

# Navigation hybride en couplage serré associant amers célestes et terrestres par la méthode du Plan des Sommets

Yves ROBIN-JOUAN

*La navigation par satellites (GPS puis GNSS<sup>1</sup>) et son augmentation (SBAS<sup>1</sup>) se sont imposées peu à peu comme technologies de base, dans le domaine de la Défense, puis dans le domaine des transports, notamment. Elles sont cependant soumises à des limitations significatives : pénalisation sur les routes maritimes qui s'ouvrent au nord des continents, indisponibilité relative dans les canyons urbains, les tranchées ouvertes, sous couverture végétale – sans parler des tunnels –, vulnérabilité au brouillage et au leurrage agressif. De plus elles sont inopérantes dans l'espace un peu au-delà des orbites des constellations<sup>2</sup>. Il est donc pertinent de rechercher des aides aux GNSS par des moyens alternatifs<sup>3</sup>. La navigation au sol et la navigation côtière peuvent recourir aux moyens électromagnétiques (radar, mesures de balises actives à terre), mais aussi aux relevés optiques d'amers terrestres répertoriés dans des bases de données. La navigation en haute mer et la navigation aérienne en-route peuvent recourir aux moyens inertiels et à des relevés optiques d'amers célestes suivis par leurs éphémérides (y compris des satellites). Dans tous les cas, de tels relevés optiques constituent des aides réellement efficaces, au prix d'un effort d'intégration et d'automatisation de l'optronique. La dépendance stratégique par rapport aux GNSS s'en trouve réduite, mais il reste à faire le traitement adéquat en aval.*

## MOTS-CLÉS

Hybridation, MPS, Plan des Sommets, couplage serré, optronique, algorithmes, paramétrage

racines historiques, notamment dans les sections de la page suivante, et de dégager les principes sur lesquels repose la méthode du Plan des Sommets (MPS). Le détail de la mise en œuvre de la méthode a déjà été publié et il n'est pas productif de le reprendre ici. Quelques cas d'usage sont diversément traités pour montrer comment la méthode MPS sait faire le point par hybridation de relevés célestes et de visées terrestres. Ces cas d'usage et la conclusion reviennent sur des épisodes marquants du passé.

## Principes de l'approche proposée

L'approche initiale remonte aux années 1990 [2], en partant d'une formulation propre à la navigation par satellites. Elle s'est focalisée sur la navigation astronomique avant de retourner à la navigation par satellites [3] puis d'être généralisée à la navigation aux amers terrestres [4,5]. Dans tous ces domaines, c'est une approche directe, capable de s'affranchir de toute position estimée ou supposée. L'ensemble a été conduit dans le respect de cinq principes fondamentaux :

1. rechercher la linéarité, pour la simplicité et l'aptitude à traiter indifféremment un grand nombre de mesures ;
2. fonder la méthode sur une base géométrique rigoureuse assurant efficacité et robustesse ;
3. privilégier les dimensions horizontales (2D) par rapport à l'altitude, qui parfois importe moins ;
4. adopter un paramétrage combiné en altitude et en temps (1D+T) pour d'éventuelles itérations (notamment avec des mesures de satellites) ;

## Introduction

En réponse aux besoins du Navire Autonome comme du Véhicule Autonome, il est proposé un processus de navigation hybride directe, avec la méthode du Plan des Sommets comme base méthodologique commune. Cette approche travaille sur les données brutes issues des capteurs, pour une hybridation en couplage serré, qui peut éventuellement se passer de moyens inertiels. La formulation est globalisée sous forme d'une équation vectorielle unique intégrant les mesures de tous

les capteurs. Des informations vont être rappelées sur les caractéristiques analytiques des Sommets, pour 4 classes de cibles mesurées : astre, satellite, amer terrestre isolé ou couple d'amers distants.

Cet article est une version enrichie de la contribution de l'auteur au symposium sur la Navigation qui s'est tenu à *Mystic Seaport*, au bord de la côte est américaine, du 3 au 5 novembre 2017 [1]. De ce fait, il a conservé un peu de l'ambiance de "vieille marine" dans laquelle a baigné le symposium.

L'idée directrice est de rappeler les

1 GNSS = Global Navigation Satellite Systems et SBAS = Satellite Based Augmentation Systems (EGNOS en Europe).

2 Il n'est pas encore réaliste de déployer une constellation autour d'une planète pour faciliter son exploration ! Pour leur progression lente sur Mars, les robots actuels (rovers) font appel à des viseurs d'étoiles et à une hybridation avec des capteurs inertiels.

3 Les moyens alternatifs sont classés sous la rubrique APNT : Alternative Positioning Navigation and Timing systems, vocable introduit par l'Aviation américaine (FAA). Certains systèmes tactiques de navigation sont désormais spécifiés pour s'affranchir d'une indisponibilité du GPS pendant 18 heures.



5. permettre une hybridation directe, en couplage serré, sans forcément recourir aux moyens inertiels.

La méthode a été présentée de manière élogieuse mais concise, en transition avant d'aborder le GPS, dans l'ouvrage de référence du regretté Jean-José Ségeric sur la Navigation Astronomique [6].

### ■ Formulation linéaire

Il semble bien que la première tentative de formulation linéaire en navigation ait été faite par Antoine Yvon-Villarceau, horloger puis astronome et mathématicien au Bureau des longitudes, dans sa "Nouvelle Navigation Astronomique" [7]. L'objectif était de promouvoir l'utilisation des chronomètres de marine, "nouvelle" par rapport à celle des distances lunaires, et de justifier la méthode des droites de hauteur, développée par le commandant Marcq Saint-Hilaire en 1875. À cet effet, Yvon-Villarceau a repris les concepts de base de la navigation. Dans son 1<sup>er</sup> chapitre théorique, il a défini en coordonnées cartésiennes les équations des plans supports des cercles de hauteur, auxquelles s'ajoute l'équation de la sphère terrestre (de rayon unité), sous la forme que voici :

$$e = a x + b y + c z \quad [e = \sin h]$$

$$e' = a' x + b' y + c' z \quad [e' = \sin h']$$

$$1 = x^2 + y^2 + z^2$$

où  $h$  et  $h'$  sont les hauteurs vraies de 2 astres au-dessus de l'horizon. Le calcul de  $x, y, z$  donne les coordonnées de la position inconnue.

