

# Fiabilité des réseaux géodésiques

## Application : réseau cadastral de la ville d'Oran - Algérie

■ Bachir GOURINE - Boualem GHEZALI

*L'analyse des réseaux géodésiques est une phase incontournable dans le processus de leur établissement. Elle permet de contrôler la qualité du réseau qui est caractérisée non seulement par la précision mais aussi par la fiabilité et la robustesse du réseau :*

- *La fiabilité permet la détection des observations discordantes (outliers) non détectables par l'analyse statistique usuelle.*
- *L'analyse de robustesse est basée sur la combinaison de la fiabilité et de la déformation du réseau. Elle permet une évaluation fine des effets des erreurs d'observations sur les points du réseau, en termes de robustesse en échelle, en configuration et en orientation.*

*Le présent article présente ces outils et leur application pour l'analyse des réseaux géodésiques.*

*Les résultats obtenus lors des tests effectués sur un réseau cadastral de la ville d'Oran (Algérie), comportant 45 points dont 8 points d'appui, sont jugés acceptables en vue de la précision exigée en cadastre ( $\pm 5.4$  cm). L'évaluation de la fiabilité a permis la détection d'erreurs de l'ordre de 4 mgon dans les observations. La moyenne de leurs effets sur les paramètres du réseau est de l'ordre de 0.6 mgon en orientation et de 6.9 cm en planimétrie. La robustesse du réseau en terme de configuration, d'échelle et d'orientation est, respectivement, en moyenne de l'ordre de 190 ppm, 15 ppm et 12.6 mgon. Dans les zones de faiblesse du réseau, les valeurs de la robustesse sont importantes et ceci est dû au manque de redondance des observations.*

### ■ mots-clés

Réseau Géodésique -  
Qualité - Analyse - Précision  
- Fiabilité - Robustesse

**E**n géodésie, la phase d'analyse des réseaux géodésiques permet de juger, de valider et de contrôler la qualité des observations et des paramètres géodésiques ajustés. Plusieurs études ont été menées pour instaurer une analyse fiable des résultats de l'ajustement.

Traditionnellement, les réseaux géodésiques sont analysés par des tests statistiques qui concernent les observations aberrantes, le facteur de variance a posteriori, les ellipses d'erreurs absolues et relatives et les résidus ajustés (Vanicek et al., 2001). Tous ces tests sont basés sur l'hypothèse nulle  $H_0$  qui postule que le vecteur des résidus suit une distribution normale de probabilité.

En revanche Baarda formula l'hypothèse alternative  $H_A$  qui suppose, au préalable, l'existence d'erreurs indétectables par des tests usuels (cas des observations biaisées). Ses investigations dans ce domaine le menèrent à établir la théorie de la fiabilité (Vanicek et al., 2001).

Une extension de cette théorie, appelée robustesse, vient de conforter l'analyse des réseaux géodésiques. Cette technique est basée sur la combinaison de la fiabilité et de la déformation du réseau, en utilisant le concept du tenseur de déformation définissant le gradient du champ des déplacements.

### Fiabilité des réseaux géodésiques

La fiabilité d'un réseau peut être représentée comme étant la capacité d'un réseau de détecter et de résister aux erreurs d'observations non détectables par les tests statistiques classiques. Elle dépend de la géométrie du réseau et de la précision des observations (Seemkooei, 2001). Le but recherché, en terme de fiabilité, est la minimisation de la magnitude des erreurs non détectables dans les observations et par conséquent, la minimisation des effets de ces erreurs sur les paramètres estimés.

Deux éléments essentiels définissent la fiabilité : "Fiabilité interne" et "Fiabilité externe" (Lachapelle et al., 2000).

