



# Modélisation numérique du champ de gravité produit par une structure géologique arbitraire

■ Clément ROUSSEL - Jérôme VERDUN - José CALI

*L'apparition des nouvelles données gravimétriques globales, haute résolution et haute précision a rendu plus que jamais nécessaire la mise au point d'outils performants de modélisation numérique du champ gravitationnel. La modélisation numérique s'attache à calculer les différentes grandeurs du champ à partir d'un modèle géologique de la Terre. La comparaison des valeurs du champ obtenues des mesures et par la modélisation permet de valider les modèles géologiques (problème direct) voire de les raffiner en résolvant un problème inverse (ajustement des paramètres d'un modèle de la Terre à partir de mesures) intégrant le cas échéant d'autres types de données géophysiques (inversion couplée). Les champs synthétiques ont d'autres utilisations permettant par exemple de tester les méthodes de calcul de géoïde ou bien de fixer les limites de sensibilité d'un instrument de mesure gravimétrique. De plus, les modélisations prenant en compte la courbure de la Terre se justifient par l'existence d'observations globales issues du domaine spatial (mission GOCE par exemple). La prise en compte de cette courbure induit des expressions mathématiques impossibles à intégrer analytiquement, nécessitant ainsi l'utilisation de méthodes d'intégration numérique.*

## MOTS-CLÉS

Modélisation, Quadrature de Gauss-Legendre, prisme sphérique, prisme ellipsoïdal, Tenseur du gradient de gravité

## Contexte

La connaissance du champ de gravité de la Terre est d'une importance capitale en géodésie, notamment parce qu'elle permet la détermination de modèles de géoïde, ingrédient essentiel pour la cartographie de la surface de référence des altitudes, telle RAF09 en France. En réalité, les applications qui utilisent le champ de gravité débordent très largement du cadre strict de la géodésie et s'étendent à de nombreux domaines de la géophysique interne (géodynamique, géologie structurale, prospection minière et pétrolière) et des couches externes (hydrologie, océanographie, aéronomie) mais également de la navigation (navigation inertielle par corrélation de terrain). La cartographie des variations spatiales de la gravité terrestre rend compte des contrastes latéraux de densités au sein des couches internes de la Terre. Conjointement,

l'étude des variations temporelles de la gravité nous renseigne sur les transferts dynamiques de matières de toutes natures (convection interne, phénomènes de surcharges océanique, atmosphérique et hydrologique, transferts de masses d'origine climatique). L'un des défis majeurs de la gravimétrie moderne consiste donc à mesurer la gravité terrestre dans l'espace et dans le temps à toutes les échelles spatiales et spectrales.

Aujourd'hui, la gravité terrestre est mesurée quotidiennement et de façon globale depuis l'espace grâce notamment aux satellites gravimétriques GRACE (*Gravity Recovery And Climate Experiment*, mission spatiale conjointe de la NASA et de l'agence spatiale allemande) et GOCE (*Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer*, satellite de l'ESA - *European Space Agency*). Les mesures spatiales

sont complétées à plus courte longueur d'onde par l'altimétrie satellitaire sur les océans, la gravimétrie au sol et la gravimétrie mobile essentiellement marine et aérienne. Ainsi, la cartographie du champ de gravité terrestre s'affine-t-elle constamment par l'apport de nouvelles mesures. De fait, l'exploitation pertinente de cette cartographie haute résolution, qui consiste à déterminer les sources de la gravité, nécessite des outils de modélisation de plus en plus pointus dont le développement fait l'objet de nombreux travaux de recherche.

Le principe fondamental de tout outil de modélisation directe de la gravité consiste en la détermination du champ de gravité (potentiel gravitationnel, composantes du vecteur accélération gravitationnelle et composantes du tenseur du gradient de gravité) produit par un objet de géométrie donnée (une planète par exemple). La distribution des densités au sein de l'objet doit pour cela avoir été fixée. L'objet est donc décomposé en éléments de matière de forme géométrique simple et de dimensions suffisamment petites pour être supposés de densité constante. Le champ produit par l'objet en un point quelconque est alors obtenu par intégration sur tout le volume qui délimite l'objet.

Ce travail, réalisé dans le cadre du stage de fin d'études du mastère spécialisé PPMD (Photogrammétrie, Positionnement et Mesure de Déformations) de l'Ecole Nationale des Sciences Géographiques (ENSG), se proposait d'étudier les méthodes de calcul numérique du champ de gravité, de tester certaines de ces méthodes dans le cas où le champ est connu de façon analytique, de les appliquer à des modèles géologiques de Terre et de les raffiner pour prendre en compte la forme ellipsoïdale de la Terre. Cet





article n'a pas pour vocation de résumer l'intégralité de ces axes d'études. Il pose les bases de la modélisation numérique du champ de gravité en exposant :

- les expressions mathématiques des différentes grandeurs physiques liées à la gravité ;
- les techniques de modélisation des sources de la gravité ;
- une méthode mathématique d'intégration numérique ;
- une application numérique dans un cas simple.

## Le champ de gravité

Parmi les grandeurs physiques utilisées pour caractériser le champ gravitationnel produit par un corps de répartition de masse quelconque (cf. *Tableau 1*), on peut distinguer : le potentiel ( $V$ ), tenseur d'ordre zéro dont l'unité dans le Système International est le mètre carré par seconde carrée ( $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ ), le vecteur accélération gravitationnelle ( $V$ ), tenseur d'ordre un, égal au gradient du potentiel dont les composantes s'expriment en mètre par seconde carrée ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ ) ou usuellement en gal (symbole Gal : 1 Gal =  $10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ), et le tenseur du gradient de gravité ( $T$ ), tenseur d'ordre deux, égal au gradient du vecteur accélération gravitationnelle dont les coefficients s'expriment en seconde carrée ( $\text{s}^{-2}$ ) ou usuellement en eötvös (symbole  $E$  : 1  $E = 10^{-9} \text{ s}^{-2}$ ).

### Potentiel gravitationnel

Le potentiel gravitationnel ( $V$ ) produit par un corps ( $S$ ) de volume et de densité  $\rho$  en un point ( $P$ ) de l'espace situé à une distance  $l$  de ce dernier (cf. *Figure 1*) s'exprime par l'intégrale triple suivante :

$$V(P) = \iiint_{\Omega} \frac{G \cdot \rho}{l} d\Omega \quad [1]$$

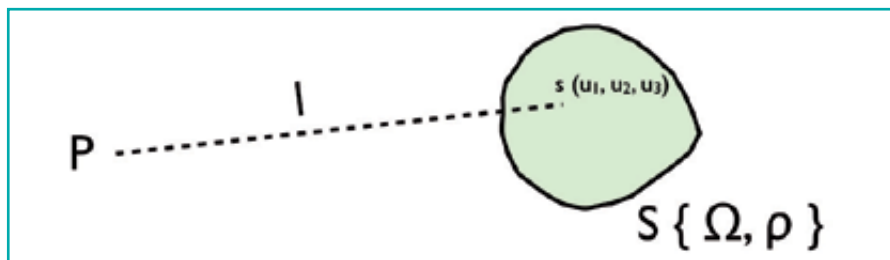


Figure 1. Le champ produit par un corps  $S$  quelconque de densité  $\rho$  constante est obtenu par intégration sur le volume  $\Omega$  délimitant le corps.

où  $G$  est la constante gravitationnelle ( $G = 6.673 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$  dans le Système International). Ainsi, le potentiel gravitationnel produit par plusieurs corps ( $S_n$ ) de volume et densité respectifs  $\Omega_n$  et  $\rho_n$  s'obtient-il par simple sommation :

$$V(P) = \sum_n V_n(P) = \sum_n \iiint_{\Omega_n} \frac{G \cdot \rho_n}{l} d\Omega_n \quad [2]$$