Yvon-Villarceau écrit après que c'est généralisable à  $n$  observations.

Mais il ne recommande pas l'emploi de cette formulation directe, "à cause de la longueur des calculs qu'elle nécessite" ; en 1877 c'est compréhensible...



Antoine Yvon-Villarceau

La suite de l'ouvrage est recentrée sur l'emploi des coordonnées sphériques et le calcul des intercepts<sup>4</sup>, formulation différentielle, donc indirecte. L'erreur inhérente est analysée avec beaucoup de soin.

Le succès international de la méthode de Marcq Saint-Hilaire est dû à la simplicité de sa construction graphique sur la carte marine. Ce succès a été tel qu'il a masqué pratiquement pour un siècle toute tentative de retour à la formulation directe. En fait, c'est le passage en 3D avec l'orbitographie des satellites (notamment satellites scientifiques, puis TRANSIT), qui a réactivé l'intérêt des coordonnées cartésiennes.

En navigation astronomique, le premier à revenir aux équations linéaires, en introduisant une matrice de  $n$  par 3, a été Georges Bodenez, professeur à l'ENMM en 1976 [8]. Dans son mémoire de 65 pages, il se réfère d'ailleurs à Yvon-Villarceau. C'était émergent dans le contexte de cette époque car sur le même sujet, l'USNO a publié 2 pages fin 1978 [9], puis l'IMLA a suivi en 1981 [10]. Après validation à la mer, la méthode impulsée par Bodenez a été introduite dans le cours de l'École navale dès 1980.

Le défaut essentiel de ces méthodes linéaires – devenues classiques – est d'introduire parfois des singularités si l'on néglige de traiter parallèlement l'équation de la sphère terrestre (la 3<sup>e</sup> équation d'Yvon-Villarceau), ou au moins l'équation d'un plan tangent qui en tient lieu au voisinage du point estimé.

La méthode du Plan des Sommets (MPS) élimine ce défaut, en intégrant le traitement des singularités, tout en se libérant complètement de l'estime ou de tout autre point d'appui. En

4 Partant d'une équation de trigonométrie sphérique, où les inconnues (latitude et longitude) sont implicites, Marcq Saint-Hilaire a inversé le problème en calculant les mesures attendues en un point d'appui connu (estimé ou arbitraire). Il en a ensuite déduit l'écart ou intercept pour rejoindre le lieu des points où la mesure devient exacte et l'azimut à affecter à cet intercept. C'est une méthode différentielle, liée étroitement à son point d'appui. À l'échelle de la carte marine, les lieux sont des droites tangentes aux cercles de hauteur (cf. ci-après). De ce fait, on parle de droites de hauteur.

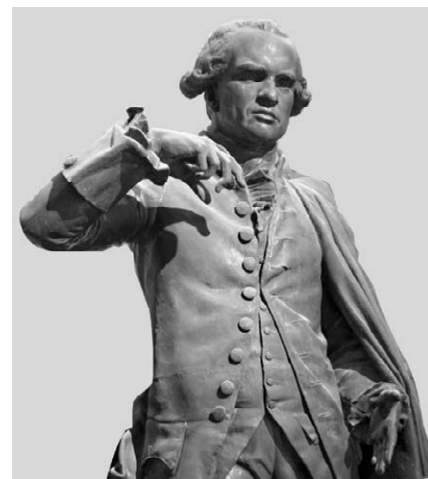
revanche, les résultats produits restent utiles au recalage du processus de l'estime, qui se déroule parallèlement.

### ■ Positionnement par intersections de cônes

Gaspard Monge, en son temps ministre de la Marine puis comte de Pélouse, est l'un des fondateurs de l'École polytechnique. Dans le cadre de sa Géométrie Descriptive, il est probablement le premier à avoir promu l'usage des cônes d'iso-mesure en positionnement, d'abord pour la topographie au-dessus d'un plan de sol en 1796 [11].

Monge a abordé ensuite le principe du passage de 2D en 3D avec des cônes-enveloppes pour résoudre un problème sur une sphère en particulier, sur un ellipsoïde ou sur les quadriques en général [12].

Monge était un prodigieux orateur, qui recourait souvent à une gestuelle évocatrice, comme en témoigne sa statue par Rude. Il suscitait l'admiration de ses élèves. Malgré son talent d'appréhension des situations en 3D, il était en pratique terrassé par le mal de mer ! Cette faiblesse inopportune l'a contraint à abandonner le cortège de savants qui accompagnait Bonaparte lors de la campagne d'Égypte.



Gaspard Monge

Le général Jean-Victor Poncelet, élève de Monge et plus tard son successeur, a poursuivi ses travaux d'application de l'analyse à la géométrie, notamment dans le célèbre manuscrit du camp de Saratoff. C'est en faisant des mathématiques que ce solide gaillard a occupé ses années de captivité après la retraite napoléonienne de Russie [13].

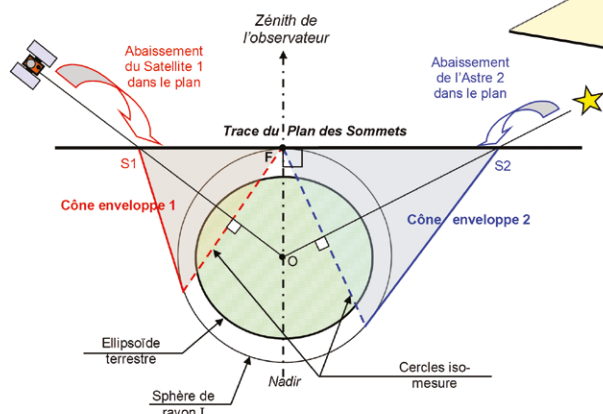


La méthode du Plan des Sommets se situe dans la même perspective : à la place de cercles au sol ou de lieux inscrits sur une surface d'altitude constante, elle considère en 3D les cônes-enveloppes d'une sphère de référence<sup>5</sup>. Cette sphère de référence est arbitraire et donc n'est pas forcément un modèle de la Terre. Elle en est simplement concentrique et proche.