**La fiabilité interne** permet de contrôler les observations. Elle comprend plusieurs indicateurs, notamment, la part de redondance ( $r_i$ ), le résidu standardisé et la plus petite faute détectable ( $\nabla_{ii}$ ) dans la  $i^e$  observation  $l_i$ . Cette dernière est exprimée par (Carosio et al., 1995) et (Dominici et al., 1995) :

$$\nabla_{ii} = \sigma_{v_i} \frac{\delta}{\sqrt{r_i}} \quad (1)$$

■ ■ ■ Avec :

- $\sigma_{v_i}$  : écart-type du résidu de l'observation  $l_i$ ,
- $r_i$  : part de redondance de l'observation  $l_i$ ,
- $\delta$  : paramètre d'excentrement de la densité de probabilité des résidus et il est en fonction des erreurs de I<sup>e</sup> et II<sup>e</sup> espèce ( $\alpha, \beta$ ), (Vanicek, 2001) et (Leick, 1990).

Les parts de redondance des observations sont les éléments diagonaux de la matrice R définie telle que :

$$R = I - A.(A^t.A)^{-1}.A^t.P \quad (2)$$

Où A et P, représentent respectivement les matrices de configuration et des poids des observations.

Les valeurs des parts de redondance sont comprises entre 0 et 1. La valeur 0 signifie que l'erreur sur l'observation considérée ne peut pas être identifiée et la valeur 1 signifie que l'observation est bien contrôlée.

L'indicateur de **fiabilité externe**, noté  $\nabla_x$ , est l'effet de chaque  $\nabla_{l_i}$  sur les paramètres estimés (dx, dy, dV0) des points du réseau. Il est représenté par la relation suivante (Carosio et al., 1995) et (Dominici et al., 1995) :

$$\nabla_x = (A^t P A)^{-1} A^t P \nabla_{l_i} \quad (3)$$

Un réseau géodésique est dit fiable s'il remplit les critères suivants :

- Possibilité de détection d'éventuelles erreurs dans les observations.
- L'erreur détectée dans une observation doit être petite par rapport à son écart type.
- L'effet d'une erreur sur les coordonnées doit être aussi petit que possible.

## Robustesse des réseaux géodésiques

Par définition, la robustesse d'un réseau géodésique est une combinaison de la fiabilité et de la déformation du réseau (Vanicek et al., 2001). C'est une technique plus appropriée pour l'évaluation fine de l'effet des erreurs d'observations sur le réseau. Cette méthode est basée sur le concept du tenseur de déformation qui définit le gradient du champ des déplacements.

Etant donné un champ de déplacement bidimensionnel  $U(x, y) = (u, v)^t$  en fonction de la position  $X = (x, y)^t$ , la matrice du tenseur de déformation E est définie par (Seemkooei, 2001), (Vanicek et al., 2001) et (Michel et al., 2003) :

$$E = \nabla(U) = \frac{\partial U(x, y)}{\partial X} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{ux} & e_{uy} \\ e_{vx} & e_{vy} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Cette matrice contient toute l'information sur la déformation, mais reste très difficile à interpréter. Afin de faciliter l'interprétation du tenseur de déformation, différentes grandeurs scalaires peuvent être déduites de la matrice de déformation E, appelées les primitives de la déformation, telles que :

- La dilatation ou tenseur moyen :  $\lambda = \frac{1}{2}(e_{ux} + e_{vy})$  ;
- Le cisaillement total :  $\gamma = \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \sqrt{e_{xy}^2 + e_{yx}^2}$

Où  $\tau$  et  $\upsilon$  représentent respectivement les cisaillements pur et simple, définis de la manière suivante :

$$\tau = \tau_{xy} = -\tau_{yx} = \frac{1}{2}(e_{ux} - e_{vy}) ;$$

$$\upsilon = \upsilon_{xy} = -\upsilon_{yx} = \frac{1}{2}(e_{xy} + e_{yx}) ;$$

- La rotation différentielle locale :  $\delta\omega = \omega - \Omega$

$$\text{avec : } \omega = \frac{1}{2}(e_{vy} - e_{ux}) ;$$

$\Omega$  : représente la rotation globale qui correspond à la moyenne des  $\omega$  sur les points du réseau.

L'analyse de robustesse utilise les valeurs absolues de la fiabilité externe maximale  $|\nabla_x|_{\max}$  du réseau comme étant un champ de déplacement local (Seemkooei, 2001). Les gradients du champ de déplacement local sont évalués séparément pour chaque coordonnée x et y afin de déterminer les composantes de la matrice du tenseur de déformation leur correspondant.

