en résolution de 300 dpi minimum ;
- l'article doit être proposé et rédigé par le(la) candidat(e) seul(e). L'article soumis ne peut pas faire mention de "co-auteurs". Si le candidat souhaite signaler un travail mené en équipe dans le cadre d'un projet plus large, il ajoutera une note de remerciements introductive ou conclusive de son texte ;
- certifier que l'article n'a pas été soumis ou publié dans une autre revue ;

- la date limite pour la proposition des articles est le 31 octobre 2018 (pour les projets présentés dans les écoles cette année et les précédentes).

L'adhésion à l'AFT, dont l'abonnement à la revue XYZ, pour l'année 2019 sera offerte aux participants.

Comité d'attribution

Le comité de rédaction de la revue XYZ, assisté du conseil de l'association, est chargé de désigner le jury d'attribution du Prix de l'AFT et son président. Ce comité pourra associer un ou plusieurs représentants d'écoles françaises. La qualité du contenu scientifique et de la rédaction de l'article sont les critères essentiels retenus.

Publication des résultats

- les candidat(e)s seront informé(e)s individuellement des résultats au plus tard le 31 décembre 2018 ;
- les résultats du concours seront publiés dans la revue XYZ dans l'année suivant la publication des résultats ;
- le président du jury du prix ou son(sa) représentant(e) remettra le ou les prix à l'occasion d'une manifestation organisée par l'AFT.

Merci de transmettre votre proposition au président du jury du prix de l'AFT, par courriel à l'adresse suivante : [prixaft\(at\)aftopo.org](mailto:prixaft(at)aftopo.org)