Coordonnées géographiques λ, φ, h sur l'ellipsoïde de révolution

Patrick JULIEN

On décrit une méthode de calcul des coordonnées géographiques longitude, latitude, altitude (au-dessus de l'ellipsoïde) à partir des coordonnées cartésiennes X,Y,Z. Le calcul est exact (sans approximations successives). L'exposé rappelle les définitions utiles et donne toutes les justifications mathématiques.

L'ellipsoïde de révolution (aplati) E

Dans un repère orthonormé convenable, E a pour équation:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1 \qquad (0<b<a)$$

Les ordres de grandeur pour l'ellipsoïde terrestre sont:

$$a \cong 6378{,}2 \text{ km} \;,\; b \cong 6356{,}8 \text{ km} \;,\; e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}\cong 0{,}0067$$

Il est commode d'écrire sous forme matricielle:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=\|Dm\|^2 \text{ avec } D=\begin{pmatrix}1/a&&\\&1/a&\\&&1/b\end{pmatrix} \;,\quad m=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Dans les demi-espaces x > 0 et x < 0, E admet les représentations paramétriques:

$$\begin{pmatrix}x(u,v)\\y(u,v)\\z(u,v)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\pm a\sqrt{1-u^2/a^2-v^2/b^2}\\u\\v\end{pmatrix}$$

d'où:

$$\begin{pmatrix}x'_u\\y'_u\\z'_u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y/x\\1\\0\end{pmatrix} \;,\quad \begin{pmatrix}x'_v\\y'_v\\z'_v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a^2z/b^2x\\0\\1\end{pmatrix} \;,\quad \begin{pmatrix}x'_u\\y'_u\\z'_u\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}x'_v\\y'_v\\z'_v\end{pmatrix}=\frac{a^2}{x}\begin{pmatrix}x/a^2\\y/a^2\\z/b^2\end{pmatrix}$$

et on a un résultat similaire pour les demi-espaces y < 0 , y > 0 , z < 0 , z > 0.
Un vecteur normal au point m = (x,y,z) de E est donc:

$$n(m)=\begin{pmatrix}x/a^2\\y/a^2\\z/b^2\end{pmatrix}=D^2m$$

Une autre représentation paramétrique de E est:

$$m(\lambda,\theta)=\begin{pmatrix}a\cos\lambda\cos\theta\\a\sin\lambda\cos\theta\\b\sin\theta\end{pmatrix} \;,\quad -\pi<\lambda\leq\pi \;,\quad -\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$$

et un vecteur normal unitaire au point m(λ,θ) est:

$$\frac{n(m(\lambda,\theta))}{\|n(m(\lambda,\theta))\|}=\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}}\begin{pmatrix}\cos\lambda\cos\theta\\\sin\lambda\cos\theta\\\sin\theta/\sqrt{1-e^2}\end{pmatrix}$$

Projection sur E d'un point M extérieur à E

La portion d'espace définie par $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}>1$ s'appelle l'*extérieur* de E.
M étant un point extérieur à E (||DM|| > 1), on définit sa distance h à E (ou *altitude*) par:

$$h=\inf\{\,\|pM\|\;;\;p\in E\,\}$$

> Il existe un point unique m ∈ E tel que ||mM|| = h
> et on a: $mM=h\dfrac{n(m)}{\|n(m)\|}$

m s'appelle la *projection* de M sur E ; on a h > 0 puisque m ≠ M.

Preuve

1 - Existence de m
Par définition de la borne inférieure h, il existe, pour tout k, un point $p_k \in E$ tel que: $h \leq \|p_kM\| \leq h + 1/k$;
la suite p_k est bornée, donc contient une sous-suite m_j admettant une limite m ; alors: $\|mM\| = \lim \|m_jM\| = h$

2 - Pour tout point r tel que ||Dr|| < 1, on a ||rM|| > h
La fonction continue $q(t) = \|(1-t)Dr + t\,DM\|$ vérifie

$$q(0) = \|Dr\| < 1 < \|DM\| = q(1),$$

donc il existe $0 < \theta < 1$ tel que $q(\theta) = 1$;
le point $p = (1-\theta)r + \theta M$ vérifie $\|Dp\| = 1$,
donc p ∈ E, d'où: $h \leq \|pM\| = (1-\theta)\,\|rM\| < \|rM\|$