L'analyse et l'interprétation des résultats nécessitent la détermination des valeurs maximales des primitives de déformations notées ( $\lambda_{\max}, \gamma_{\max}, \delta\omega_{\max}$ ) qui décrivent, respectivement, la robustesse du réseau en échelle (dilatation), en configuration (cisaillement total), et en orientation (rotation différentielle).

## Application

L'application a porté sur l'analyse du réseau cadastral de la ville d'Oran qui est composé de 37 points nouveaux et de 8 points d'appui, Figure 1. Les données géodésiques utilisées lors du traitement et l'analyse de ce réseau sont constituées de 204 observations (194 directions et 10 distances). Les coord-

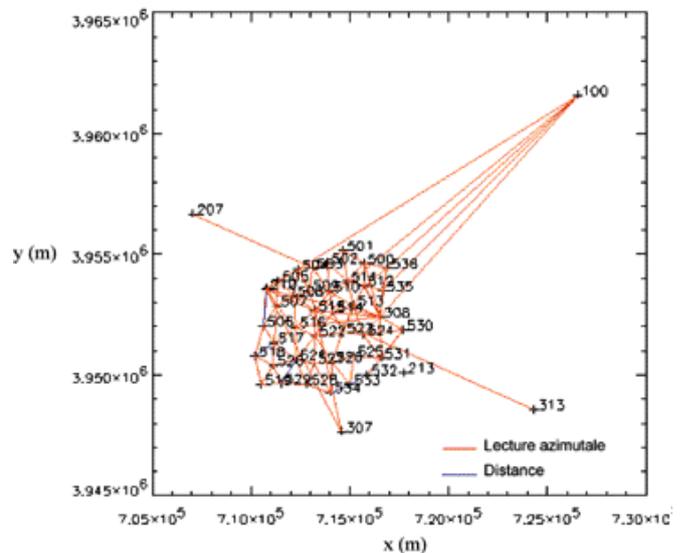
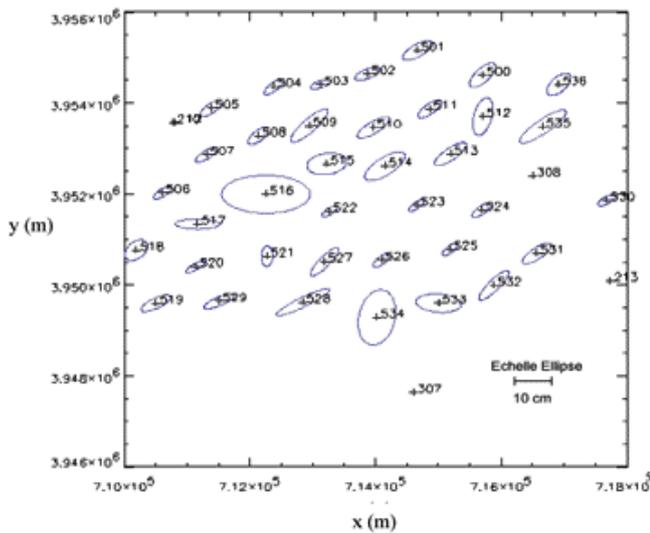


Figure 1 : Configuration du réseau cadastral de la ville d'Oran.



**Figure 2 : Ellipses d'erreurs des points du réseau cadastral de la ville d'Oran.**

données des points sont exprimées dans le système géodésique Algérien (Nord Sahara 1959), en projection UTM (fuseau 30).

Afin de juger la qualité des paramètres ajustés, nous avons évalué les ellipses d'erreurs des points du réseau, Figure 2. Les dimensions des ellipses d'erreurs sont en moyenne de 5.1 cm. La Figure 2 montre que la majorité des ellipses ont des tailles sensiblement égales, de l'ordre de 4.6 cm. Par conséquent, la précision obtenue sur l'ensemble des points du réseau est homogène et jugée acceptable pour le cadastre.

