Un changement de base utile

■ Claude MILLION

La réception des travaux topographiques effectués pour le compte de l'Etat et des différentes Collectivités Publiques a fait l'objet de récentes modifications. On a voulu montrer qu'il était très simple d'appliquer deux ensembles de points l'un sur l'autre, en minimisant les écarts, sans employer des moyens importants ou compliqués en restant conforme à la réglementation.

Depuis la parution de deux décrets, en 2003 et en 2006 fixant de nouvelles règles pour la réception et la validation des travaux topographiques effectués pour le compte de l'Etat et des différentes Collectivités Publiques, le contrôle des opérations topographiques se fait en effectuant la meilleure rotation translation possible entre le groupe des points contrôlés et celui des points de vérification [1]. Après cette transformation ce sont les propriétés statistiques et les valeurs des écarts linéaires entre les points des deux groupes qui servent à déterminer si le travail est recevable ou non. Notre but est de montrer comment calculer simplement cette transformation en l'absence de logiciel de calcul du commerce.

La transformation

Il est classique, et on a déjà montré [2], que cette transformation utilise la méthode de compensation par les moindres carrés, mais sans avoir à utiliser l'algorithme des moindres carrés. La transformation imposée par les arrêtés est la suivante, x,y sont les coordonnées des points d'un réseau et X,Y les coordonnées de l'autre peu importe lequel on verra pourquoi à la fin :

$$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = \begin{matrix} \cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & \cos\theta \end{matrix} \cdot \begin{matrix} X \\ Y \end{matrix} + \begin{matrix} T_x \\ T_y \end{matrix} \qquad (1)$$

la transformation classique du premier degré est :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .. & .. & .. & .. \\ X & Y & 1 & 0 \\ Y & -X & 0 & 1 \\ .. & .. & .. & .. \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ T_x \\ T_y \end{bmatrix} \; ou \; [\vec{\mathbf{x}}] = [\mathbf{X}].[\vec{\mathbf{a}}]$$

où les inconnues recherchées sont dans le vecteur a. Une compensation par les moindre carrés commence par la formation de la matrice normale N.

$$\mathbf{N} = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}.\mathbf{X} = \begin{bmatrix} n & \Sigma X & -\Sigma Y & 0 \\ \Sigma X & \Sigma d^2 & 0 & \Sigma Y \\ -\Sigma Y & 0 & \Sigma d^2 & \Sigma X \\ 0 & \Sigma X & \Sigma Y & n \end{bmatrix}, \Sigma d^2 = \Sigma(X^2 + Y^2)$$

tous les $\sum$ sont exprimés de 1 à n = nombre de points, soit $\sum_1^n$. La matrice vecteur x prémultipliée par devient X^{T} :

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}}.\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Sigma x \\ \Sigma x.X + \Sigma y.Y \\ \Sigma x.Y - \Sigma y.X \\ \Sigma y \end{bmatrix}$$

la matrice normale N peut être rendue diagonale si on fait en sorte que $\Sigma_1^n X = \Sigma_1^n Y = 0$ c'est-à-dire si les coordonnées sont rapportées au centre de gravité. On a alors :

$$\mathbf{N'} = \mathbf{X'}^{\mathrm{T}}.\mathbf{X'} = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma d'^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma d'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \Sigma_1^n d'^2 = \Sigma(X'^2 + Y'^2)$$

et $\mathbf{N'}^{-1} = \mathbf{X'}^{\mathrm{T}}.\mathbf{X'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Sigma d'^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Sigma d'^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$,

$$\mathbf{X'}^{\mathrm{T}}.\mathbf{x'} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Sigma x'.X' + \Sigma y'.Y' \\ \Sigma x'.Y' - \Sigma y'.X' \\ 0 \end{bmatrix}$$

avec les coordonnées rapportées à leur centre de gravité :

$$x' = x - \frac{\Sigma x}{n}, y' = y - \frac{\Sigma y}{n}, X' = X - \frac{\Sigma X}{n}, Y' = Y - \frac{\Sigma Y}{n}$$

on a de même :

$$T_x = \frac{\Sigma x - \Sigma X}{n} \; et \; T_y = \frac{\Sigma y - \Sigma Y}{n} \qquad (2)$$ puis

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{(\Sigma x'.X' + \Sigma y'.Y')}{\Sigma d^2} \\ \frac{\Sigma x'.Y' - \Sigma y'.X'}{\Sigma d^2} \\ 0 \end{bmatrix},$$

on a donc trouvé la solution sans résolution matricielle. Pour quelques points cela est même réalisable sur une calculette. Un autre avantage est de mettre en évidence que les inconnues sont "décorrélées", en effet on a aucun terme autre que nul en dehors de la diagonale principale de la matrice normale. La solution d'une inconnue ne dépend pas des autres. En définitive on écrit :

$$\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

on applique la formule (1)

$$\begin{matrix} x'' \\ y'' \end{matrix} = \begin{matrix} \cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & \cos\theta \end{matrix} \cdot \begin{matrix} X' \\ Y' \end{matrix} + \begin{matrix} T_x \\ T_y \end{matrix}$$

puis on calcule les écarts

$x' - x'', y' - y''$ enfin,

$$\sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2} \qquad (5)$$

qui sont les quantités recherchées pour le contrôle. On n'a en fait que trois inconnues T_x, T_y, θ et les translations ont été calculées et on a :

$$tg(\theta) = \frac{\Sigma x'.Y' - \Sigma y'.X'}{(\Sigma x'.X' + \Sigma y'.Y')} = t \qquad (3)$$

on calcule sin θ et cos θ en fonction de tg (θ) = t ce qui évite de calculer $\sum_1^n d^2$ qui disparaît.

$$sin(\theta) = \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}}, \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} \qquad (4)$$

Conclusions

En définitive, il suffit d'appliquer les formules 1 à 5, quel que soit le nombre de points comparés. C'est, également, très facile à programmer. Il n'y a donc pas besoin d'utiliser les logiciels du commerce. ●

Références

[1] 2006- Ludovic Andrès
Mise en œuvre de l'arrêté sur les classes de précision. Retour d'expérience de la Ville de Nice in XYZ n°108- 3e trimestre.

[2] 2002- Claude Million *L'application d'un système de coordonnées dans un autre référentiel* in XYZ n°90 - 1er trimestre.

ABSTRACT

The French specifications for the precision the topographic surveys have been drastically changed and are based on a criteria of result and simpler than the old ones. One has to compare the set of points to be checked to a set of check points by applying one set to the other to obtain the best fit only by rotation and translation. We have shown how to compute the mean difference in position very simply and to complain to the new regulations.