

Interprétation géomorphologique du théorème de Shannon

■ Laurent POLIDORI - Mhamad ELHAGE

Contrairement à ce que croient beaucoup d'étudiants, le théorème de Shannon est très simple. On peut en avoir une compréhension intuitive en lisant des romans, en adaptant le rythme de la lecture au rythme de l'œuvre. Ainsi, lorsque Balzac nous inflige des descriptions interminables, il suffit de laisser le regard glisser sur un texte sans aspérité et de prélever de temps à autre une phrase pour s'assurer que l'on n'est pas encore entré dans le vif du sujet. Au contraire, en lisant des romans de Dumas, on parcourt un récit plein de rebondissements et de dialogues très rapides. Et l'on sent bien, alors, qu'il n'est pas question d'omettre une seule phrase, car alors le sens de l'histoire nous échapperait. Qui n'a pas appliqué cette méthode de lecture ? Une méthode intuitive qui permet de lire plus vite sans perdre pour autant le fil du récit. On ne sait pas toujours qu'elle fait l'objet d'un théorème, utilisé par ailleurs dans bien des domaines.

MOTS-CLÉS

Shannon,
échantillonnage,
MNT,
géomorphologie

doit avoir la même cadence de celui de l'harmonique de fréquence maximale, avec deux échantillons par période.

En toute rigueur, un certain nombre d'hypothèses doivent être vérifiées pour que le théorème de Shannon puisse être mathématiquement démontré. En particulier, le signal doit être "de carré intégrable". En d'autres termes, on ne peut s'intéresser qu'à des signaux d'énergie finie. Cette précaution mathématique a évidemment peu d'utilité dans la pratique, car l'industrie et l'étude des phénomènes naturels conduisent toujours à des signaux bornés. Par ailleurs, les moyens de mesure ont toujours un temps de réaction qui rend inaccessibles les discontinuités (si tant est qu'elles existent) et ils ne sont jamais déployés que sur une période de temps limitée.

Le relief terrestre est un signal bidimensionnel que l'on peut mesurer (par exemple par photogrammétrie). La pesanteur permettant de distinguer une coordonnée altimétrique et deux coordonnées planimétriques, et si l'on excepte le cas plutôt rare des surplombs et des falaises verticales, le signal altimétrique est une fonction de deux variables et l'on peut lui appliquer le théorème de Shannon en considérant des couples de fréquences spatiales. Autrement dit, l'échantillonnage des MNT (modèles numériques

Que dit le théorème de Shannon ? Il donne une règle d'échantillonnage et indique la cadence minimale à laquelle il convient obligatoirement d'échantillonner un signal, au risque de perdre irrémédiablement une partie de ce signal. Sous certaines hypothèses, on peut décomposer un signal en une somme d'harmoniques, en nombre potentiellement infini, chaque harmonique (k) étant caractérisée par une amplitude a_k , une phase Φ_k et une fréquence f_k :

$$S(t) = \sum a_k \sin(2\pi f_k t + \Phi_k)$$

De manière assez logique, c'est l'harmonique de fréquence la plus élevée, donc celle qui correspond à l'oscillation la plus rapide, qui doit être prise en compte pour l'échantillonnage, car

si cette harmonique est correctement restituée, alors toutes les autres, ayant des variations plus lentes, et donc le signal tout entier, seront intégralement restitués. Il convient donc d'échantillonner le signal de manière à préserver l'harmonique de fréquence maximale f_{\max} , ce qui exige une densité au moins égale à deux échantillons par cycle, et donc une fréquence d'échantillonnage au moins égale au double de la fréquence la plus élevée contenue dans le signal (condition dite de Nyquist) :

$$f_{\text{éch}} \geq 2 f_{\max}$$

La figure 1 montre un signal simple résultant de la somme de deux harmoniques, et il est évident que l'échantillonnage du signal résultant