La méthode MPS repose sur 4 théorèmes de géométrie qui lui confèrent effectivement efficacité et robustesse. Ces théorèmes sont énoncés et démontrés dans la référence [3]. Le premier de ces théorèmes consiste à reconnaître le rôle important joué par les Sommets des cônes-enveloppes. Les cônes sont circulaires puisqu'ils circonscrivent une sphère. Les Sommets se situent tous dans le plan horizontal de l'observateur ou du dispositif de mesure, si les observations ou mesures sont exactes. De façon un peu imagée, les cibles sont abaissées sur l'horizon, comme on le ferait avec un sextant. Aux corrections près, les Sommets seraient les points de l'horizon visés par le sextant, à la fin de son balancement.

Le point de contact F du Plan des Sommets et de la sphère de référence est ainsi à la position où les mesures ont été effectuées. La réciproque de ce théorème est directement applicable

5 Sur une sphère de référence, le lieu à iso-mesure est un petit cercle. L'ensemble des plans tangents à la sphère suivant ce petit cercle engendre un cône circulaire de même axe, qui enveloppe la sphère. En navigation astronomique, le petit cercle est un cercle de hauteur et le demi-angle au sommet du cône-enveloppe est égal à la distance zénithale de la visée, c'est-à-dire à l'angle complémentaire de la hauteur.



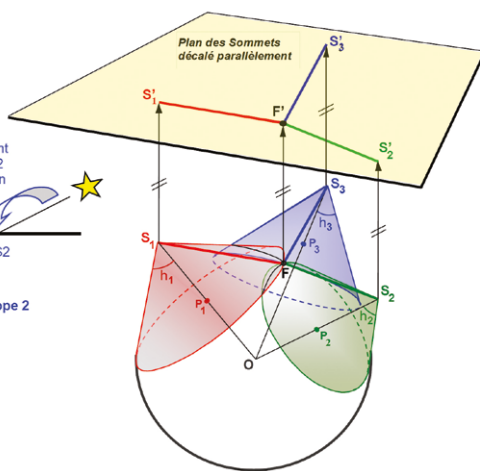
Coupes diamétrales articulées sur la verticale

en navigation : connaissant les coordonnées des Sommets des cônes, ce sont les composantes du vecteur normal au Plan des Sommets qui déterminent la position inconnue.

Il est clair que le résultat obtenu se confond avec l'intersection des plans supports des cercles de hauteur, suivant les méthodes classiques, tant que tout est exact. Il en va différemment en présence d'incertitude ou au voisinage des singularités, et les 3 autres théorèmes y sont consacrés. On démontre notamment des propriétés de conjugaison polaire des solutions par rapport à la sphère de référence.

### ■ **Priorité donnée aux dimensions horizontales**

En navigation astronomique, la méthode du Plan des Sommets travaille en 2 étapes : prédiction, puis correction. La prédiction se contente d'appliquer les théorèmes mentionnés et leurs réciproques. La correction consiste à traiter l'erreur non pas dans l'espace, mais dans le Plan des Sommets, qui se rapproche du plan de la carte marine. De cette façon, on contraint le point calculé à rester en 2D au voisinage de la Terre : cette contrainte qui est linéaire se substitue à la 3<sup>e</sup> équation d'Yvon-Villardeau, qui était quadratique. Dans le cas de 3 observations, le résultat se confond avec le point le plus probable (MPP), ou point de concours des symédianes du triangle<sup>6</sup>, identifié par Émile Lemoine en 1873 [14]. La solution est



Vue en perspective (3 mesures)

généralisée à  $n > 3$  observations par minimisation de la moyenne quadratique des  $n$  distances dans le Plan des Sommets.

En navigation par satellites ( $n > 4$ ), on privilégie également les coordonnées horizontales. À court terme, l'altitude est paramétrée par l'intermédiaire du rayon  $I$  de la sphère de référence et ce paramètre est ajusté par itération (il ne s'écarte pas beaucoup de 1 au sol ou dans les limites de l'espace aéronautique). La convergence en 2D est plus rapide que la convergence sur la 3<sup>e</sup> dimension.

### ■ **Rôle de l'altitude et du temps en navigation par satellites**

Avec des satellites, il est possible de faire mieux en associant la correction à déterminer de l'horloge locale avec le rayon  $I$  qui gouverne l'altitude. C'est ainsi que l'on est conduit à un paramétrage en  $1D + T$ . Les termes linéaires résiduels sur le temps sont éliminés paritaire-ment entre les  $n$  équations. En aval, la résolution itérative procède suivant 2 alternatives algorithmiques, aux propriétés contrastées :

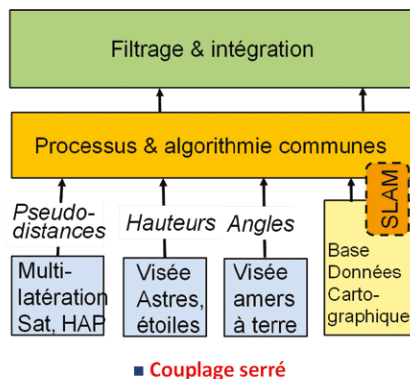
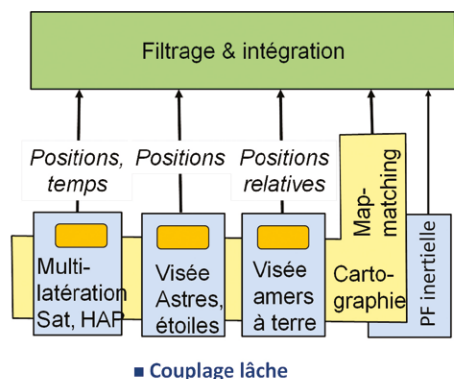
- algorithme de relaxation : simple, mais relativement aveugle (ralliant plus ou moins vite la solution) ;
- ou algorithme d'incrémentation : plus lourd, mais bien contrôlé dans son cheminement, notamment par l'initialisation.

Avec l'un et l'autre, la convergence est assurée d'abord en horizontal 2D, et les valeurs de  $I$  et de la correction de temps s'ajustent ensuite progressivement<sup>7</sup>.

6 Dans un triangle plan la symédiane d'un angle est la symétrique par rapport à la bissectrice, de la médiane menée au côté opposé. Émile Lemoine a démontré le premier que le point de concours des 3 symédianes avait la propriété caractéristique de minimiser la moyenne quadratique des distances aux côtés du triangle. De ce fait, le point s'appelle Point de Lemoine ou MPP (*Most Probable Point*).