### Vecteur accélération gravitationnelle

Le vecteur accélération gravitationnelle ( $V$ ) s'obtient par dérivation spatiale au point  $P$  du potentiel gravitationnel. En notant  $\nabla$  (nabla) l'opérateur gradient, ce vecteur s'exprime sous sa forme intégrale par :

$$V(P) = \nabla(V(P)) = \iiint_{\Omega} \nabla\left(\frac{G \cdot \rho}{l}\right) d\Omega \quad [3]$$

puis par extension au cas de plusieurs sources ( $S_n$ ) :

$$V(P) = \sum_n V_n(P) = \sum_n \iiint_{\Omega_n} \nabla\left(\frac{G \cdot \rho_n}{l}\right) d\Omega_n \quad [4]$$

### Tenseur du gradient de gravité

Le tenseur du gradient de gravité ( $T$ ) s'obtient par dérivation spatiale au point  $P$  du vecteur accélération gravitationnelle. De même, en notant  $\nabla$  (nabla) l'opérateur

gradient, ce tenseur s'exprime sous sa forme intégrale par :

$$T(P) = \nabla(T(P)) = \iiint_{\Omega} \nabla\left(\nabla\left(\frac{G \cdot \rho}{l}\right)\right) d\Omega \quad [5]$$

puis par extension au cas de plusieurs sources ( $S_n$ ) :

$$T(P) = \sum_n T_n(P) = \sum_n \iiint_{\Omega_n} \nabla\left(\nabla\left(\frac{G \cdot \rho_n}{l}\right)\right) d\Omega_n \quad [6]$$

Dans un système de coordonnées quelconque, le tenseur du gradient de gravité  $T$  s'écrit :

$$T(P) = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} \end{bmatrix} \quad [7]$$

Ce tenseur possède les propriétés suivantes :

il est symétrique : on ne calcule dans la pratique que 6 de ses composantes

$$T(P) = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ \text{sym} & V_{22} & V_{23} \\ \text{sym} & \text{sym} & V_{33} \end{bmatrix} \quad [8]$$

sa trace est nulle puisqu'elle s'identifie au laplacien du potentiel qui est nul en dehors des sources de la gravité :  $\Delta V = 0$  (loi de Laplace).

### Expression générale

Potentiel gravitationnel (une valeur scalaire), vecteur accélération gravitationnelle (trois composantes scalaires) et tenseur du gradient de gravité (six composantes scalaires indépendantes) constituent ainsi dix grandeurs physiques représentant le champ de

Potentiel gravitationnel	Vecteur accélération gravitationnelle	Tenseur du gradient de gravité
$V$	$V(P) = \begin{bmatrix} V_\lambda \\ V_\theta \\ V_r \end{bmatrix}$	$T(P) = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} \end{bmatrix}$
Unité (SI) : $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$	Unité (SI) : $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ Autre unité (Gal) : 1 Gal = $10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$	Unité (SI) : $\text{s}^{-2}$ Autre unité (Eötvös) : 1 $E = 10^{-9} \text{ s}^{-2}$

Tableau 1. Grandeurs physiques représentant le champ gravitationnel

gravité. Bien que leurs expressions respectives soient différentes, on peut résumer l'expression intégrale de ces grandeurs par l'égalité suivante :

$$\left. \begin{matrix} V(P) \\ \mathbf{V}(P) \\ \mathbf{T}(P) \end{matrix} \right\} = \iiint_{\Omega} f(P, s) du_1 du_2 du_3 \quad [9]$$

où l'intégrale est étendue à tous les points  $s$  de la source de coordonnées  $(u_1, u_2, u_3)$ , puis par extension au cas de plusieurs sources  $(S_n)$  :

$$\left. \begin{matrix} V(P) \\ \mathbf{V}(P) \\ \mathbf{T}(P) \end{matrix} \right\} = \sum_n \iiint_{\Omega} f(P, s) du_1 du_2 du_3 \quad [10]$$

La fonction  $f$  est uniquement fonction des coordonnées du point  $P$  où l'on cherche les composantes du champ, des coordonnées d'un point  $s(u_1, u_2, u_3)$  appartenant au volume délimité par la source  $S$  considérée, de la densité  $\rho$  et de la constante gravitationnelle  $G$ . La fonction  $f$  sera désormais appelée fonction intégrande.

## Résolution de l'intégrale triple

Le calcul de l'intégrale triple [9] dépend de la façon dont on repère le point  $P$  (où l'on cherche à obtenir les différentes grandeurs du champ) et la source  $S$ . Pour certaines sources de forme simple (sphère, prisme droit), le calcul de l'intégrale triple conduit à une expression analytique exacte pour chaque composante du champ. En revanche, pour la plupart des sources rencontrées en pratique, il est nécessaire d'utiliser une méthode d'intégration numérique permettant d'obtenir une valeur approchée de l'intégrale triple [9]. Nous allons à présent examiner les expressions du potentiel gravitationnel produit par quelques sources simples.

### ■ Le point massique

Il s'agit de l'approximation la plus grossière que l'on puisse effectuer pour modéliser une source  $S$  de volume  $\Omega$  et de densité  $\rho$ . On se rapporte ainsi au cas d'une masse ponctuelle située au centre de gravité de la source. On obtient très simplement pour le potentiel gravitationnel :

$$V(P) = \frac{G \cdot m}{l} \quad [11]$$

où  $m = \rho \Omega$  est masse totale de la source

et  $l$  la distance du point source au point  $P$  d'observation.

Les autres grandeurs (composantes du vecteur accélération gravitationnelle et composantes du tenseur du gradient de gravité) s'obtiennent à partir de cette relation par simple dérivation spatiale au point  $P$ .

### ■ Le prisme droit

On modélise la source  $S$  par un prisme droit défini dans un système de coordonnées cartésiennes par six faces limitées par les plans (cf. Figure 2) :

$x_1$  et  $x_2$  ;

$y_1$  et  $y_2$  ;

$z_1$  et  $z_2$  ;

Dans le cas du potentiel gravitationnel, l'expression [9] devient (le point  $P$  étant placé à l'origine du repère) :

$$V(P) = G \cdot \rho \iiint_{\Omega} \frac{d\Omega}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = G \cdot \rho \iiint_{\Omega} \frac{dx \cdot dy \cdot dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad [12]$$

où  $(x, y, z)$  désignent les coordonnées d'un point  $S$  quelconque de la source.

La solution analytique existe et sous sa forme factorisée, s'exprime par :

$$V(P) = G \cdot \rho \cdot \left[ xy \cdot \ln(z + l) + yz \cdot \ln(x + l) + zx \cdot \ln(y + l) - \frac{y^2}{2} \tan^{-1} \frac{zx}{yz} - \frac{z^2}{2} \tan^{-1} \frac{xy}{xz} - \frac{xy}{2} \tan^{-1} \frac{yz}{xz} \right]_{x_1, y_1, z_1}^{x_2, y_2, z_2} \quad [13]$$

L'évaluation de cette expression pour tous les triplets  $(x_i, y_j, z_k)$  conduit à une sommation de 48 termes.

De même que pour le point massique, les autres grandeurs (composantes du vecteur accélération gravitationnelle et composantes du tenseur du gradient de gravité) s'obtiennent à partir de cette relation par simple dérivation spatiale au point  $P$ .

### ■ Le prisme sphérique

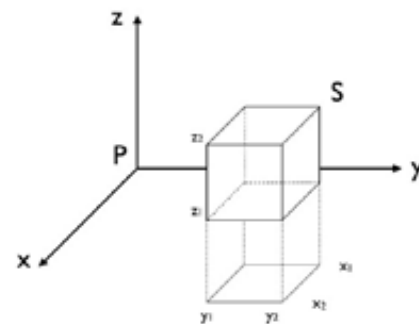


Figure 2. Modélisation de la source par un prisme droit.