3 - Pour tout vecteur v tel que v•n(m) < 0 , on a v•mM ≤ 0
Pour t scalaire et r = m+tv, on a:

$$\|Dr\|^2 = \|Dm+t\,Dv\|^2 = \|Dm\|^2 + 2\,Dv\bullet Dm\,t + \|Dv\|^2\,t^2$$

avec: $\|Dm\| = 1$ et $Dv\bullet Dm = v^T DDm = v\bullet n(m)$
d'où: $\|Dr\|^2 = 1 + t\,(2v\bullet n(m) + \|Dv\|^2\,t)$
Pour $0 < t < -2v\bullet n(m)/\|Dv\|^2$, on a $\|Dr\|^2 < 1$, donc d'après (2):
$h^2 < \|rM\|^2 = \|mM-mr\|^2 = \|mM - tv\|^2 = h^2 - 2v\bullet mM\,t + \|v\|^2\,t^2$
d'où: $2v\bullet mM < \|v\|^2\,t$
et à la limite quand $t\to 0$: $v\bullet mM \leq 0$

4 - Relation $mM = h\dfrac{n(m)}{\|n(m)\|}$
On décompose mM en deux vecteurs orthogonaux:
$mM = \gamma\, n + z$ où $\gamma = mM\bullet n/\|n\|^2$, $z\bullet n = 0$
Pour ε > 0, le vecteur $v = z-\varepsilon\, n$ vérifie $v\bullet n = -\varepsilon\,\|n\|^2 < 0$,
donc d'après (3): $v\bullet mM = (z-\varepsilon\, n)\bullet(z+\gamma\, n) = \|z\|^2 - \varepsilon\gamma\,\|n\|^2 \leq 0$
ce qui implique $\gamma \geq 0$, et à la limite quand $\varepsilon\to 0$: $\|z\| = 0$; d'où:
$mM = \gamma\, n$ avec $\gamma = \|mM\|/\|n\| = h/\|n\|$

5 - Unicité de m
Soit m' ∈ E un autre point tel que ||m'M|| = h ; on a:

$$h^2 = \|mM-mm'\|^2 = \|mM\|^2 - 2\,mm'\bullet mM + \|mm'\|^2$$
$$= h^2 - 2\gamma\, mm'\bullet n + \|mm'\|^2$$

d'où : $\|mm'\|^2 = 2\gamma\, mm'\bullet n = 2\gamma\, mm'\bullet D^2m = 2\gamma\,(Dm'-Dm)\bullet Dm$
$= 2\gamma\,(Dm'\bullet Dm-1)$
$\leq 2\gamma\,(\|Dm'\|\,\|Dm\|-1) = 0$
(inégalité de Cauchy-Schwarz)

ce qui implique $mm' = 0$.

Calcul de la projection

Il existe des méthodes variées pour calculer la projection, par exemple celles discutées dans l'article [2], pour la plupart itératives. On va décrire une méthode donnant le résultat exact, sans approximations successives. Elle reprend, avec une présentation différente, l'idée de la méthode décrite dans l'article [1].

On pose : $M = (X,Y,Z)$ et $R = \sqrt{X^2+Y^2}$

La projection de M est le point $m(\lambda,\theta)$ défini par :

> si $R = 0$: λ quelconque, $\theta = \text{signe}(Z)\,\frac{\pi}{2}$
>
> si $R > 0$: $(\cos\lambda\,,\,\sin\lambda) = (\frac{X}{R}, \frac{Y}{R})$
>
> - si $Z = 0$: $\theta = 0$
> - si $Z \neq 0$: $f(\tan\frac{\theta}{2}) = 0$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, signe($\theta$) = signe(Z) [1]
>
> où $f(t) = Z^2 t^4 + 2\alpha Z\, t^3 + 2\beta Z\, t - Z^2$
>
> $\alpha = \dfrac{aR + e^2a^2}{b}$, $\beta = \dfrac{aR - e^2a^2}{b}$

Preuve

La relation : $M = m + h\dfrac{n(m)}{\|n(m)\|}$

s'explicite : $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\lambda\cos\theta \\ a\sin\lambda\cos\theta \\ b\sin\theta \end{pmatrix} + h\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}}\begin{pmatrix} \cos\lambda\cos\theta \\ \sin\lambda\cos\theta \\ \sin\theta/\sqrt{1-e^2} \end{pmatrix}$

d'où : $R = (a + h\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}})\cos\theta$, $Z = (b + h\dfrac{1}{\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}})\sin\theta$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

Si $R = 0$, alors $\cos\theta = 0$, donc $\theta = \text{signe}(Z)\,\frac{\pi}{2}$, puisque Z et $\sin\theta$ ont le même signe.