7 Soit à résoudre une équation  $A.X = f(X)$  où  $f$  est une fonction non linéaire. Autour de la solution inconnue, qui constitue un point fixe, on peut mettre en œuvre différents algorithmes itératifs, qui mettent à profit la linéarité du premier membre :  
- La relaxation consiste à calculer  $X_{i+1}$  dans  $A.X_{i+1} = f(X_i)$  puis à injecter  $X_{i+1}$  au second membre et à poursuivre l'itération (en toute rigueur, il faut préciser que le paramètre de relaxation est ajusté ici à 1).  
Suite de la note 7 en page suivante





de la mesure et en est complètement représentative. Chacun des  $n$  Sommets est ainsi parfaitement prépositionné et rassemble toute l'information utile de la mesure.

La prise en compte de chaque mesure se traduit par une condition d'appartenance du Sommet du cône associé, à un unique Plan des Sommets. Algébriquement cela s'écrit sous forme d'une équation linéaire où  $x$ ,  $y$  et  $z$  désignent les composantes du vecteur unitaire normal au plan, mais aussi la solution du problème de navigation – à un facteur près –, du fait des propriétés de ce plan.

L'ensemble des mesures peut être regroupé sous forme d'une équation vectorielle, où la matrice du premier membre contient ligne par ligne, les coordonnées cartésiennes de chaque Sommet. Le second membre égale l'unité en navigation astronomique ou en navigation terrestre. Il prend une valeur paramétrée à 1 en navigation par satellites.

L'hybridation directe se manifeste simplement sous forme de bandes horizontales dans cette équation unique. Le repère cartésien utilisé Oxyz est ortho-normé, avec l'origine au centre de la Terre (ECEF *Earth Centered Earth Fixed*) et :

- l'axe Oz dans la direction du Pôle Nord céleste ;
- l'axe Ox dans le plan du méridien de Greenwich.

En navigation par satellites, la résolution de cette équation a été programmée en 2012 sous Matlab™. L'hybridation avec des relevés astronomiques fait l'objet du programme NAVHYB, également sous Matlab™ [3]. En navigation astronomique, le logiciel ASTROLAB résout automatiquement l'équation, depuis sa création voilà 20 ans déjà. Il intègre un modèle du système solaire et des éphémérides

## Rappel de principe sur l'hybridation

L'hybridation consiste à combiner divers capteurs ou récepteurs de mesure affectés à différentes sources, en tirant le meilleur parti de chacune. L'objectif est de compenser les défauts des uns par les qualités des autres et réciproquement. On peut ainsi s'affranchir de l'indisponibilité du GPS, tabler sur des relevés célestes au large et s'appuyer sur des visées d'amers terrestres en navigation côtière, voire même dans le cœur des villes. On pourrait ajouter le radar, le sondeur et la bathymétrie en navigation côtière. Le tout peut se faire avec ou sans moyens d'extrapolation tels que plate-forme inertielle ou odomètre et compas électrique.

Le principe du couplage lâche est de travailler en aval du traitement nominal des capteurs, représenté comme inclus dans chaque bloc sur le volet gauche de la figure ci-dessus. Il s'appuie au moins sur un ajustement cartographique (*map-matching*), voire sur des moyens inertiels ou de l'odométrie. Les échelles de temps réel peuvent être disparates entre les chaînes.

Le principe du couplage serré est de s'adosser directement aux capteurs, en exploitant les données brutes qu'ils délivrent. Une algorithmie commune est appliquée à l'ensemble, ce qui permet d'harmoniser le temps réel et

de dépasser les limitations des traitements individuels : par exemple, la multilatération reste exploitable en dessous de 4 satellites ou autres HAP (Plates-formes à Haute Altitude) ; les relevés d'astres ou les visées terrestres le restent aussi, même s'ils sont uniques. On peut se passer de moyens inertiels. SLAM désigne la démarche éventuelle de localisation et de levé cartographique simultanés (par exemple pour l'exploration de Mars ou d'autres planètes).

La méthode du Plan des Sommets se prête bien à une hybridation directe en couplage serré. Rien n'empêche néanmoins d'inclure cette hybridation directe dans une boucle plus large en couplage lâche avec des moyens inertiels. C'est ce qui a déjà été proposé pour la navigation du véhicule autonome, notamment dans les canyons urbains [5].

## Formulation unifiée de la MPS pour une navigation hybride directe

Quelle que soit la cible mesurée, on peut lui associer un cône-enveloppe de la sphère de référence. Le Sommet du cône est aligné sur la verticale fixe de la cible si elle est terrestre ou sur la direction donnée par ses éphémérides s'il s'agit d'un objet céleste, naturel ou artificiel. La distance ou rayon à l'origine  $\Sigma = OS$  est directement fonction

7 - L'incrémentation consiste à développer  $f(X)$  en série par rapport à un  $\Delta X$  faible devant  $X$ . On fait passer le terme linéaire en  $\Delta X$  au 1<sup>er</sup> membre et on se ramène à une équation aux différences du type  $B_i \cdot \Delta X_{i+1} = g(\Delta X_i)$

La relaxation n'impose qu'une seule inversion ou pseudo-inversion de matrice. L'incrémentation en impose une par itération. Le critère d'arrêt des itérations peut être le maintien des résultats dans une boule d'incertitude de rayon prescrit.

$$\begin{matrix} \text{Matrice des Sommets} \end{matrix} \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ X_i & Y_i & Z_i \\ \dots & \dots & \dots \\ X_m & Y_m & Z_m \\ X_n & Y_n & Z_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Bande des Satellites} \\ \text{\& HAP} \\ \text{Bande des Astres} \\ \text{Bande des Amers} \\ \text{terrestres} \end{matrix}$$

“perpétuelles” (recalées en juin 2017 dans la version 3.2). Afin d’exploiter des salves de relevés au gré de l’opérateur, il offre un module de régression linéaire ou quadratique (la seconde destinée aux méridiennes). Il traite les corrections des hauteurs observées et les transports d’observation en fonction de la progression du porteur.

ASTROLAB a été écrit en BASIC (VB5), avec ses propres routines de calcul matriciel et des interfaces d’entrée-sortie (IHM Interface homme machine) purement alphanumériques. Le portage en est ainsi facilité sur de toutes petites machines, y compris des smartphones. La suite de l’article va montrer qu’il est applicable également à une hybridation entre relevés astronomiques et visées terrestres.