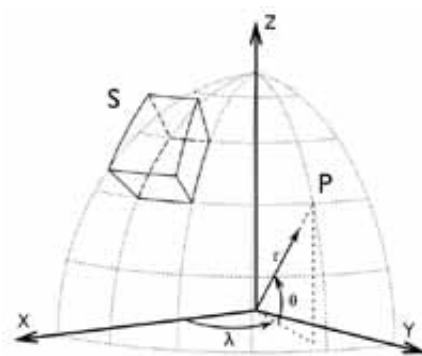


Figure 3. Modélisation de la source par un prisme sphérique.

On modélise la source  $S$  par un prisme sphérique (cf. Figure 3) défini dans un système de coordonnées sphériques  $(\lambda, \theta, r)$  par la donnée de :  
deux méridiens de longitudes respectifs  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  ;  
deux parallèles de latitudes géocentriques respectives  $\theta_1$  et  $\theta_2$  ;  
deux sphères concentriques de rayons respectifs  $R_1$  et  $R_2$ .

Le point  $P$  est également repéré par ses coordonnées sphériques  $(\lambda_P, \theta_P, r_P)$ . Dans le cas du prisme sphérique, les expressions de la distance  $l$  entre le point  $P$  et un point appartenant au prisme sphérique modélisant la source  $S$  ainsi que l'expression de l'élément de volume infinitésimal  $d\Omega$  se compliquent. Par conséquent, potentiel gravitationnel, vecteur accélération gravitationnelle et tenseur du gradient de gravité, représentés par l'intégrale triple [9] ne peuvent plus être calculés de manière exacte. Pour obtenir cependant une valeur approchée de l'intégrale [9], on utilise la méthode de quadrature de Gauss-Legendre. C'est cette méthode qui est décrite puis mise en œuvre dans un exemple simple dans la suite de cet article.

Le logiciel Tesseroids développé par Leonardo Uieda utilise le prisme droit décrit précédemment et les formules analytiques associées, ainsi que le prisme sphérique avec la mise en œuvre de la quadrature de Gauss-Legendre, pour calculer les différentes grandeurs du champ de gravité. Il s'agit d'un logiciel libre disponible sur le site internet <http://leouieda.github.io/tesseroids>. Après validation sur des modèles simples pour lesquels les expressions du champ gravitationnel



sont obtenues analytiquement, ce logiciel a été utilisé en première approche, pour calculer le champ gravitationnel produit par une Terre sphérique associée à un certain modèle de densité.

### ■ Le prisme ellipsoïdal

L'approximation sphérique de la Terre est bien adaptée aux structures géologiques d'échelle moyenne. A plus grande échelle, il est nécessaire de prendre en compte l'aplatissement terrestre, en d'autres termes, de considérer la forme ellipsoïdale de la Terre assimilée à un ellipsoïde de révolution dont l'axe coïncide avec l'axe moyen de rotation de la Terre. La discrétisation de l'ellipsoïde de révolution à l'aide de prismes sphériques induit une erreur sur l'estimation du volume de chaque élément infinitésimaux utilisés dans le calcul de l'intégrande (cf. Figure 4). On estime que l'erreur induite sur le champ gravitationnel dépasse la sensibilité des instruments de mesure gravimétrique (1 mE sur  $V_{zz}$  ce qui correspond à la sensibilité du satellite gravimétrique GOCE) lorsque le calcul est étendu au-delà de 300 km de profondeur. Par conséquent, l'utilisation d'une discrétisation en prismes sphériques devient inadaptée dès lors que l'on souhaite modéliser des structures du manteau (par exemple, la plaque plongeante d'une zone de subduction) ou des phénomènes géophysiques tels que la convection mantellique. Une solution élégante pour pallier cet inconvénient consiste à déterminer l'expression mathématique de l'élément idéalement adapté à la discrétisation de l'ellipsoïde, à savoir le prisme ellipsoïdal.

Le prisme ellipsoïdal (cf Figure 5) est défini dans un système de coordonnées ellipsoïdales ( $\lambda$ ,  $\varphi$ ,  $u$ ) par la donnée de :

- deux méridiens de longitudes respectives  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  ;
- deux parallèles de latitudes géogra-

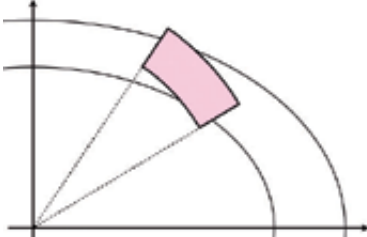


Figure 4. Discretisation de l'ellipsoïde de révolution avec le prisme sphérique.

Modélisation des sources de la gravité		Utilisation
Point massique		Modélisation des sources lointaines
Prisme droit		Idéal pour des études locales du champ de gravité. Le champ peut être calculé (presque) n'importe où grâce aux formules analytiques exactes.
Prisme sphérique		Prise en compte de la courbure de la Terre permettant des études sur des zones plus étendues. Cependant, il est nécessaire de mettre en œuvre la méthode d'intégration numérique de Gauss-Legendre pour obtenir une valeur approchée du champ car il n'existe pas de solution analytique.
Prisme ellipsoïdal		Prise en compte de la courbure et de l'aplatissement terrestre permettant des études globales intégrant des effets depuis la croûte jusqu'au manteau. Comme pour le prisme sphérique, il est nécessaire d'utiliser la quadrature de Gauss-Legendre.

Tableau 2. Modélisation des sources de la gravité

phiques respectives  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  ;  
- deux coefficients d'homothétie :  $u_1$  et  $u_2$ .

Les coefficients d'homothétie sont liés à un ellipsoïde de référence  $\varepsilon_1$  (exemple : l'ellipsoïde de référence IAG-GRS80, d'excentricité  $e$  et d'aplatissement  $f$ ). Un coefficient  $u$  décrit ainsi un ellipsoïde  $\varepsilon_u$  homothétique à l'ellipsoïde de référence  $\varepsilon_1$  et dont le demi-grand axe et le demi-petit axe valent respectivement  $a.u$  et  $b.u$  (avec  $a$  demi-grand axe et  $b$  demi-petit axe de l'ellipsoïde de référence). Son excentricité  $e_u$  ou son aplatissement  $f_u$  sont les mêmes que ceux de l'ellipsoïde de référence puisque :

$$e_u = \frac{\sqrt{(ua)^2 - (ub)^2}}{(ua)^2} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = e$$

$$f_u = \frac{ua - ub}{ua} = \frac{a - b}{a} = f$$



Figure 5. Modélisation de la source par un prisme ellipsoïdal.

Cette paramétrisation permet en particulier de retrouver le volume de l'ellipsoïde de révolution par un calcul intégral simple :

$$\int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{u=0}^1 \frac{a^3(1-e^2)\cos(\varphi)u^2}{(1-e^2\sin^2(\varphi))^{\frac{3}{2}}} d\lambda d\varphi du$$

$$= \left[ \frac{u^3}{3} \right]_0^1 \left[ \lambda \right]_0^{2\pi} \left[ \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2 \varphi}} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3} \pi a^2 b$$

A noter que le point P est toujours repéré par ses coordonnées sphériques ( $\lambda_P$ ,  $\theta_P$ ,  $r_P$ ). De même que pour le prisme sphérique, l'intégrale [9] associée au prisme ellipsoïdal ne peut aboutir à une solution analytique exacte. La quadrature de Gauss-Legendre est alors également employée pour obtenir une valeur approchée des différentes composantes du champ de gravité. Une comparaison des différents modèles de sources est donnée dans le tableau 2.