Sinon : $(X,Y) = \mu\,(\cos\lambda,\sin\lambda)$ avec $\mu > 0$

donc : $(\cos\lambda\,,\,\sin\lambda) = (X/R\,,\,Y/R)$

- Si $Z = 0$, alors $\sin\theta = 0$, donc $\theta = 0$
- Si $Z \neq 0$, alors $\cos\theta > 0$, donc :

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ avec signe}(\theta) = \text{signe}(Z)$$

On a : $aR\sin\theta - bZ\cos\theta = e^2a^2\sin\theta\cos\theta$

et en exprimant $\cos\theta$, $\sin\theta$ en fonction de $\tan\frac{\theta}{2}$, on obtient l'équation :

$$bZ\tan^4\frac{\theta}{2} + 2(aR+e^2a^2)\tan^3\frac{\theta}{2} + 2(aR-e^2a^2)\tan\frac{\theta}{2} - bZ = 0$$

équivalente à : $f(\tan\frac{\theta}{2}) = 0$

Résolution de l'équation [1] avec R > 0, Z≠0

La résolution repose sur une factorisation en produit de trinômes :

$$f(t) = Z^2 t^4 + 2\alpha Z\, t^3 + 2\beta Z\, t - Z^2 = f_1(t)\, f_2(t)$$

avec : $f_1(t) = Z\, t^2 + c_1\, t + d_1\, Z$, $f_2(t) = Z\, t^2 + c_2\, t + d_2\, Z$

En identifiant les termes de degrés 3 et 0, on a :

$$c_1 + c_2 = 2\alpha\,,\ d_1 d_2 = -1$$

ce qui suggère d'écrire c_1, c_2, d_1, d_2 *sous la forme :*

$c_1 = \alpha - \delta$, $c_2 = \alpha + \delta$, $d_1 = \rho - \omega$, $d_2 = -\rho - \omega$ où $\rho = \sqrt{\omega^2+1}$;

puis en identifiant les termes de degrés 1 et 2, on obtient les expressions ci-dessous des coefficients. La preuve va consister à montrer que ces coefficients sont bien définis et donnent bien : $f_1(t)\, f_2(t) = f(t)$.

> $f(t) = f_1(t)\, f_2(t)$ avec $f_1(t) = Z\, t^2 + (\alpha-\delta)\, t + (\rho-\omega)Z$,
> $f_2(t) = Z\, t^2 + (\alpha+\delta)\, t - (\rho+\omega)Z$
>
> les coefficients étant donnés par :
>
> $\omega = \dfrac{q}{u^2+uv+v^2}$, $\rho = \sqrt{\omega^2+1}$, $\delta = \dfrac{\alpha\omega+\beta}{\rho}$
>
> où : $q = \dfrac{\alpha^2-\beta^2}{2} > 0$, $p = Z^2 + \alpha\beta > 0$,
>
> $u = (\sqrt{\dfrac{q^2Z^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}} + \dfrac{qZ}{2})^{1/3} > 0$, $v = \dfrac{p}{3u}$
>
> f_1 n'a pas de racine de même signe que Z.
> f_2 a une racine < 0 et une racine > 0.

Preuve

M étant extérieur à E , on a : $\dfrac{R^2}{a^2} + \dfrac{Z^2}{b^2} > 1$

d'où :

$$p = Z^2 + \frac{aR+e^2a^2}{b}\,\frac{aR-e^2a^2}{b} = \frac{a^2R^2+b^2Z^2-e^4a^4}{b^2} > b^2(\frac{R^2}{a^2}+\frac{Z^2}{b^2}) - \frac{e^4a^4}{b^2} > b^2 - \frac{e^4a^4}{b^2}$$

donc : $p > 0$

Il en résulte que : $d = \sqrt{\dfrac{q^2Z^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}$ est bien défini, et $d > 0$