## Caractérisation des Sommets suivant les cibles de mesure

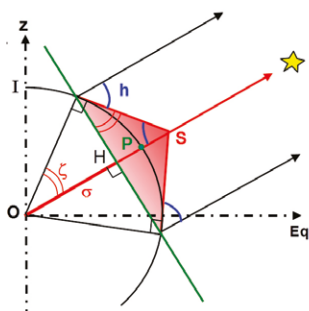
L’examen des caractéristiques des Sommets permet de mieux comprendre l’efficacité et la polyvalence de la méthode. Au stade actuel, 4 cas de cibles sont répertoriés et traités par la méthode du Plan des Sommets : 2 cas de cibles célestes et 2 cas de cibles terrestres. Dans chacun, le calcul de  $\Sigma = OS$  ou de la distance zénithale dont il se déduit est explicité ci-après.

$\Sigma = I / \cos \zeta$ , où  $\zeta$  est la distance zénithale entre la cible et le point d’observation ou de mesure.

Dans le cas du satellite,  $\rho$  représente la pseudo-distance et  $\tau$  le décalage de l’horloge de bord que multiplie la vitesse  $c$  de

### ◆ Cas ① avec un astre

- Variable de mesure :  $h$

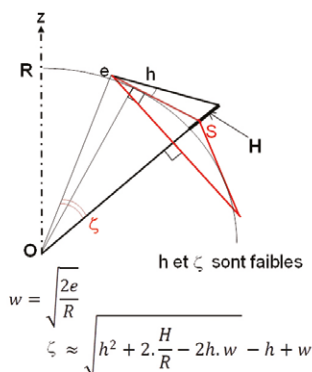


$$\Sigma = \frac{I}{\sin h} \quad \text{où } I = 1$$

$$= I \cdot \operatorname{cosec} h$$

### ◆ Cas ③ avec un amer terrestre isolé

- Variable de mesure :  $h$



la lumière.  $R_s$  est une simple notation à partir de la position du satellite, qui ne suppose rien sur la circularité de l’orbite :

$$R_s^2 = x_s^2 + y_s^2 + z_s^2$$

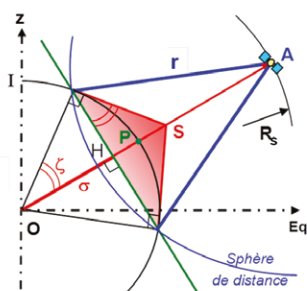
Dans le cas de l’amer isolé, le calcul de la distance zénithale  $\zeta$  fait intervenir une valeur de  $R$  majorée pour rendre compte de la réfraction près de l’horizon. Au besoin, on peut adopter un modèle plus sophistiqué, où la réfraction est corrigée en température et en pression [15, 16]. Dans le cas du couple d’amers, la distance zénithale  $\zeta$  est exploitée deux fois (pour le calcul de  $P$ , puis de la position inconnue).

## Validation dans un cas canonique

Le cas canonique retenu correspond à la reconstitution idéalisée d’un point astronomique, lors de la première traversée historique de Paris à New York par Costes et Bellonte [17]. C’était au-dessus de l’Atlantique à bord du biplan Bréguet XIX Super Bidon Point d’Interrogation,

### ◆ Cas ② avec un satellite (ou HAP)

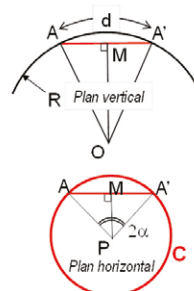
- Variable de mesure :  $r$



$$\Sigma = \frac{2 \cdot R_s}{1 + \frac{R_s^2 - r^2}{I^2}} \quad \text{où } r = \rho + c \cdot \tau$$

### ◆ Cas ④ avec un couple d’amers terrestres

- Variable de mesure : ouverture  $2\alpha$  des amers



$M$  : point milieu de  $AA'$

$d$  : exprimé en radian

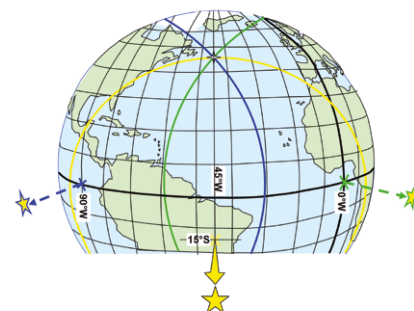
$$\sin \zeta = \frac{d}{2} \cdot \frac{1}{\sin \alpha}$$

$\zeta$  faible sauf si  $\alpha$  faible aussi

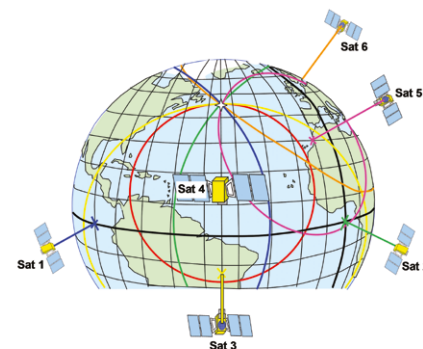
$P$  est le centre de l’arc de  $C$  qui sous-tend  $\alpha$ .

La position de  $P$  se calcule par retour au cas ①

le 2 septembre 1930. Les positions des étoiles et les angles relevés ont été choisis de façon à rendre le calcul accessible à la main.



Point astronomique à 3 étoiles



Point aux satellites (avec 4 ou plus)

Voici dans le cas simple à 3 étoiles d’égale hauteur vraie ( $30^\circ$ ) comment on peut dérouler manuellement la méthode du Plan des Sommets :

Dans les formules qui suivent, les valeurs exactes de  $c$  et  $s$  sont déduites de celles correspondant à l’angle double ( $30^\circ$ ). La conversion finale de cartésiennes à longitude et latitude répond à l’hypothèse simple d’une Terre sphérique en navigation astronomique.

Bien entendu, le logiciel ASTROLAB délivre exactement le même résultat, et ce dès l’étape de prédiction puisqu’il n’y a aucune incertitude.