## La quadrature de Gauss-Legendre

Comme la plupart des méthodes d'intégration numérique, la quadrature de Gauss-Legendre permet d'approximer une intégrale par une somme pondérée prise en un certain nombre de points du domaine d'intégration. Dans notre cas, la quadrature de Gauss-Legendre permet d'approximer l'intégrale





triple [9] par une triple somme pondérée dans le cas d'une discrétisation par le prisme sphérique ou le prisme ellipsoïdal pour modéliser les sources. Les points permettant d'évaluer la fonction intégrande  $f$  sont également appelés nœuds d'intégration. Ainsi, en dimension un, si  $n$  nœuds sont choisis, parle-t-on alors de quadrature de Gauss-Legendre à l'ordre  $n$ . Dans notre cas, en dimension trois, il faut distinguer les ordres suivant chaque dimension. On parlera ainsi de quadrature de Gauss-Legendre à l'ordre  $n_i/n_j/n_k$ , où  $n_i, n_j, n_k$  désignent le nombre de nœuds respectifs dans chacune des trois directions. Bien que plus complexe que les méthodes d'intégration numériques classiques, la quadrature de Gauss-Legendre permet une évaluation plus fine : en dimension un et à l'ordre  $n$ , la formule approchée de cette quadrature est en fait exacte pour l'intégration de tout polynôme de degré inférieur ou égal à  $2n - 1$ .

### ■ Détermination des nœuds d'intégration

Contrairement aux méthodes classiques d'intégration numérique (méthode des trapèzes par exemple), les nœuds d'intégration sont fixés par la méthode de quadrature. Plus précisément, à l'ordre  $n$  sur une dimension, ils sont déterminés comme les  $n$  racines du  $n^{\text{ième}}$  polynôme de Legendre. Ces polynômes étant définis dans l'intervalle  $[-1; 1]$ , il est nécessaire de ramener les  $n$  racines dans notre intervalle d'étude à l'aide d'un changement de variable affine.

La Figure 6 illustre la position des nœuds d'intégration dans le cas du prisme sphérique : en dimension 3 et en

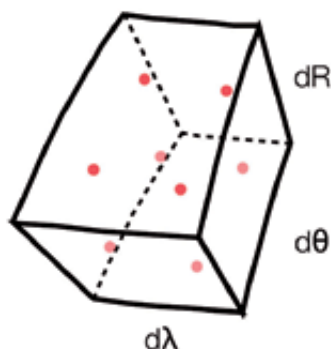


Figure 6. Position des nœuds d'intégration dans le cas où l'on se place à l'ordre 2 sur chaque dimension.

se plaçant à l'ordre 2 sur chaque dimension, il est possible de former  $8 (=2^3)$  nœuds. Ce sont en ces points (dont les coordonnées sont issues des racines de polynômes de Legendre) que la fonction intégrande  $f$  (cf [9]) sera évaluée.

### ■ Détermination des poids

À chaque nœud (ou racine du polynôme de Legendre) est associé un poids  $w$  défini par la fonction suivante :

$$\forall x \in [-1; 1] \quad w(x) = \frac{2}{n P_{n-1}(x) P'_n(x)} \quad [14]$$

avec  $P_n(x)$  le polynôme de Legendre de degré  $n$  et  $P'_n(x)$  sa dérivée première.

### ■ Formule de la quadrature

D'une manière générale, la formule de quadrature de Gauss-Legendre s'exprime par les formules suivantes :

pour le prisme sphérique :

$$\frac{V(P)}{T(P)} \approx G \cdot \rho \cdot \frac{(r_2 - r_1)}{2} \cdot \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{2} \cdot \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2}$$

où  $(r_1, r_2), (\lambda_1, \lambda_2), (\theta_1, \theta_2)$  sont les paramètres de définition du prisme sphérique,  $(x_i, x_j, x_k)$  les racines des polynômes de Legendre et  $(r_{s_i}, \lambda_{s_j}, \theta_{s_k})$  les coordonnées des nœuds d'intégration.

pour le prisme ellipsoïdal :

$$\frac{V(P)}{T(P)} \approx G \cdot \rho \cdot \frac{(u_2 - u_1)}{2} \cdot \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{2} \cdot \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)}{2}$$

où  $(u_1, u_2), (\lambda_1, \lambda_2), (\varphi_1, \varphi_2)$  sont les paramètres de définition du prisme ellipsoïdal,  $(x_i, x_j, x_k)$  les racines des polynômes de Legendre et  $(u_{s_i}, \lambda_{s_j}, \varphi_{s_k})$  les coordonnées des nœuds d'intégration.

On retrouve ainsi la fonction intégrande  $f$  présente dans l'équation [9]. Cette fonction est dorénavant évaluée, pondérée et sommée un nombre fini de fois. A l'ordre 2 sur chaque composante, la quadrature de Gauss-Legendre implique la sommation de 8 termes. A l'ordre 3 sur chaque composante, elle impliquera la sommation de 27 ( $=3^3$ ) termes et ainsi de suite. Le temps de calcul pouvant considérablement augmenter lorsque l'ordre de la quadrature augmente, il faut veiller à choisir l'ordre qui donnera la meilleure approximation possible dans un temps de calcul raisonnable. Pour un ordre fixé, il est

également possible d'augmenter la précision des résultats en diminuant la taille des prismes (sphériques ou ellipsoïdaux) utilisés pour modéliser les sources de la gravité.

## Validation de la quadrature de Gauss-Legendre associée au prisme ellipsoïdal

La validation de la formule approchée de la quadrature de Gauss-Legendre dans le cas où l'on s'intéresse à la discrétisation d'une Terre ellipsoïdale s'effectue en calculant le champ gravitationnel produit par une couche ellipsoïdale de densité constante. Les formules analytiques existent dans ce cas particulier et donnent ainsi accès aux valeurs exactes du champ gravitationnel. La comparaison de ces valeurs avec celles obtenues avec la quadrature de Gauss-Legendre associée au découpage de la couche ellipsoïdale à l'aide de prismes ellipsoïdaux permet de valider la méthode et notamment l'ordre d'intégration (on se place ici à l'ordre 2 sur toutes les directions). La Figure 7 schématise la méthode de validation : en jaune est représentée la couche ellipsoïdale dont les composantes du champ généré sont connues exactement. En vert figure le prisme ellipsoïdal que l'on utilise pour discrétiser la couche ellipsoïdale et ainsi réaliser la quadrature de Gauss-Legendre (seul un prisme a été dessiné ici). Enfin, les points de calcul  $P$  sont situés à une altitude  $h = 252$  km au-dessus de la couche ellipsoïdale. La validation est réalisée sur un profil en latitude ( $\varphi_P \in [0; \pi/2]$ ) et les écarts entre

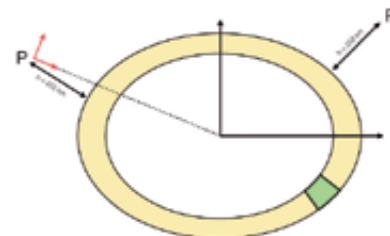


Figure 7. Méthode de validation de la quadrature de Gauss-Legendre. On calcule l'effet d'une couche ellipsoïdale de manière analytique (valeurs exactes) et par intégration numérique (valeurs approchées).