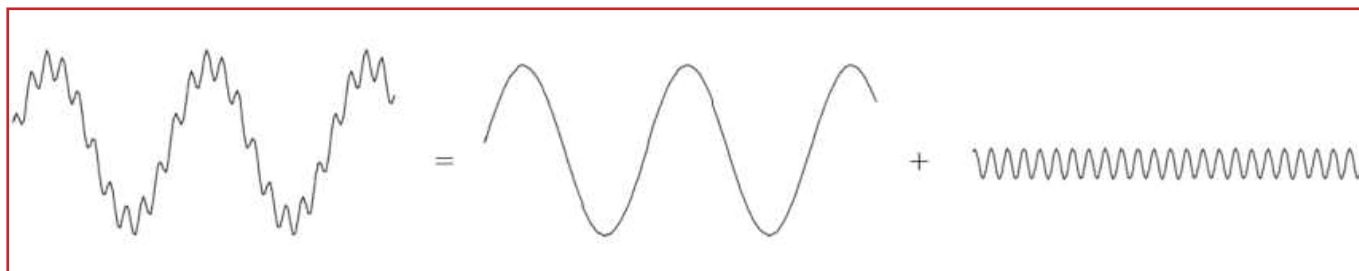


Figure 1. Signal simple résultant de la somme de deux harmoniques, montrant que l'harmonique de haute fréquence doit guider la détermination de la cadence d'échantillonnage du signal complet.



de terrain) doit être asservi aux plus hautes fréquences du relief, ou plus exactement aux plus hautes fréquences accessibles compte tenu de la technique de restitution utilisée.

Lorsque les ordinateurs ont fait leur apparition dans les agences de cartographie officielle, des bases de données altimétriques ont été constituées pour servir de socle à des référentiels nationaux. La première étape a généralement consisté à numériser les courbes de niveau représentées dans les cartes topographiques. Des opératrices et opérateurs spécialisés ont ainsi, pendant des journées entières, parcouru des centaines de kilomètres par jour le long des courbes, pour saisir les points devant servir à la modélisation du terrain. Ils n'avaient généralement pas étudié la géomorphologie, mais ils cherchaient à représenter fidèlement les formes du terrain, car le relief terrestre n'est pas une abstraction et chacun a pu, par une observation répétée et le développement d'un sentiment esthétique, percevoir les règles qui président à sa conception. Ils n'avaient généralement pas étudié le traitement du signal, mais ils respectaient soigneusement le théorème de Shannon, espaçant les points saisis dans les longues lignes droites et les densifiant en présence de courbures prononcées. Que l'on cherche à respecter rigoureusement le critère de Shannon ou à conserver les éléments structurants du paysage, on place toujours un point à chaque fois que la courbe de niveau traverse un talweg ou une crête, la courbure passant localement par un extremum.

Dans bien des cas cependant, un second processus d'échantillonnage vient endommager les vertus du premier, au moment de reconstruire la surface du terrain par interpolation entre les courbes numérisées. C'est lorsque les courbes sont très espacées que les défauts sont les plus criants, car c'est alors l'interpolateur qui impose son comportement spatial, en termes de texture et de forme, à la surface qu'il engendre pour décrire le relief. Dans le cas d'une maille carrée, souvent préférée pour la commodité du stockage, l'adoption d'une fréquence d'échan-

tillonnage constante est, par nature, non respectueuse du théorème de Shannon qui imposerait au contraire d'adapter l'échantillonnage à la géomorphologie locale. Dans ce cas, seule une maille très petite permet, au prix d'un important volume de données, de préserver les formes de petite taille. Cependant, lorsque la cadence d'échantillonnage se rapproche du mètre comme le permet la restitution photogrammétrique d'images aériennes ou d'images satellitaires à très haute résolution, le MNT incorpore des objets ou formes artificiels (talus par exemple) dont les pentes sont plus importantes que celles que l'on trouve dans un relief naturel soumis depuis longtemps à l'érosion. Pour des mailles de quelques décimètres, souvent beaucoup plus pertinentes sur le plan géomorphologique, l'histogramme des pentes a une forme caractéristique, avec la prédominance d'une gamme de pentes liée au type de relief (très faible en plaine, beaucoup plus forte en montagne) et la chute rapide de l'occurrence au-delà d'une limite qui peut être interprétée comme un angle de talus. En effet, les terrains qu'une forte pente rend instables sont improbables, ce qui explique les valeurs très basses de l'occurrence dans l'histogramme des pentes. Cependant, lorsqu'on sous-échantillonne un MNT, tandis que l'histogramme des altitudes conserve peu ou prou la même forme, l'histo-