## ◆ Calcul des coordonnées cartésiennes des sommets $S_1, S_2, S_3$

- $S_1 : [\cos 0^\circ \cdot \cos 0^\circ, \cos 0^\circ \cdot \sin 0^\circ, \sin 0^\circ] / \sin 30^\circ = [2, 0, 0]$
- $S_2 : [\cos 0^\circ \cdot \cos 90^\circ, -\cos 0^\circ \cdot \sin 90^\circ, \sin 0^\circ] / \sin 30^\circ = [0, -2, 0]$
- $S_3 : [\cos 15^\circ \cdot \cos 45^\circ, -\cos 15^\circ \cdot \sin 45^\circ, -\sin 15^\circ] / \sin 30^\circ = [c\sqrt{2}, -c\sqrt{2}, -2s]$

## ◆ Système d'équations linéaires et résolution :

$$\begin{cases} 2x + 0 + 0 = 1 \Rightarrow x = 1/2 & (1) \\ 0 - 2y + 0 = 1 \Rightarrow y = -1/2 & (2) \\ c\sqrt{2}x - c\sqrt{2}y - 2sz = 1 \Rightarrow \sqrt{2}c(x-y) - 2sz = 1 & (3) \end{cases}$$

où  $c^2 = (\cos 15^\circ)^2 = (2 + \sqrt{3})/4$  et  $s^2 = (\sin 15^\circ)^2 = (2 - \sqrt{3})/4$

■ substitution de (1) et (2) dans (3)  $\Rightarrow \sqrt{2}c - 2sz = 1$  (4)

■ dont la solution est  $z = \sqrt{2}/2$  car on vérifie :  $2(c-s)^2 \equiv 1$

## ◆ Retour aux coordonnées sphériques et résultat :

- Longitude =  $\text{Arctg } y/x = -\text{Arctg } 1 = 45^\circ \text{ W}$
  - Latitude =  $\text{Arcsin } z = \text{Arcsin } (\sqrt{2}/2) = 45^\circ \text{ N}$
- Position recherchée**



Position du cas canonique reportée sur la carte de Bellonte (projection de Kahn)



La version 3.2 d'ASTROLAB calcule en début d'exécution le coefficient de Dilution de précision (DOP<sup>8</sup>) lié à la géométrie du problème, comme c'est la règle en navigation par satellites ou en e-LORAN<sup>9</sup>. En l'occurrence, il est de 5,57

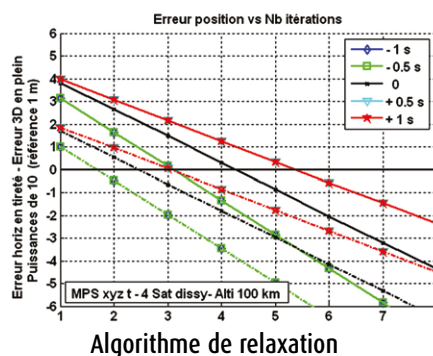
8 Le carré du coefficient DOP (Dilution Of Precision) est lié à l'inverse du volume délimité dans l'espace par les amers eux-mêmes (satellites ou amers terrestres) ou leurs projections sur un cylindre vertical (astres ou étoiles) [3]. Ce coefficient, qui rend compte de la géométrie de mesure, multiplie l'erreur efficace (RMS) intrinsèque du système de navigation. Quand c'est pertinent, il est décomposable en composantes horizontale et verticale et même en espace et en temps.

9 L'e-LORAN (*enhanced LONG RAngE Navigation system*) est une version numérique dérivée de l'ancien système hyperbolique LORAN-C. Il fonctionne aux mêmes fréquences basses (100 kHz), mais exploite la mesure de temps d'arrivée d'impulsions synchronisées et non plus la mesure de déphasage d'une onde entretenue. La précision peut atteindre 10 m à 100 nautiques des balises.

avec les 3 étoiles relevées. Il s'améliore à 1,69 si l'on ajoute une 4<sup>e</sup> étoile, dont le pied est le même que celui du 4<sup>e</sup> satellite de la planche précédente.

Bien après Costes et Bellonte, le même cas canonique peut être facilement extrapolé en navigation par satellites, avec 4 d'entre eux positionnés comme indiqué précédemment.

Les termes en  $\tau$  sont éliminés de l'équation vectorielle au moyen d'une



transformation linéaire qui privilégie la direction du barycentre des satellites. Le paramétrage porte sur les termes quadratiques en  $t^2$  et  $\tau^2$  qui sont calculés après chaque itération et réintroduits pour l'itération suivante.

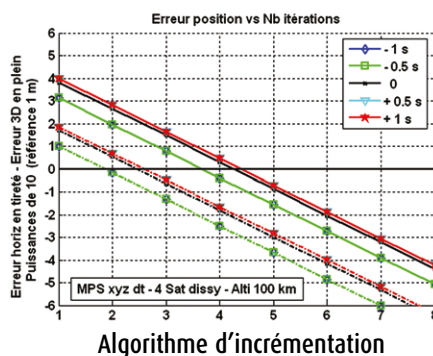
L'exercice est conduit avec l'aide du programme sous Matlab<sup>TM</sup>, pour une série de valeurs sur la dérive de l'horloge du récepteur. Les résultats sont analysés dans le repère cartésien Oxyz. L'ordre des itérations (de 1 à 8) est porté en abscisse.

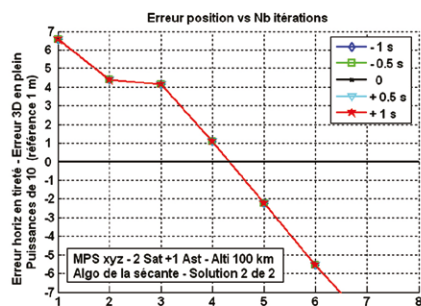
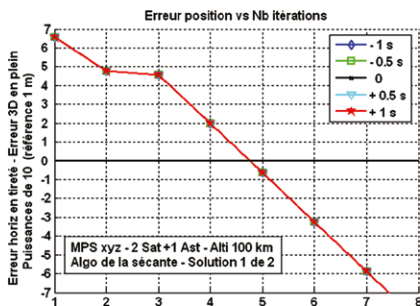
On constate que le processus itératif fait migrer le point calculé, le long d'une sorte de gouttière qui se projette suivant un faisceau de droites génératrices dans un diagramme plan. La forme de gouttière est suggérée par le fait que les droites remontent de part et d'autre du thalweg quand on fait varier l'horloge autour de la valeur exacte. La convergence en 3D au centimètre près est obtenue en 8 itérations avec l'algorithme de relaxation, et seulement en 6 itérations avec l'algorithme d'incrément. L'incrément fait gagner régulièrement plus d'un ordre de grandeur par itération.