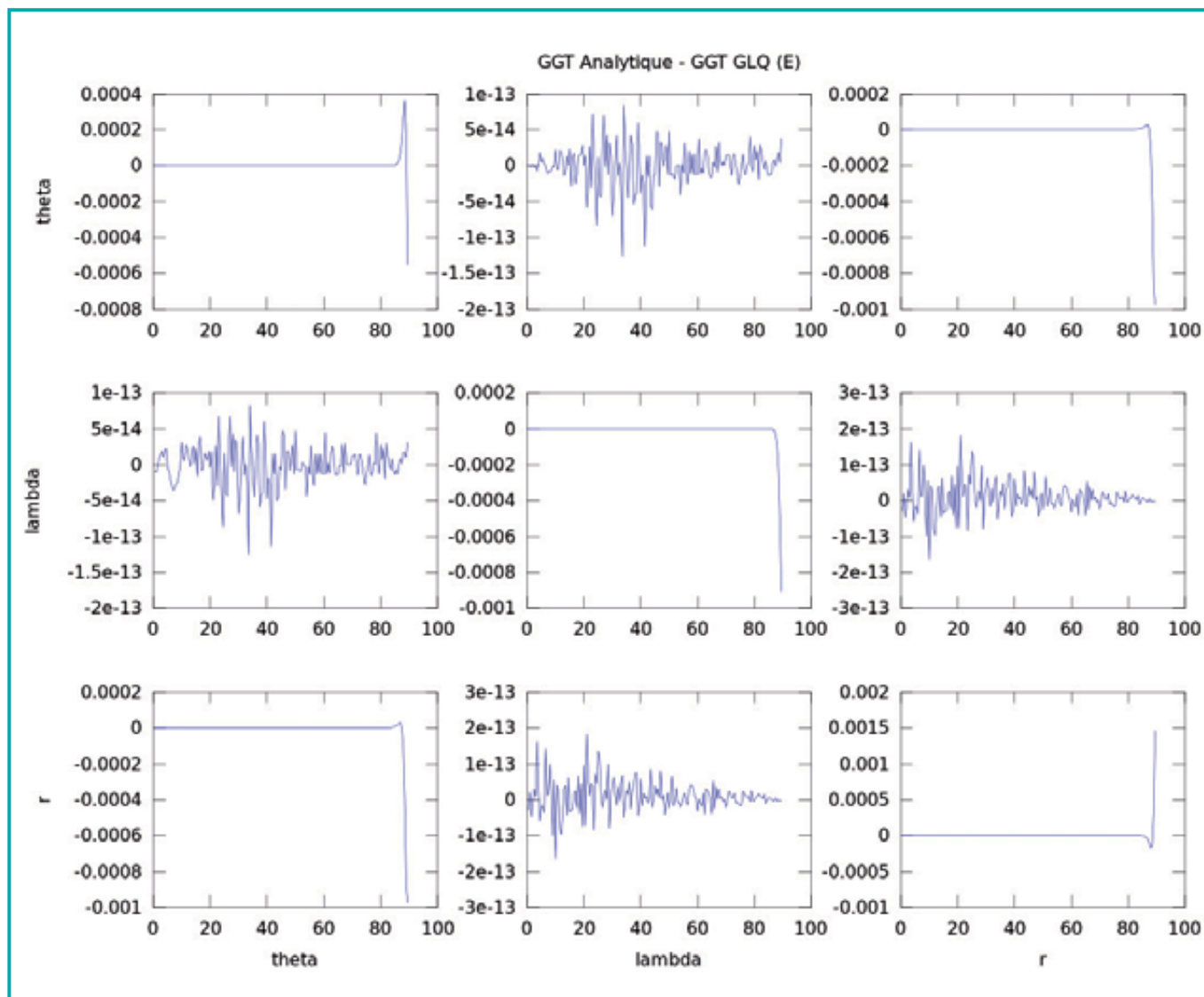


Figure 8. Validation de la quadrature de Gauss-Legendre associée au prisme ellipsoïdal sur les composantes du tenseur du gradient de gravité. Chaque graphe représente la différence entre les composantes du tenseur de gravité calculées respectivement par la méthode analytique et l'intégration numérique en fonction de la latitude du point de calcul. L'analyse de ces graphes confirme que l'erreur de la quadrature de Gauss-Legendre est inférieure à 1 mE.

valeurs vraies (calcul analytique) et valeurs approchées (intégration numérique de Gauss-Legendre) concernant les composantes du tenseur du gradient de gravité sont visualisables sur la Figure 8. On a calculé les 9 composantes du tenseur pour conforter la validité de la méthode : on observe en effet les mêmes erreurs sur les composantes symétriques alors que l'expression mathématique des différentes fonctions intégrandes ne sont pas identiques. Finalement, les écarts observés sont suffisamment faibles ( $< 1$  mE) pour valider la quadrature de Gauss-Legendre associée au prisme ellipsoïdal et à l'ordre 2 sur toutes les directions.

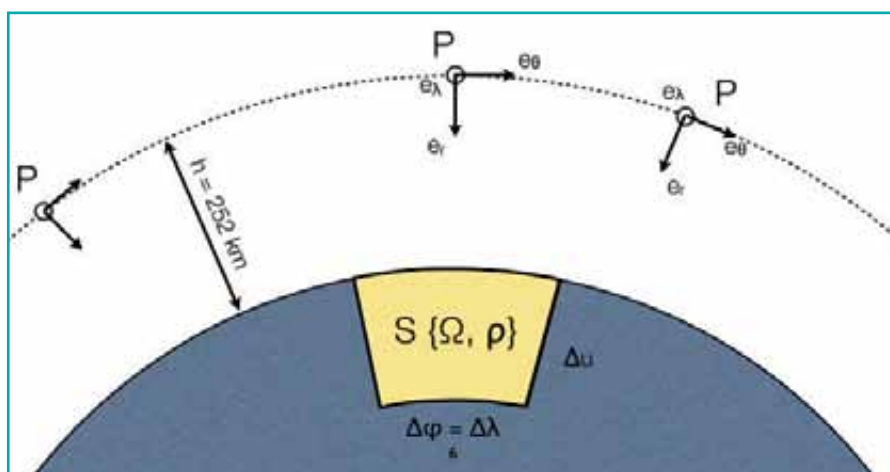
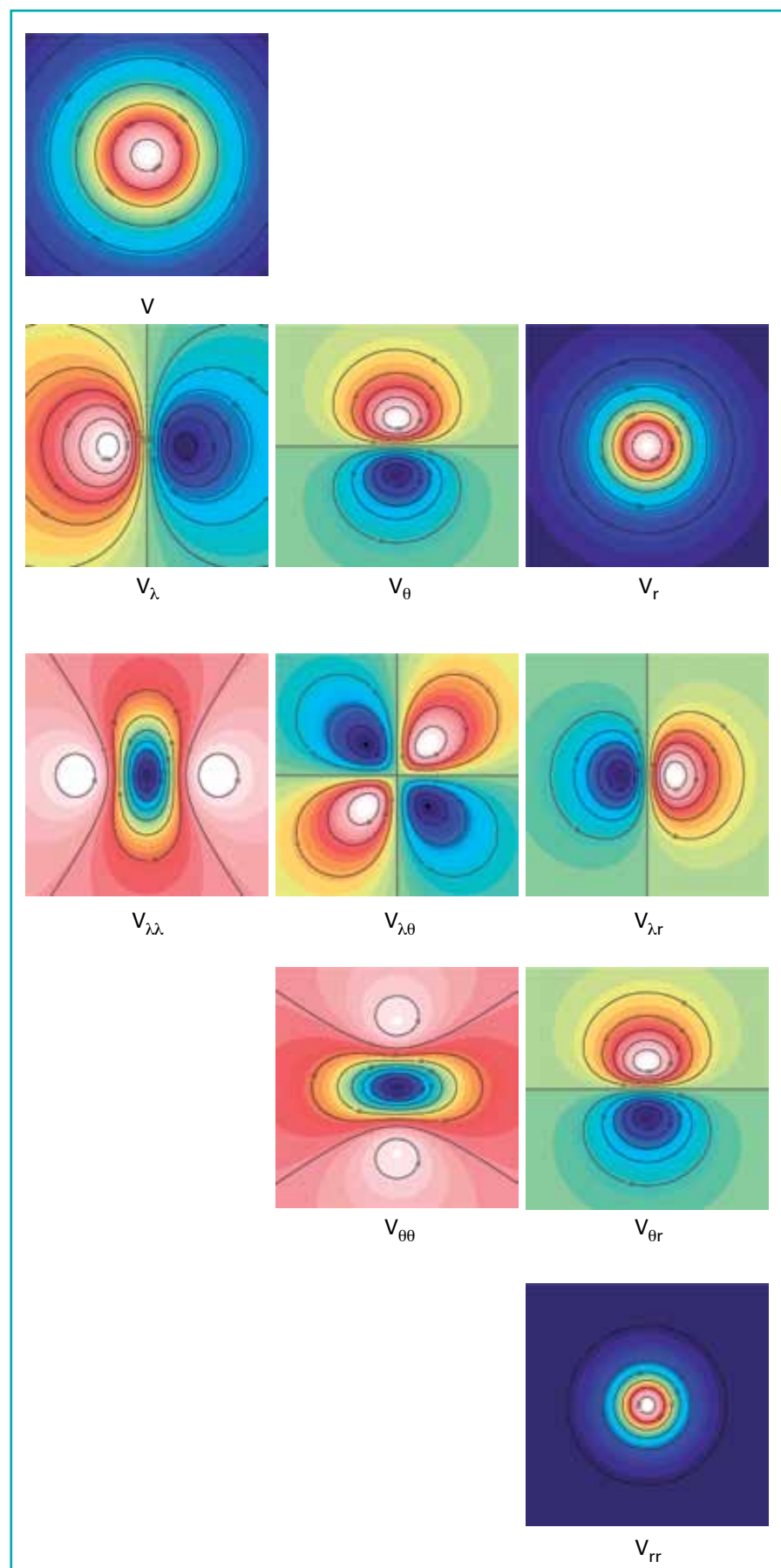