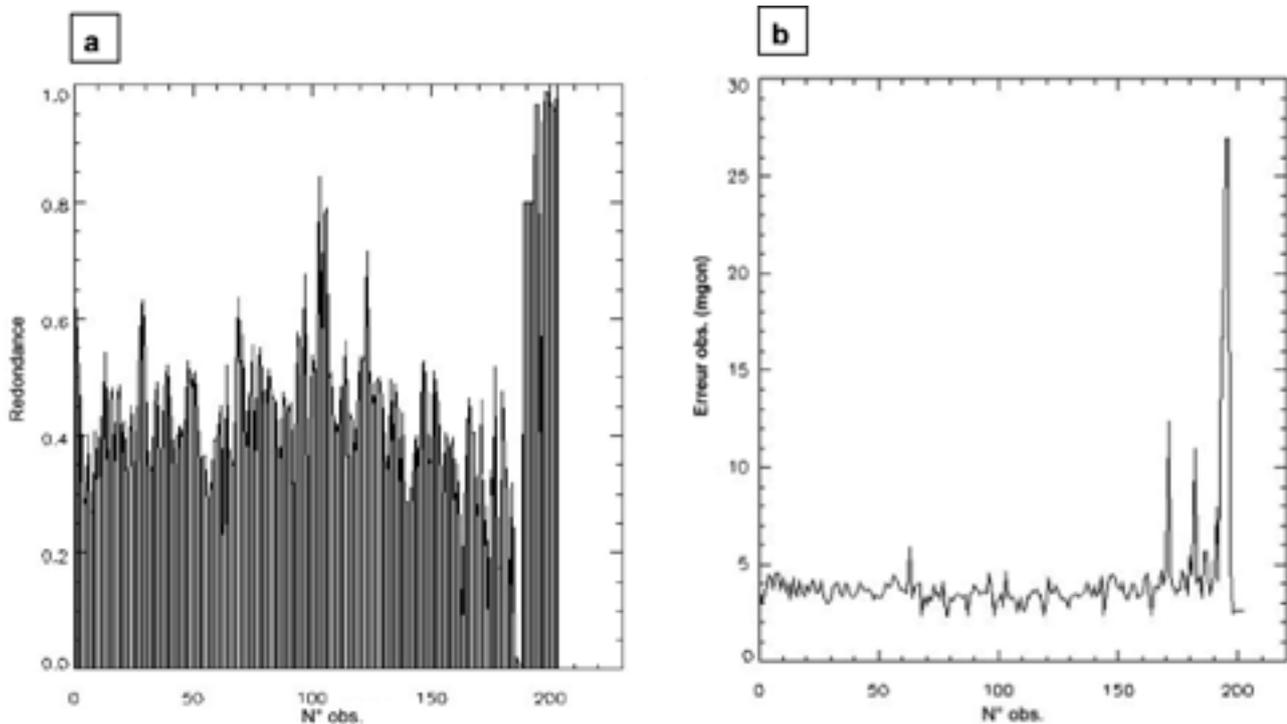
### ■ Fiabilité du réseau

Les figures 3 et 4 représentent, respectivement, la magnitude des erreurs d'observations non détectables par les tests statistiques classiques et leurs effets sur les paramètres estimés du réseau.