Deux remarques s'imposent :

- l'erreur en 2D suivant les droites en pointillé est régulièrement très inférieure à l'erreur en 3D, de 2 ordres de grandeur. Cela vérifie bien le 3<sup>e</sup> principe de l'approche adoptée ;
- l'altitude du porteur importe peu : on conserve des diagrammes semblables entre 0 et 100 km ! Le paramétrage selon le 4<sup>e</sup> principe fonctionne bien<sup>10</sup>.

10 La conversion vers le référentiel WGS 84 (ellipsoïde ou géoïde pour la Terre) reste à effectuer en aval. Les règles en sont bien connues [3].





est de considérer 1 astre et 2 satellites. En effet, avec 2 astres on pourrait se passer de satellite, et avec 3 satellites on pourrait se passer d'astre, pour un porteur au sol ou à altitude connue. Dans cette hybridation, on reprend les positions 1, 2 pour les satellites et la position 4 pour l'astre. Le programme NAVHYB conduit aux résultats ci-dessus pour les 2 solutions possibles (la première étant la même que précédemment). On constate que les génératrices sont superposées, quels que soient les décalages d'horloge, mais ne deviennent des droites qu'au-delà des premières itérations. La superposition résulte d'un processus d'initialisation sophistiqué, qui est exposé dans la référence [3].

## Exercice d'hybridation entre astres et amers côtiers

L'exercice choisi est inspiré d'un cas réel déjà ancien, mais recalé dans le temps présent. Un sous-marin nucléaire émerge en mer d'Iroise, afin de rallier en surface sa base dans la rade de Brest. Après un long périple en immersion, la centrale inertielle a subi une dérive importante. Le GPS est instable et douteux, car un chalutier hérissé d'antennes a été signalé dans les parages. Au crépuscule, on est encore loin des côtes mais les signaux optiques sont directement utilisables.

Deux grands phares sont identifiables à l'horizon : Créach et Armen, validés par le comptage de leurs éclats. Le navigateur relève précisément l'angle d'ouverture entre les 2 faisceaux au moyen de son système optique. Il effectue ensuite une visée de Vénus, immanquable sur tribord arrière (on est proche de sa période de brillance maximale). À titre de confirmation, il ajoute une visée d'Altaïr qu'il croit reconnaître sur l'avant.

On est le 22 septembre 2016 à 18:00 UTC, et voici quelles sont les données issues des relevés :

- ouverture entre Créach et Armen : 84° 24,9', ce qui est une valeur particulièrement grande ;
- hauteurs astronomiques vraies : 10° 53,4' pour Vénus, 42° 40' pour Altaïr (dont la visée est difficile).

Le logiciel ASTROLAB v3.2 est exécuté en deux passes successives, comme indiqué antérieurement dans le cas N°4 pour les amers : la première passe sert à calculer la position du centre P de l'arc capable ; la seconde permet de déterminer le point, à partir de P et du pied de Vénus. Il y a 2 solutions possibles et le doute est levé par les données sur Altaïr ou un simple regard à l'extérieur. La solution rejetée serait proche de la Chaussée de Sein et le navigateur ne pourrait manquer de voir la bouée lumineuse qui en délimite l'ouest.

Le résultat obtenu est en 48° 15' N et 5° 24,5' W, à plus de 3 milles du point donné par la centrale inertielle. Voir ci-dessous la situation sur un fond de carte vectorielle dans l'environ-

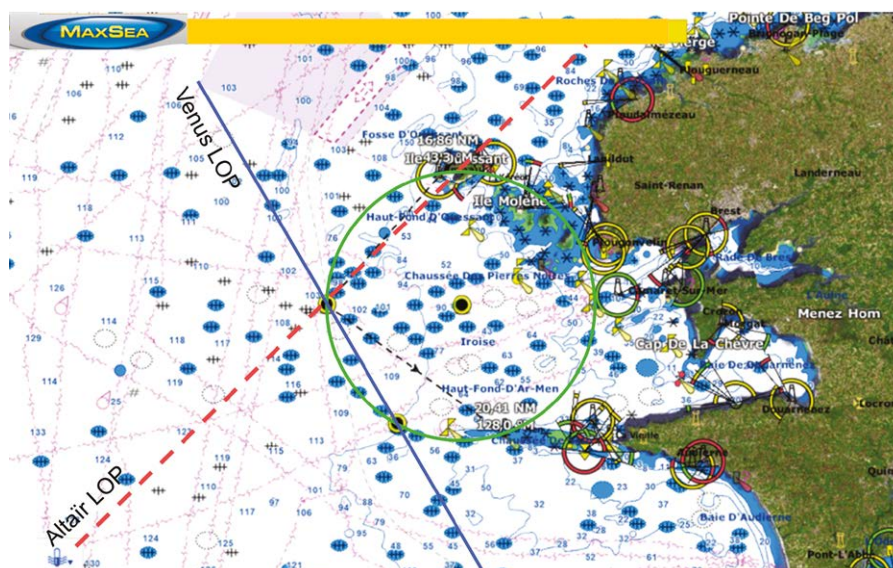
nement MAXSEA™. Le cercle et les droites de hauteur (*Lines of Position*) y ont été superposés pour une meilleure compréhension. Les droites sont également fournies par ASTROLAB, à la demande.

Il faut noter que la discrimination des 2 solutions serait plus évidente avec une ouverture réduite (10° à 40°) entre les phares, car le cercle aurait alors un rayon beaucoup plus grand.

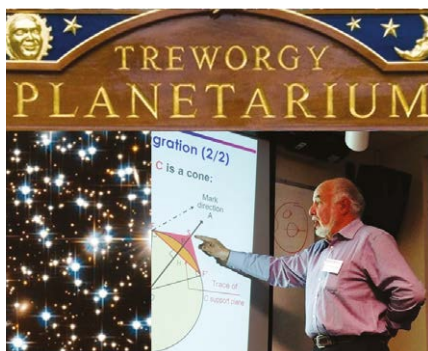
## Conclusion

Au cours de cet exposé, l'auteur a évité de rentrer dans les détails de la résolution mathématique et des algorithmes adoptés. Notamment, il faut noter que les singularités ou leur voisinage sont détectés au moyen des indicateurs DOP, et que le traitement en séquence constitue une spécificité puissante de la méthode du Plan des Sommets (MPS). Ces aspects n'ont pas été évoqués ici, mais ont fait l'objet de nombreuses mentions et d'un chapitre dans la référence [3], que le lecteur intéressé pourra consulter.