Figure 9.1. Un seul prisme ellipsoïdal  $S$  et l'on cherche le champ gravitationnel produit en plusieurs points  $P$  de l'espace. Les vecteurs  $(e_\lambda, e_\theta, e_r)$  constituent la base locale au point  $P$  ; ils pointent respectivement vers le Nord, l'Est et le centre de la Terre.



## Interprétation de la cartographie du champ généré par un prisme ellipsoïdal

Pour mieux appréhender les différentes grandeurs (potentiel, composantes du vecteur accélération gravitationnelle et composantes du tenseur du gradient de gravité), on se propose ici de calculer le champ produit par un unique prisme ellipsoïdal de masse non nulle (cf Figure 9.1). Cet élément est délimité par deux plans méridiens tels que  $\Delta\lambda = 0,5^\circ$ , deux plans parallèles tels que  $\Delta\varphi = 0,5^\circ$  et deux ellipsoïdes homothétiques tel que le  $\Delta u$  soit équivalent à un  $\Delta h$  de 10 km. La densité du prisme ayant été choisie arbitrairement, les valeurs obtenues pour le champ gravitationnel n'ont pas de signification physique, seules leurs variations doivent être considérées. Les composantes du champ (potentiel, composantes du vecteur accélération gravitationnelle et composantes du tenseur du gradient de gravité) sont calculées grâce à la méthode d'intégration de Gauss-Legendre à l'ordre 2 sur toutes les composantes (ordre 2/2/2). On place régulièrement les points de calcul P sur une grille de façon à ce qu'ils appartiennent tous à une même sphère et telle qu'au plus proche du prisme sphérique la distance entre le sommet de ce dernier et le point de calcul P soit de 252 km. (Cette valeur particulière ne doit en fait rien au hasard, on la choisit régulièrement car elle correspond à l'altitude moyenne du satellite GOCE). Enfin pour visualiser l'effet de notre source, on se place sur une zone centrée sur notre prisme ellipsoïdal et suffisamment étendue telle que,  $\Delta\lambda_p = 5^\circ$ ,  $\Delta\theta_p = 5^\circ$ . Les points de calcul P sont repérés grâce à leurs coordonnées sphériques ( $\lambda_p$ ,  $\theta_p$ ,  $r_p$ ). En utilisant suffisamment de points de calcul P, il est possible de cartographier le champ induit par la source de gravité (Figure 9.2).

## Potentiel gravitationnel induit

La carte du potentiel gravitationnel

Figure 9.2. Champ généré par un prisme ellipsoïdal.





(V) généré par la source s'explique très simplement : sa valeur est la plus importante au centre car la distance entre le point de calcul  $P$  et la source  $S$  y est minimale ( $l = 252$  km). Le potentiel étant proportionnel à l'inverse de la distance ( $1/l$ ), il diminue lorsque l'on s'éloigne de la source.

### ■ Composantes du vecteur accélération gravitationnelle

La carte des composantes du vecteur accélération gravitationnelle générées par la source peut facilement s'expliquer si l'on connaît la façon dont est orientée la base locale au point de calcul  $P$  (cf. Figure 9). Le premier axe ( $e_\lambda$ ) pointe vers les longitudes croissantes (vers l'Est), le deuxième ( $e_\theta$ ) pointe vers les latitudes croissantes (vers le Nord) et le dernier ( $e_r$ ) pointe vers l'origine du repère de coordonnées, c'est l'axe radial. Le vecteur accélération gravitationnelle s'écrit ainsi :

$$\mathbf{V}(P) = \begin{bmatrix} V_\lambda \\ V_\theta \\ V_r \end{bmatrix}$$

Les cartes présentées ici ( $V_\lambda$ ,  $V_\theta$ ,  $V_r$ ) s'interprètent comme le résultat du produit scalaire entre le vecteur accélération gravitationnelle et chaque axe de la base locale précédemment décrite. Ainsi, si l'on se place au centre de notre zone d'étude (au centre de chaque carte), on voit que les composantes Est et Nord sont nulles alors que la composante radiale est maximale. En effet, strictement au-dessus de notre source, le vecteur accélération gravitationnelle est uniquement dirigé suivant l'axe radial, il ne possède donc aucune composante sur les autres axes de la base locale. Restons au centre de nos cartes mais déplaçons-nous dorénavant vers l'ouest ou vers l'est : cette fois-ci, seule la composante nord est nulle car le vecteur accélération gravitationnelle reste dans le plan ( $P$ ,  $e_\lambda$ ,  $e_r$ ). De la même façon, lorsque l'on se déplace depuis le centre vers le nord ou vers le sud, le vecteur accélération gravitationnelle reste dans le plan ( $P$ ,  $e_\theta$ ,  $e_r$ ) et sa composante est toujours nulle. Enfin, le signe de la composante est (resp. composante nord) change lorsque l'on passe de la partie Ouest (resp. partie sud) à la partie est (resp. partie nord)

de la zone d'étude car le vecteur accélération gravitationnelle ne pointe alors plus dans la même direction que l'axe Est (resp. axe nord) de la base locale au point  $P$  mais dans le sens opposé. Le produit scalaire change alors de signe.

### ■ Composantes du tenseur du gradient de gravité

De la même manière, les composantes du tenseur du gradient de gravité s'expriment dans la base locale au point  $P$  :

$$T(P) = \begin{bmatrix} V_{\lambda\lambda} & V_{\lambda\theta} & V_{\lambda r} \\ \text{sym} & V_{\theta\theta} & V_{\theta r} \\ \text{sym} & \text{sym} & V_{rr} \end{bmatrix}$$

On se propose de donner ici quelques pistes de compréhension sur la formation des cartes des trois premières composantes ( $V_{\lambda\lambda}$ ,  $V_{\lambda\theta}$  et  $V_{\lambda r}$ )

### ■ Composante $V_{\lambda\lambda}$

Reprenons un instant la carte de la composante Est du vecteur accélération gravitationnelle. La composante  $V_{\lambda\lambda}$  correspond essentiellement à la variation de cette composante par rapport à la longitude. En se plaçant au centre de la cartographie de la composante  $V_\lambda$  et en se déplaçant d'ouest en est (autrement dit vers les longitudes croissantes), on remarque que la valeur de la composante  $V_\lambda$  commence par augmenter pour atteindre un premier extremum. Par conséquent sa dérivée est d'abord positive puis s'annule. Elle atteint de nouveau un second extremum mais de façon décroissante, sa dérivée est maintenant négative et s'annule une seconde fois. Enfin la composante  $V_\lambda$  augmente de nouveau, sa dérivée  $V_{\lambda\lambda}$  redevient positive. Ses changements de signes peuvent être observés en se plaçant sur le même profil sur la carte de la composante  $V_{\lambda\lambda}$ .