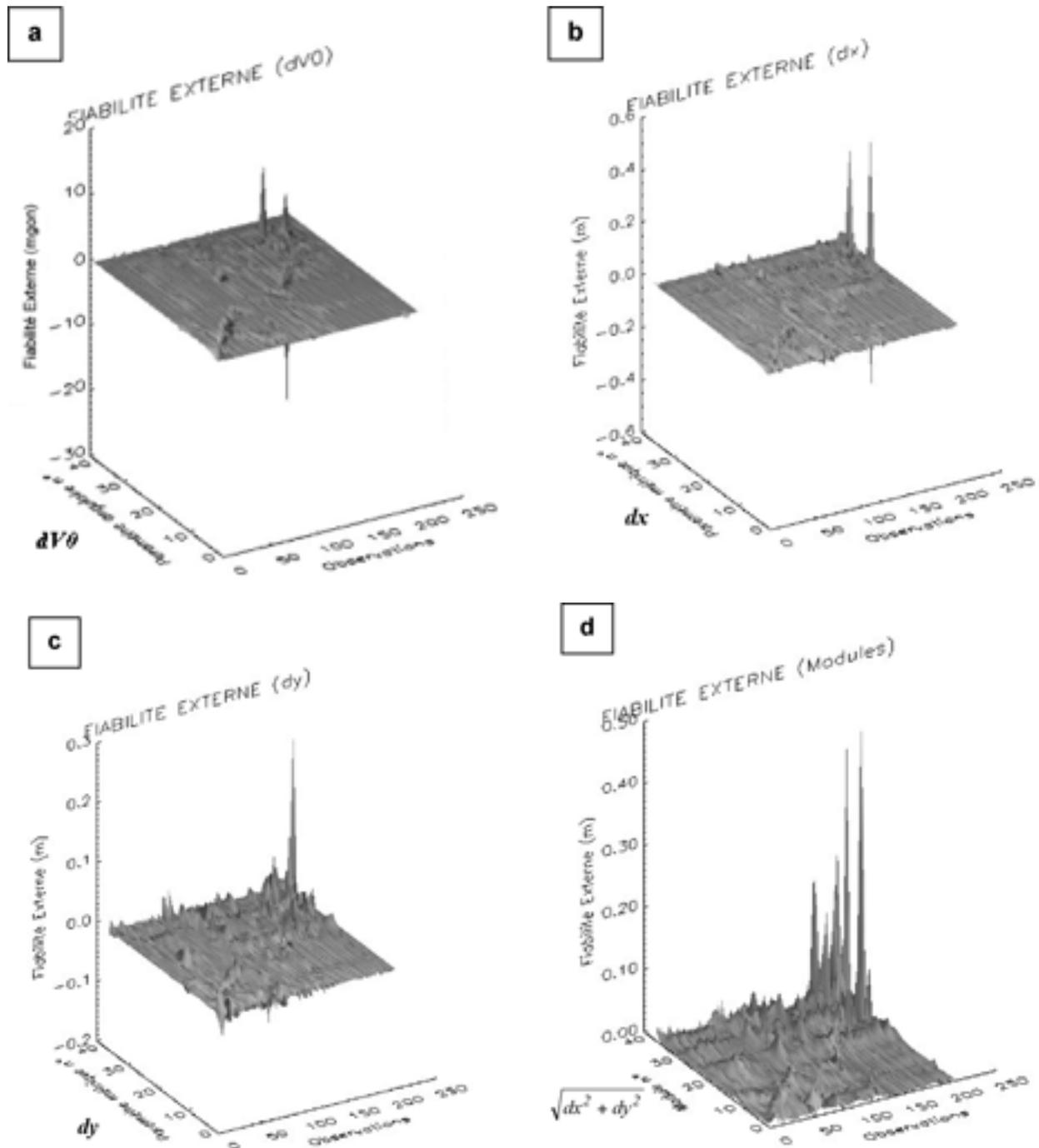
Les paramètres estimés dépendent essentiellement de la part de redondance des observations impliquées dans leur détermination. Plus la part de redondance d'une mesure est petite (i.e., faible contribution au degré de liberté) plus son influence sur les paramètres estimés devient importante. En d'autres termes, si la part de redondance est proche de 1, la variance des résidus est de l'ordre de la variance des observations; et par conséquent, la variance des observations ajustées tend vers 0. Dans ce cas, le bruit dans les résidus est égal à celui des observations (i.e., les observations sont ajustées avec une grande précision). Par contre, si la part de redondance est proche de 0, alors la variance des résidus est nulle (i.e., la variance des observations ajustées est égale à celle des observations).

La Figure 3a montre que les valeurs de la part de redondance des observations sont en moyenne de 44% et que les erreurs détectées (fiabilité interne) sont de l'ordre de 4 mgon; à l'exception de quelques observations dont la part de redondance est trop faible ( $\approx 1\%$ ) et le seuil de détection d'une faute de l'ordre de 26.3 mgon.

Dans le cadre de la conception des réseaux géodésiques, il est à noter que d'autres indicateurs de fiabilité interne doivent être utilisés, tels que le résidu standardisé et la grandeur probable d'une faute détectée.