gramme des pentes subit au contraire des changements importants. La pente prédominante devient plus faible et les fortes pentes disparaissent, comme le montre la figure 2. La disparition des harmoniques de plus haute fréquence fait disparaître les formes de terrain de petite taille, qui sont celles où l'on trouve les plus fortes pentes. Ainsi, l'interprétation des dérivées de l'altitude (pente, aspect, courbure) n'a de sens que si le pas d'échantillonnage (et donc la fréquence spatiale maximale contenue dans le signal altimétrique) a été spécifié. Toutes les fréquences plus élevées (et donc toutes les formes correspondantes) ont disparu.

Ce problème est propre aux échantillonnages réguliers, car les structures irrégulières peuvent au contraire s'adapter aux propriétés géomorphologiques locales. Un échantillonnage irrégulier, forcément plus respectueux du célèbre théorème, permet une densité variable des points du MNT et donc une plus grande fidélité aux formes, sous réserve que les points soient saisis en priorité le long des lignes de changement de pente comme l'illustre la figure 3.

Néanmoins, dans le cas d'un réseau triangulaire irrégulier (TIN pour *triangular irregular network*), une densité insuffisante des points saisis contraint l'algorithme de triangulation à disposer entre des courbes trop espacées

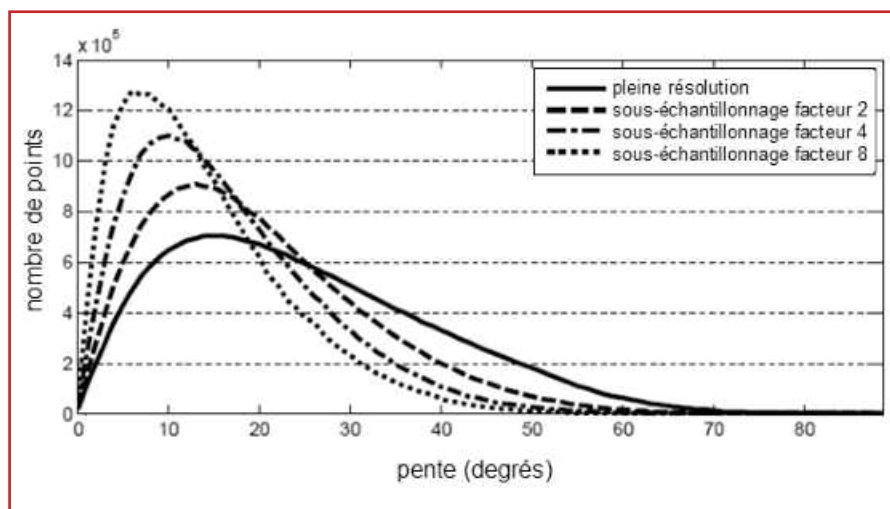


Figure 2. Histogramme des pentes calculé pour 4 pas d'échantillonnage différents à partir d'un MNT issu de la corrélation automatique d'un couple d'images SPOT-4 en région montagneuse (Liban)