### ■ Composante $V_{\lambda\theta}$

La carte de la composante  $V_{\lambda\theta}$  fait apparaître quatre zones principales. Expliquons l'une d'entre elles (le raisonnement sera le même pour les trois autres zones). Prenons ainsi par exemple le quadrant Nord-Ouest de la carte de la composante  $V_{\lambda\theta}$  : les valeurs que l'on y trouve sont négatives. Comme dans le cas précédent, la composante  $V_{\lambda\theta}$  rend compte des variations de la composante  $V_\lambda$  du vecteur accélération gravitationnelle par rapport à la latitude.

Reprenons ainsi la cartographie de la composante  $V_\lambda$  et plaçons-nous en un point situé dans la partie Nord-Ouest. En ce point, on trouve une certaine valeur de la composante  $V_\lambda$ . Considérons maintenant un déplacement vers les latitudes croissantes, autrement dit une variation de latitude positive. En ce nouveau point, on obtient une nouvelle valeur de la composante  $V_\lambda$  mais plus petite que la première valeur. Par conséquent, la variation de  $V_\lambda$  est négative, puis ramenée à une variation positive en latitude, sa dérivée (autrement dit  $V_{\lambda\theta}$ ) est donc négative.

### ■ Composante $V_{\lambda r}$

On adopte le même raisonnement pour expliquer cette nouvelle cartographie. La carte de la composante  $V_\lambda$  du vecteur accélération gravitationnelle donnerait pour une variation  $\Delta r_P$  positive de tous les points de calcul  $P$ , le même type de carte mais avec des valeurs du champ plus petites en valeurs absolues (l'intensité diminue en s'éloignant de la source...). Par conséquent, ramenée à une variation positive de  $r_P$ , la variation de la composante  $V_\lambda$  est négative (resp positive) dans la moitié ouest (resp est). Ses variations rendues par  $V_{\lambda r}$  possèdent donc le même type de répartition spatiale que  $V_\lambda$  mais de signe opposé.

## Effet gravitationnel produit par une Terre ellipsoïdale associée à un modèle géologique de densité

L'exemple précédent avait pour objectif d'expliquer la signification des cartes des composantes du champ gravitationnel. Intéressons-nous maintenant au champ gravitationnel généré par des modèles géologiques de Terre (on ne présente que les cartes relatives à la dernière composante du tenseur du gradient de gravité,  $V_{rr}$ ).

### ■ Le modèle CRUST2.0

CRUST2.0 est un modèle global de la croûte terrestre qui se présente sous la forme d'une grille dont le pas en longitude/latitude est régulier et vaut  $2^\circ \times 2^\circ$ . Chaque cellule de la grille comporte un modèle 1-D décrivant un modèle de



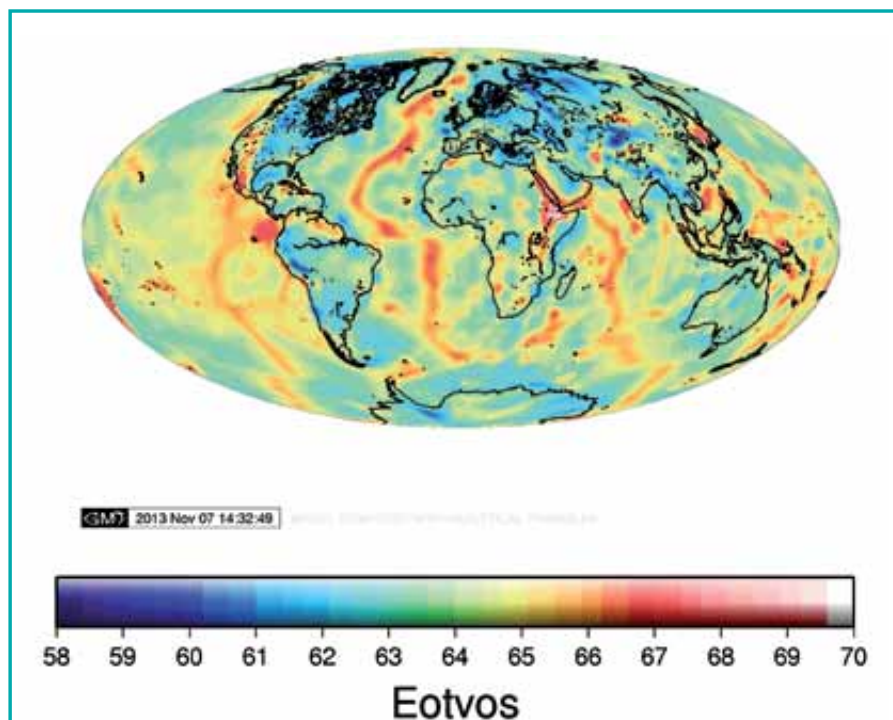


Figure 10. Carte de la composante  $V_{rr}$  du tenseur du gradient de gravité associée au modèle géologique de Terre CRUST2.0.

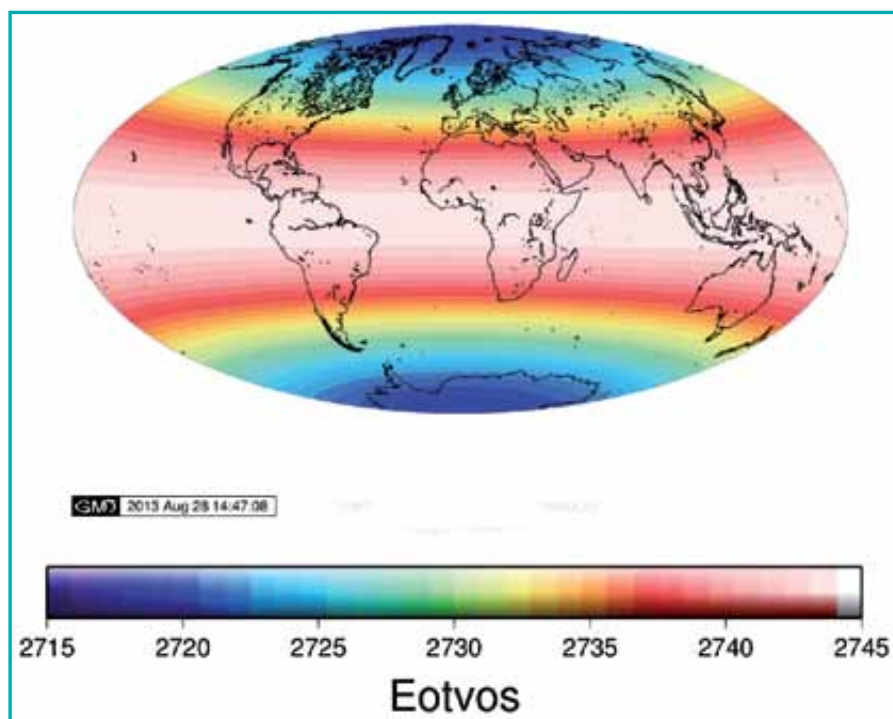


Figure 11. Carte de la composante  $V_{rr}$  du tenseur du gradient de gravité associée au modèle géologique de Terre PREM.

densité de la croûte terrestre sur une épaisseur maximale d'environ 70 km. En un point de la grille, CRUST2.0 définit : une altitude, issue du modèle topométrique (ou bathymétrique) ETOPO5 et un maximum de 7 densités

associées à 7 épaisseurs correspondant à 7 couches (glace, eau, sédiments meubles, sédiments durs, croûte supérieure, croûte moyenne, croûte inférieure). A noter que CRUST2.0 ne rend pas compte des phénomènes de