**Figure 3 : Fiabilité du réseau (a) redondance des observations (b) fiabilité interne du réseau.**

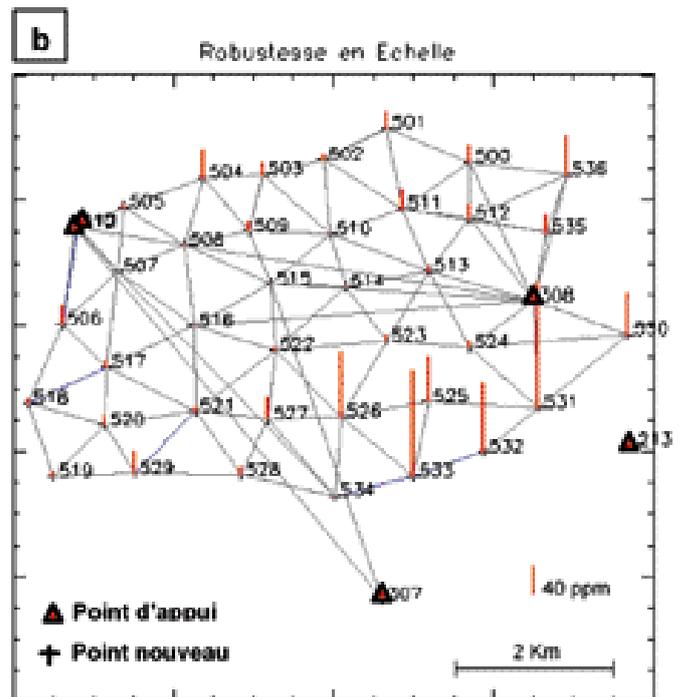
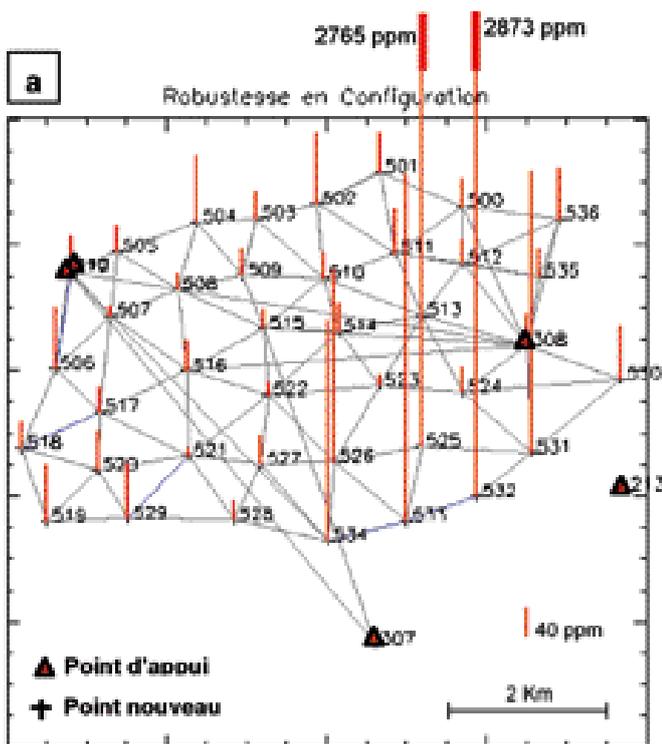


**Figure 4 :** Fiabilité externe du réseau : (a) en orientation  $V_0$  (b) en coordonnée  $x$  (c) en coordonnée  $y$  (d) en position 2D. Pour chaque graphe, l'axe des X représente le numéro des observations, l'axe des Y représente le numéro des paramètres et l'axe des Z représente les valeurs de la fiabilité externe.

- ■ ■ Afin de satisfaire les critères de fiabilité du réseau, il est recommandé de (Gourine, 2004) :
  - Concevoir le réseau de sorte que les parts de redondance des observations soient semblables, afin que la capacité de détection des erreurs d'observations soit sensiblement identique en tout point du réseau. La fiabilité du réseau repose sur le critère général suivant :  $\text{Min}(r_i) \rightarrow \text{Max}$ , où  $r_i$  représente la part de redondance de la  $i^{\text{e}}$  observation.