Les principes de l'approche ont été posés d'entrée et leur validation a pu être mise en évidence à travers des cas canoniques ou exercices décrits avec soin. La méthode est directe et on a pu vérifier qu'elle s'affranchissait de tout préalable sur l'estime. La polyvalence de la MPS et la portabilité du logiciel sont à souligner, comme l'auteur l'a fait au Symposium de *Mystic Seaport* le 5 novembre 2017.







L'auteur présentant la MPS à Mystic Seaport



Les racines historiques remontent au XIX<sup>e</sup> siècle mais quelques souvenirs concrets du tournant du XX<sup>e</sup> siècle permettent d'apprécier les énormes progrès accomplis en navigation depuis lors. Notamment, la vulnérabilité des supports traditionnels a été reconnue en situation réelle.

L'automatisation par la méthode du Plan des Sommets ne fait qu'apporter une pierre à l'édifice. Mais c'est une des technologies qui, grâce à l'hybridation directe, peut contribuer à l'autonomie des porteurs (navires, véhicules, drones...). ●



Vue de la galerie de poupe du HMS Calcutta à l'époque de la Nouvelle Navigation d'Yvon-Villarcéau (depuis Portsmouth, James Tissot, 1877)



Documents de navigation de grands explorateurs, (dégradés par l'humidité et le ruissellement) : R. Scott (1912) et F. Worsley (1916), retour du Pôle Sud



ASTROLAB tournant sur portable, palm-top ou smartphone

## Contact

Yves ROBIN-JOUAN  
NAVECOM - Membre IFN, ION  
Pôles PMB, MOV'EO, System@tic  
yrobinjo@free.fr

## Bibliographie

- [1] Yves Robin-Jouan "Bilan du Symposium sur la Navigation à Mystic Seaport en novembre 2017", XYZ, N°154, 1<sup>er</sup> trimestre 2018
- [2] Yves Robin-Jouan "Le positionnement astronomique par la Méthode du Plan des Sommets, ou comment revisiter l'astro avec l'expérience du GPS", XYZ, N°75 et 76, 1<sup>er</sup> et 2<sup>e</sup> trimestres 1998
- [3] Yves Robin-Jouan "Navigation aux Astres et aux Satellites par la Méthode du Plan des Sommets", Marines éditions, 256 pages + CD-ROM, INFOMER janvier 2013, ISBN 978-2-35743-088-4
- [4] Yves Robin-Jouan "Navigation aux Astres, aux Satellites, aux Amers côtiers et Hybridation directe", conférence au Musée de la Marine, PARIS, 27 février 2017
- [5] Yves Robin-Jouan "Navigation hybride aux amers célestes et aux amers terrestres, par la Méthode du Plan des Sommets", Navigation IFN, Vol 64 N°253, juin 2017
- [6] Jean-José Ségeric "Histoire du point astronomique en mer", 442 pages, Marines Editions, Rennes 2006, ISBN 2-915379-41-6
- [7] Antoine Yvon-Villarcéau et Henri-Julien Aved de Magnac "Nouvelle navigation : théorie et pratique" respectivement, 435 pages, éditions Gauthiers-Villars, Paris 1877
- [8] Georges Bodenez "Le problème de Douwes", 65 pages, Mémoire à l'Inspection Générale de l'Enseignement Maritime, avril 1976, dont accusé réception de l'IGEM le 11 mai 1976
- [9] R. Watkins & P.M. Janiczek (USNO) "Sight reduction with matrices", the Institute's

professional forum, pages 447-448, Navigation ION, Winter 1978-1979

[10] B. Van Katwijk "A different view of the Star Fix", Stichting Hogere Zeewaartschool ou Académie maritime Supérieure d'Amsterdam (HZA), International Maritime Lecturers Association newsletter N°2, July 1981

[11] Comte Gaspard Monge "Géométrie Descriptive", Séances des Ecoles Normales, Paris, Imprimerie du Cercle Social, Rue du Théâtre Français, N°4, 1<sup>er</sup> Germinal de l'an IV de la République (21 mars 1796)

[12] Comte Gaspard Monge "Application de l'analyse à la géométrie, à l'usage de l'Ecole Impériale Polytechnique", 416 pages + planches, Bernard, Libraire de l'Ecole Impériale Polytechnique et de l'Ecole Impériale des Ponts et Chaussées, Paris 1807

[13] Général Jean-Victor Poncelet "Applications d'analyse et de géométrie", Editions Mallet-Bachelier, Paris 1862, suivant le manuscrit rédigé au Camp de Saratoff, après sa capture par les Cosaques en 1814

[14] Emile Lemoine "Note sur un point remarquable du plan des triangles", Nouvelles annales de mathématiques, deuxième série, tome 12, Paris 1873

[15] André Danjon "Astronomie Générale", seconde édition revue et corrigée, chapitre 9 "la Réfraction atmosphérique", 19 pages, Librairie Scientifique et Technique, Albert Blanchard, Paris 1993, ISBN 2-85367-068-6

[16] Marcel E. Tschudin "Refraction near the horizon - an empirical approach, part 1: terrestrial refraction of the dip", Applied Optics, Vol 55(12), 2016. "Part 2: variability of astronomical refraction at low positive altitude", to be published

[17] Maurice Bellonte "Le premier Paris New York : Costes et Bellonte", Editions Plon, Paris 1976, ISBN 2-259-00101-7

## ABSTRACT

Starting from needs of Autonomous Ships & Vehicles, a hybridizing direct process is proposed which uses the Method of Coplanar Vertices (MPS) as a common algorithm for multi-sensor navigation. After the principles of MPS have been reminded, a global vectorial equation is settled for both celestial and terrestrial target probing. Details are provided about Vertex analytics for 4 classes of targets: star, satellite, lonely landmark and distant landmark pair.