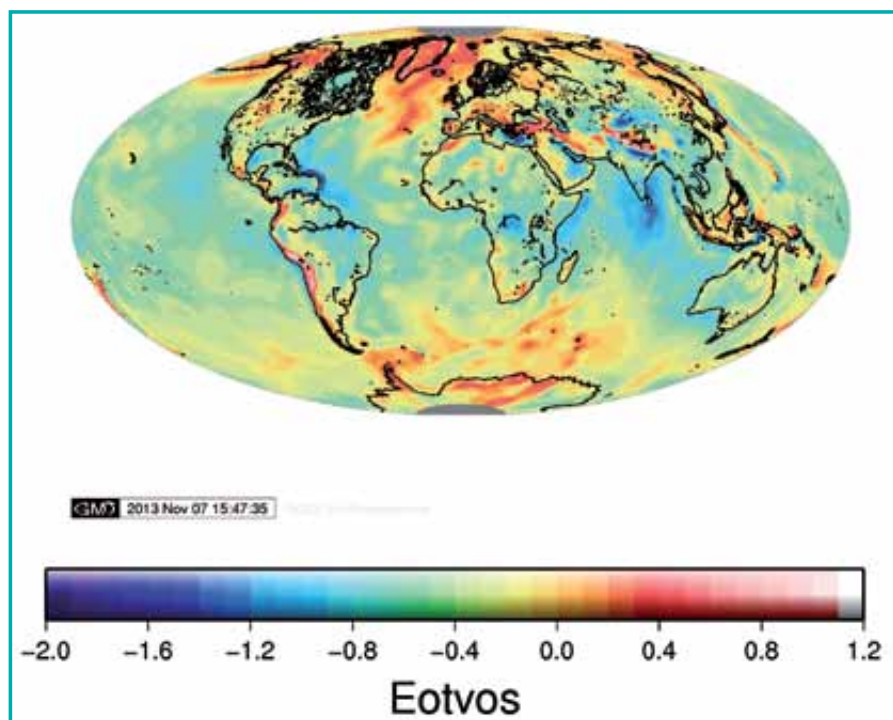
subductions dans le domaine crustal. L'effet gravitationnel produit par une Terre ellipsoïdale (uniquement la partie crustale) associée au modèle géologique CRUST2.0 est présentée sur la Figure 10. L'amplitude de l'intervalle de valeurs produites est d'environ 11 E et on peut s'attendre à ce qu'elle soit plus faible si l'on tient compte dans notre modèle de la compensation isostatique.

## Le modèle PREM

Le modèle PREM (*Preliminary Reference Earth Model*) est un modèle 1-D représentant les propriétés (dont la densité) de la Terre comme des fonctions polynomiales de son rayon. Il a été développé par Adam M. Dziewonski et Don L. Anderson en 1981 suite aux recommandations du *Standard Earth Model Committee* de l'Association Internationale de Géodésie et de l'Association Internationale de Sismologie. L'effet gravitationnel produit par une Terre ellipsoïdale associée au modèle géologique PREM est présentée sur la Figure 11. L'intensité du signal généré est plus important que celui produit uniquement par le modèle CRUST2.0 et l'intervalle de valeurs est également plus large (environ 30 E). Le signal produit par CRUST2.0 serait donc noyé si l'on venait à fusionner les deux modèles géologiques (PREM et CRUST2.0) et par conséquent, la carte résultante ressemblerait fortement à la carte présentée Figure 11.

## Anomalies de gravité GOCE/PREM

L'interprétation d'un champ gravitationnel synthétique de Terre prend tout son sens lorsque l'on peut le comparer à des observations : le satellite GOCE (*Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer*) a mesuré entre mars 2009 et novembre 2013 les composantes du tenseur du gradient de gravité grâce à un gradiomètre à trois axes constitué par trois paires d'accéléromètres. La carte des variations de la composante  $V_{rr}$  mesurée est très proche de celle générée par notre modèle de Terre ellipsoïdale associée au modèle géologique PREM. La Figure 12 présente les



**Figure 12.** Anomalies de gravité GOCE - PREM. Ces anomalies signalent les effets gravitationnels mesurés par GOCE non rendus par le modèle PREM localisés dans la croûte et vraisemblablement dans le manteau supérieur. Cette carte constitue un outil pour l'interprétation géophysique.



anomalies des mesures du satellite GOCE par rapport au modèle PREM. Cette carte est produite en retranchant aux observations issues de la mission GOCE la carte produite par le modèle PREM (cf. Figure 11). La formation des cartes d'anomalies de gravité est le point de départ des techniques de raffinement des modèles géologiques. On parlera de problème inverse lorsque l'on ajuste les paramètres du modèle à partir des mesures et d'inversion couplée lorsque le cas échéant, d'autres types de données géophysiques sont introduites pour résoudre le problème.

## Conclusion et perspectives

La modélisation numérique du champ de gravité permet dans le domaine de la géophysique, de produire des cartes d'anomalies de gravité. En adoptant un modèle géologique de Terre, qui nous renseigne sur la répartition de la densité au sein de notre planète, il est possible - en mettant en œuvre les méthodes de calcul présentées dans cet article - de calculer un champ gravitationnel synthétique de Terre. Le retranchement de ce modèle de champ aux observa-

tions gravimétriques (telles que les observations issues de la mission GOCE par exemple) permet de générer les anomalies de gravité. Elles permettent de critiquer et d'expliquer à la fois la pertinence des modèles géologiques de Terre utilisés ainsi que les observations. La suite logique de ce travail est de travailler avec des modèles géologiques de Terre de plus en plus raffinés (fusion de PREM et CRUST2.0, tenant compte du principe d'isostasie, par exemple) afin d'expliquer au mieux les observations issues du domaine spatial. ●

## Contacts

Clément ROUSSEL  
clement.rousseau@cnam.fr  
Jérôme VERDUN  
José CALI  
Frédéric DURAND

## Bibliographiques

Wild-Pfeiffer, F. (2008). A comparison of different mass elements for use in gravity gradiometry. *Journal of Geodesy*, 82 :637-653.  
Heck, B. and Seitz, K. (2007). A comparison

of tesseroïd, prism and point-mass approaches for mass reductions in gravity field modeling. *Journal of Geodesy*, 81 :121-136.

Leonardo Uieda, Everton P. Bomfim, C. B. E. M. (2011). Optimal forward calculation method of the Marussi tensor due to a geologic structure at GOCE height.

Asgharzadeh, M. F., von Frese, R. R. B. Kim, H. R., Leftwich, T. E., and Kim, J.W. (2007). Spherical prism gravity by Gauss-Legendre quadrature integration. *Journal of Geophysical Research*, 169 :1-11.

von Frese, R. Hinze, W., Braile, L., and Luca, A. (1981). Spherical-earth gravity and magnetic anomaly modeling by Gauss-Legendre quadrature integration. *Journal of Geophysical Research*, 49 :234-242.

Kellogg, O-D. (1954). *Foundations of Potential Theory*. Dovers Publications.

Dziewonski, A. M. and Anderson, D. L. (1981). Preliminary Reference Earth Model. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 25 :297-356.

Mooney, W. D. (1998). Crust5.1 : A global crustal model at 5 x 5. *Journal of Geophysical Research*, 49 :234-242.

Fortunier, R. *Elements de calcul tensoriel*, cours.

## ABSTRACT

**Key words :** forward modeling, Gauss-Legendre Quadrature, spherical prism, ellipsoidal prism, Marussi tensor

*Satellite-measured global gravity and terrain elevation are becoming increasingly available for improving our understanding of the geological properties and history of the Earth. In assessing the geological significance of the existing and growing volumes of data sets, there is great need for computing theoretical anomalous gravity fields from geological models in spherical coordinates. In the present study, we present different mass elements and explicitly develop the elegant Gauss-Legendre Quadrature formulation for numerically modeling the complete gravity effects (i.e. potential, vector and tensor gradient fields) of the spherical and ellipsoidal prism. Using a very simple situation, we also show the gravity field induced by a single spherical prism at GOCE height.*