On a évidemment : $q = \dfrac{2e^2a^3R}{b^2} > 0$

d'où : $u = (d + \dfrac{qZ}{2})^{1/3} > 0$, $v = \dfrac{p}{3u} > 0$

Cela étant, on vérifie facilement que :

$$f_1(t)\, f_2(t) = Z^2 t^4 + 2\alpha Z\, t^3 + (\alpha^2 - \delta^2 - 2Z^2\omega)\, t^2 + 2\beta Z\, t - Z^2$$

Pour obtenir $f(t) = f_1(t)\, f_2(t)$, il reste à montrer que :

$$\alpha^2 - \delta^2 - 2Z^2\omega = 0$$

Comme :

$$\alpha^2 - \delta^2 - 2Z^2\omega = \alpha^2 - \frac{(\alpha\omega-\beta)^2}{\omega^2+1} - 2Z^2\omega = \frac{\alpha^2-\beta^2-2(Z^2+\alpha\beta)\omega-2Z^2\omega^3}{\omega^2+1} = 2\,\frac{q-p\omega-Z^2\omega^3}{\omega^2+1}$$

il suffit de montrer que : $q - p\omega - Z^2\omega^3 = 0$

Or : $u^3 = d + \dfrac{qZ}{2}$, $v^3 = \dfrac{p^3}{27}\,\dfrac{1}{d+\frac{qZ}{2}} = \dfrac{p^3}{27}\,\dfrac{d-\frac{qZ}{2}}{d^2-\frac{q^2Z^2}{4}} = d - \dfrac{qZ}{2}$

d'où : $\omega = \dfrac{q}{u^2+uv+v^2} = \dfrac{q(u-v)}{(u-v)(u^2+uv+v^2)} = \dfrac{q(u-v)}{u^3-v^3} = \dfrac{q(u-v)}{qZ} = \dfrac{u-v}{Z}$;

alors : $Z^3\omega^3 = (u-v)^3 = u^3 - v^3 - 3uv(u-v) = qZ - pZ\omega$

d'où : $q - p\omega - Z^2\omega^3 = 0$

Le produit des racines de f_1 est $\rho-\omega > 0$ et leur somme $-\dfrac{\alpha-\delta}{Z}$ a le signe de -Z (car : $\omega > 0 \Rightarrow \alpha^2-\delta^2 = 2\omega Z^2 > 0 \Rightarrow \alpha > |\delta| \geq \delta$) ; donc f_1 n'a pas de racine du signe de Z.

f_2 a une racine < 0 et une racine > 0 , puisque leur produit est $-(\rho+\omega) < 0$.

Expression de la solution tan θ/2

La factorisation de f(t) montre que tan $\frac{\theta}{2}$ ne peut être que la racine de f_2 qui a le même signe que Z, c'est-à-dire :

$$\frac{-(\alpha+\delta)+\sqrt{(\alpha+\delta)^2+4(\rho+\omega)Z^2}}{2Z}$$

qu'on écrit, compte tenu que le produit des racines est $-(\rho+\omega)$:

$$\boxed{\tan\frac{\theta}{2} = \frac{2(\rho+\omega)Z}{\alpha+\delta+\sqrt{(\alpha+\delta)^2+4(\rho+\omega)Z^2}}}$$

Il faut noter que, bien que la formule ait été établie pour R>0 et Z≠0, les coefficients intermédiaires restent définis, et la formule reste valide, pour R = 0 ou Z = 0 :

- si R = 0 : $\alpha = -\beta$, q = 0, $u = v = \sqrt{\frac{p}{3}}$, $\omega = \frac{q}{u^2+uv+v^2} = \frac{0}{p} = 0$,

  $\rho = 1$, $\delta = \beta$, $\alpha+\delta = 0$; d'où la valeur correcte t = 1 ;

- si Z = 0 : $u = v = \sqrt{\frac{p}{3}} = \sqrt{\frac{\alpha\beta}{3}} > 0$, $\omega = \frac{q}{u^2+uv+v^2} = \frac{\alpha^2-\beta^2}{2\alpha\beta}$,

  $\rho = \frac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha\beta}$, $\rho+\omega = \frac{\alpha}{\beta}$

  $\delta = \alpha$; le dénominateur est $4\alpha > 0$, donc la formule est valide, et t = 0.