- Disposer d'un lot d'observations  $n$  qui soit au moins 3 fois supérieur au nombre de paramètres à estimer  $p$ . Par conséquent, la somme des parts de redondance des observations  $\sum r_i$  (nombre de degré de liberté du réseau  $n - p$ ) sera au moins deux fois supérieure au nombre des paramètres :  $\sum r_i = n - p \geq 2p$ , avec :  $n \geq 3p$ .

Les statistiques des effets maximaux des erreurs détectées par la fiabilité interne sur l'ensemble des paramètres ajustés



sont représentées dans le tableau suivant :

Fiabilité externe	Min	Max	Moyenne
dv0 (mgon)	-27.0	11.2	0.6
dx (cm)	-47.0	33.0	-1.8
dy (cm)	-12.1	26.3	-0.2
Module $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ (cm)	2.1	47.3	6.9

**Tableau 1 : Statistiques de la fiabilité externe du réseau**

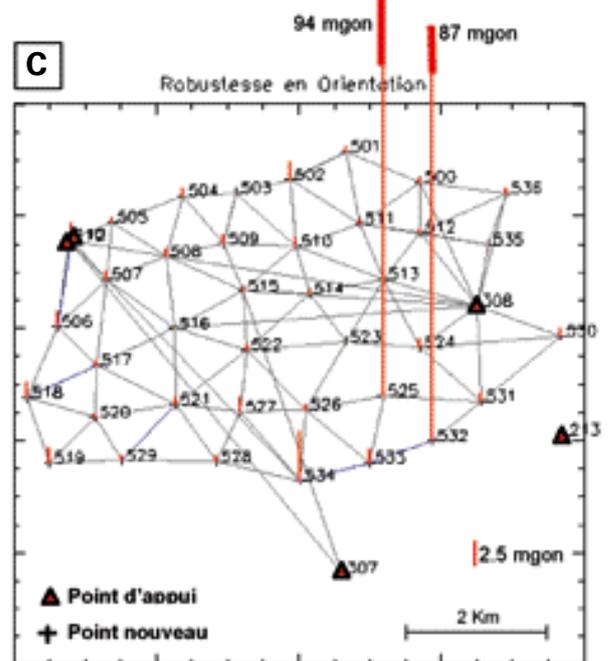
Le tableau (1) et la Figure 4 montrent que les effets maximaux des biais de mesures sur les paramètres du réseau sont en moyenne de l'ordre de 0.6 mgon sur l'orientation et de 6.9 cm sur la position planimétrique.

Dans l'ensemble, ces biais n'exercent pas d'influences significatives sur les coordonnées du réseau, compte tenu de la précision requise en cadastre qui est de  $\pm 5$  cm. Seuls les points dont la part de redondance des observations est faible peuvent subir des erreurs importantes.

### ■ Robustesse du réseau

La Figure 5 illustre la robustesse du réseau en terme de configuration, d'échelle et d'orientation sur chaque point du réseau cadastral. Elle est caractérisée par les valeurs absolues des trois quantités primitives de déformation : cisaillement  $\gamma$  (configuration), dilatation  $\lambda$  (échelle) et rotation différentielle  $\delta\omega$  (orientation).

En moyenne la robustesse du réseau est de l'ordre de 190 ppm en configuration, de 15 ppm en échelle et de



**Figure 5 : Robustesse du réseau (a) en configuration (b) en échelle (c) en orientation.**

2.6 mgon en orientation. Les points de moindre robustesse, par exemple 525 et 532, Figure 5a et 5c, sont distingués par des valeurs importantes. Ceci est dû à une faible part de redondance des mesures relatives à ces stations et à d'éventuelles observations discordantes. Par conséquent, il est important d'augmenter le nombre d'observations pour ces points (zones de faiblesse du réseau) afin de garantir la robustesse du réseau.

## Conclusion

La méthodologie d'analyse des réseaux géodésiques, adoptée dans cet article, présente un avantage dans la mesure où elle permet de quantifier la qualité des réseaux géodésiques en termes de fiabilité et de robustesse conjointement à l'analyse statistique classique. L'évolution de la théorie de la fiabilité a donné naissance à une nouvelle technique dénommée analyse de robustesse qui permet d'évaluer efficacement les effets des erreurs d'observations sur chaque point du réseau en terme de tenseur de déformation. Pour une interprétation facile des résultats, les valeurs des déformations sont exprimées en termes de robustesse en échelle, en configuration et en orientation.