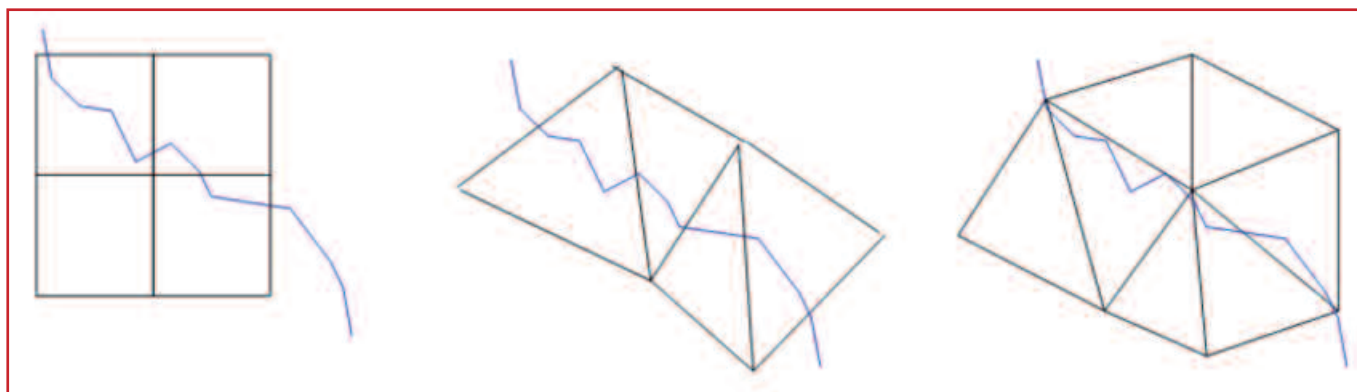


Figure 3. Echantillonnage régulier (à gauche), irrégulier sans prise en compte de l'hydrographie (au centre), irrégulier avec prise en compte de l'hydrographie (à droite). Seul ce dernier permet d'optimiser la qualité géomorphologique du MNT.



de longues facettes triangulaires dont les sommets peuvent avoir une position planimétrique acceptable mais qui, avec une pente constante à l'intérieur de la maille et discontinue à la frontière entre mailles adjacentes, décrivent souvent de manière peu réaliste les formes du terrain.

La différence entre deux algorithmes d'échantillonnage, ou entre deux paramètres d'un même algorithme, a généralement peu d'impact sur la précision altimétrique du modèle numérique de terrain. Si c'est là le seul critère de qualité que l'on cherche à optimiser, le choix de l'algorithme d'interpolation et des paramètres de l'échantillonnage n'est donc pas critique.

En revanche, si l'on cherche aussi à trouver des informations sur les dérivées de l'altitude (pente, aspect, courbure) destinées à une caractérisation quantitative des formes du terrain, alors il convient de tenir compte de la densité des crêtes et talwegs afin d'asservir la fréquence d'échantillonnage aux fréquences spatiales présentes dans le signal altimétrique. Autrement dit, respecter le théorème de Shannon. ●

Contacts

Laurent POLIDORI
laurent.polidori@esgt.cnam.fr
Mhamad ELHAGE
mhamad.elhage@esgt.cnam.fr

ABSTRACT

The Shannon's theorem gives a rule for signal sampling. If a digital terrain model (DTM) is considered as a two-dimensional signal, then the Shannon's theorem states that the sampling period must be defined according to the smallest shapes accessible using a determined 3D mapping method. This article shows that irregular grids are intrinsically more respectful to the Shannon's theorem than regular grids, and that the sampling rule given by this theorem, which has little impact on elevation accuracy, is essential if the DTM is expected to provide geomorphological information.

Olivier Reis

*Ingénieur géomètre-topographe
ENSAI Strasbourg - Diplômé de l'Institut
de traducteurs et d'interprètes (ITI) de Strasbourg*
9, rue des Champs F-57200 SARREGUEMINES
Téléphone / télécopie : 03 87 98 57 04
Courriel : o.reis@infonie.fr

**Pour toutes vos traductions d'allemand
et d'anglais en français
en topographie – géodésie – géomatique
– GNSS**

Reinhard Stölzel

*Ingénieur géomètre-topographe
Interprète diplômé de la Chambre de commerce
et d'industrie de Berlin*
Heinrich-Heine-Straße 17, D-10179 BERLIN
Téléphone : 00 49 30 97 00 52 60
Télécopie : 00 49 30 97 00 52 61
Courriel : stoelzelr@aol.com

**Pour toutes vos traductions de français
et d'anglais en allemand
géomatique – GNSS – infrastructures
de transport**

Des topographes traducteurs d'expérience à votre service