Longitude λ, latitude φ, altitude h d'un point M extérieur à (ou sur) E

Pour M = (X,Y,Z) extérieur à (ou sur) E, de projection m(λ,θ) $(-\pi \le \lambda < \pi\ ,\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2})$:

- la *longitude* est l'angle λ (défini sauf si (X,Y) = 0) ; elle est donnée par :

$$(\cos\lambda\ ,\ \sin\lambda) = \left(\frac{X}{R}, \frac{Y}{R}\right) \quad \text{où} \quad R = \sqrt{X^2+Y^2}$$

- la *latitude* est l'angle $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

  de la normale $\begin{pmatrix} \cos\lambda\cos\theta \\ \sin\lambda\cos\theta \\ \sin\theta/\sqrt{1-e^2} \end{pmatrix}$ avec le plan z = 0 :

  si $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$: $\varphi = \theta$

  si $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$: $\tan\varphi = \frac{\sin\theta/\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{(\cos\lambda\cos\theta)^2+(\sin\lambda\cos\theta)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\tan\theta$

On peut calculer λ par :

$$\boxed{\lambda = \alpha \text{ si } X \ge 0,\ \lambda = \text{signe}(Y)\,\pi - \alpha \text{ si } X \le 0 \text{ où } \alpha = 2\,\text{Arctan}\frac{Y}{R+|X|}}$$

En effet, si X ≥ 0, on a : $\frac{\lambda}{2} = \text{Arctan}\frac{Y}{R+X}$; et si X ≤ 0, l'identité

$$\text{Arctan}(x)+\text{Arctan}(1/x) = \text{signe}(x)\frac{\pi}{2} \quad \text{avec} \quad x = \frac{Y}{R+X}\ ,\ 1/x = \frac{Y}{R-X}$$

implique : $\frac{\lambda}{2} = \text{signe}(Y)\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\frac{Y}{R-X} = \text{Arctan}\frac{Y}{R+X}$;

dans les deux cas, $\tan\frac{\lambda}{2} = \frac{Y}{R+X}$, d'où cosλ = X/R, sinλ = Y/R.

Dans ce calcul, le dénominateur R+|X| est toujours ≥ R , donc jamais proche de 0.

On peut calculer φ, en posant t = tan $\frac{\theta}{2}$, par :

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi &= \text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\frac{2t}{1-t^2}\right) \text{ si } |t| \le \frac{1}{2} \ , \\ \varphi &= \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\sqrt{1-e^2}\,\frac{1-t^2}{2t}\right) \text{ si } |t| \ge \frac{1}{2} \end{aligned}}$$

Enfin, puisque :

$$\tan\theta = \sqrt{1-e^2}\tan\varphi \iff \begin{vmatrix} \cos\theta & \cos\varphi \\ \sin\theta & \sqrt{1-e^2}\sin\varphi \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sqrt{1-e^2}\sin\varphi \end{pmatrix}$$

les relations : $R = \left(a + h\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}}\right)\cos\theta$,

$$Z = \left(b + h\frac{1}{\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}}\right)\sin\theta$$

s'écrivent en fonction de φ :

$$R = \left(\frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} + h\right)\cos\varphi\ ,\quad Z = \left(\frac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} + h\right)\sin\varphi$$

d'où le calcul possible de l'altitude h :

$$\boxed{h = R\cos\varphi + Z\sin\varphi - a\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

Conclusion

L'intérêt de la méthode exposée est de fournir une expression exacte pour φ, et valide y compris dans les configurations "limites" (point proche de l'axe des pôles). Elle peut être une alternative intéressante aux méthodes par approximations successives, généralement proposées.

(NB : pour un calcul sur des données réelles, il faut bien sûr utiliser les valeurs exactes des paramètres a et b de l'ellipsoïde utilisé). ●

Contact

Patrick JULIEN , IGN - patrick.julien@ign.fr

Références

[1] OZONE Mohammed Id, *Non-Iterative Solution of the φ Equation,* Surveying and Mapping , vol. 45, no 2, juin 1985 (pp 169-171).

[2] BURTCH Robert, *A Comparison of Methods Used in Rectangular to Geodetic Coordinate Transformations,* Paper presented at the ACSM Annual Conference and Technology Exhibition, Orlando, FL, April 21-26, 2006.