Toutefois, la fiabilité et la robustesse restent tributaires (Gourine, 2004):

- de la part de redondance de chaque observation (géométrie du réseau),
- du nombre de degré de liberté du réseau,
- de la pondération des mesures.

Ces conclusions sont confortées par les résultats obtenus lors des tests effectués sur le réseau cadastral de la ville d'Oran.

## Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier le Professeur Bertrand Merminod (EPFL, Lausanne) pour l'aide qu'il a apportée dans la correction de cet article et pour ses précieuses remarques faites sur ce travail. ●

## Contact

**Bachir GOURINE - Boualem GHEZALI**

Division de Géodésie  
Centre National des Techniques Spatiales  
BP 13, Arzew – 31200 ALGERIE  
E-mail : bachirgourine@yahoo.com

## Références

- [1] Carosio A., Reis O., 1995. *Méthodes géodésiques et modèles mathématiques pour l'implantation des nouvelles transversales alpines*, Revue XYZ n°62, 1<sup>er</sup> trimestre 1995.
- [2] Corsilla F., 1984. *Tecniche di ottimizzazione delle reti geodetiche*. Publication, Bollettino della società italiana di topografia e fotogrammetria, N°2 - 1984.
- [3] Dominici D., Stoppini A., Unguendoli M., 1995. *Precision and reliability versus surplus measurements in GPS networks*. Publication, Bollettino di geodesia e scienze affini, N°4, 1995.
- [4] Gourine B., 2004. *Ajustement avec contraintes du réseau géodésique national. Application : réseau de base*. Mémoire de magister, CNTS, Arzew, septembre 2004.

- [5] Lachapelle G., Ryan S., 2000. *Statistical reliability measures for GPS*. Communication, IMA workshop on mathematical challenges in GPS, Université de Minnesota, Etats Unis, Août 16-18, 2000.
- [6] Leick A., 1990. *GPS satellite surveying*. Edition John Wiley & Sons, New York, Etats Unis, 1990.
- [7] Seemkooei A.A., 2001. *Comparison of reliability and geometrical strength criteria in geodetic networks*. Springer Verlag, volume 75, n° 4, Juillet 2001.
- [8] Vanicek P., Craymer M.R., Krakiwsky E.J., 2001. *Robustness analysis of geodetic horizontal networks*. Springer Verlag, volume 75, n°4, pp199-209, 2001.
- [9] Michel V., Person T., 2003. *From geodetic monitoring to deformation tensors and their reliability*. 11th International FIG Symposium on Deformation Measurements, Grèce, 25-28 Mai, 2003.

## ABSTRACT

**Keywords:** Geodetic Network, Quality, Analysis, Precision, Reliability, Robustness.

*The analysis of the geodetic networks is an important phase in the process of their establishment. It permits to control the quality of the network which is characterized not only by the precision but also by the reliability and the robustness of the network:*

- *The reliability permits the detection of the undetectable gross errors of observations by the usual statistical analysis.*
- *The robustness analysis is based on the combination of the reliability and the deformation of the network. It permits a fine evaluation of the effects of gross errors on the network points, in terms of robustness in scale, in configuration and in orientation.*

*The present article presents these tools and their application to the analysis of geodetic networks. The results obtained during the tests carried out on a cadastral network of the town of Oran (Algeria), comprising 45 points with 8 reference points, are considered to be acceptable for the precision required by the cadastre ( $\pm 5.4\text{cm}$ ). The evaluation of reliability has permitted the detection of errors of about 4 mgon in the observations. The average value of their effects on the network parameters is about 0.6 mgon in orientation and 6.9 cm in planimetry. The robustness of the network in terms of configuration, scale and orientation is, respectively, on average about 190 ppm, 15 ppm and 12.6 mgon. In the weakness areas of the network, the robustness values are important and this is due to the lack of redundancy in the observations.*