

Conversion altimétrique des hauteurs ellipsoïdales par GPS

■ A. ZEGGAI - S.A BENAHMED DAHO - B. GHEZALI - A. AYOUAZ - H. TAIBI - R. AIT AHMED LAMARA

L'objectif de ce travail est de déterminer avec quelle précision on pourra transformer une altitude ellipsoïdale en altitude orthométrique dans une zone test située dans le nord-ouest de l'Algérie. Dans ce contexte, un ensemble de 34 points GPS nivelés, ainsi que le modèle local du géoïde gravimétrique calculé par la division de Géodésie (Centre National des Techniques Spatiales), à partir des données gravimétriques terrestres validées et fournies par le Bureau Gravimétrique International (B.G.I), ont été intégrés dans cette comparaison. Ce géoïde de résolution 5'x5'a été calculé par la méthode de collocation rapide sur le territoire national entre les limites [20°, 37°] en latitude et [-10°, 7°] en longitude en utilisant la technique de retrait restauration [Benahmed Daho, 2000]. Par ailleurs, et afin de minimiser les dispersions entre les ondulations interpolées à partir du modèle du géoïde gravimétrique avec celles dérivées à partir du GPS et du nivellement, nous avons testé les modèles paramétriques à quatre et cinq paramètres pour en déduire le modèle optimum dans la zone d'étude. La précision des résultats obtenus, après adaptation, est de l'ordre du ppm et qui reste tributaire de la qualité et de la densité des données intégrées dans cette adaptation.

■ mots-clés

nivellement, géoïde, altitude orthométrique, altitude ellipsoïdale, GPS, collocation.

L'exécution, sur une large échelle des lignes de nivellement, oblige à tenir compte de tous les effets qui interviennent (courbures terrestres, réfraction atmosphérique, défaut de parallélisme des surfaces de niveau,...). Les erreurs, qui proviennent des instruments et des opérateurs, donneront des fermetures importantes dès que les cheminements s'étalent sur une vaste étendue d'un territoire.

La méthode la plus précise pour la mesure d'une position verticale sur une courte ligne de base, reste le nivellement classique direct (nivellement géométrique de précision). Pour des longs cheminements en terrains accidentés, son utilisation deviendra plus difficile, son coût sera élevé et perdra rapidement de précision [Zeggai 1996].

A cette technique de nivellement, s'est substituée une nouvelle technique, basée sur l'utilisation du GPS (Global Positioning System) qui permet de s'affranchir de toutes les contraintes classiques tout en offrant un gain en temps, précision et en coût de revient.

Néanmoins, le GPS ne permet pas de fournir directement les altitudes orthométriques. En effet, l'altitude obtenue par la technique GPS est une hauteur ellipsoïdale, purement géométrique, c'est à dire la distance entre le repère au sol et l'ellipsoïde de référence. La transformation de cette composante en hauteur orthométrique exige nécessairement l'information sur l'ondulation du géoïde de précision compatible à celle obtenue par le GPS (centimétrique). En d'autre terme, la détermination des altitudes orthométriques par GPS nécessite la

combinaison du géoïde, des données issues du GPS (altitudes ellipsoïdales) et du nivellement de précision (altitudes orthométriques). La précision des résultats reste tributaire de la qualité du modèle du géoïde (local ou global), des coordonnées des points exprimées dans le système géodésique et (WGS 84), ainsi que du réseau de nivellement national (NGA), de la densité et la répartition géographique des points.

Principe du nivellement par GPS

Les hauteurs mesurées par nivellement classique font référence à une surface équipotentielle de pesanteur qui est le géoïde, tandis que ces hauteurs mesurées par GPS font référence à une surface géométrique qui est l'ellipsoïde WGS84.

Théoriquement, l'ondulation du géoïde (N) est liée aux altitudes ellipsoïdale (h_e) et orthométrique (h) par la relation :

$$N = h_e - H \quad (01)$$

Les quantités h_e et N sont exprimées dans le même système de référence. L'équation (01), montre que pour chaque point, d'une part, la normale et la verticale au géoïde sont confondues (déviations de la verticale faibles), et d'autre part, les courbures de la verticale et de la normale sont faibles. La relation est vraie à 01 mm près, donc en première approximation linéaire et par conséquent les trois grandeurs sont parfaitement liées.

La figure 1 illustre la relation entre les trois grandeurs fondamentales du nivellement.

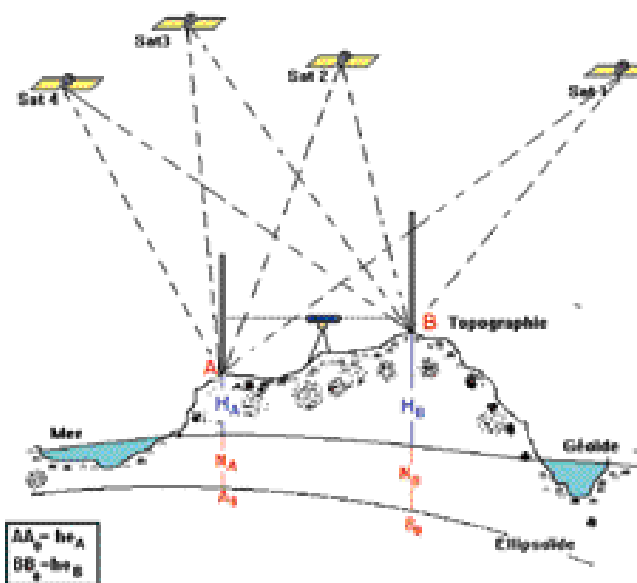


Figure 1 : Relation entre H, he et N.

■ ■ ■ En pratique, cette relation n'est jamais satisfaite à cause de plusieurs facteurs dont les principaux sont :

- Les erreurs aléatoires dans les altitudes h, H, N
- Les inconsistances des datum inhérents aux différents types d'altitudes
- Les effets systématiques et les distorsions dans les données d'altitudes
- Les hypothèses et les approximations théoriques introduites dans le traitement des données observées.

En général, la plupart de ces discordances sont attribuées aux erreurs de grandes longueurs d'onde introduites par l'utilisation d'un modèle global dans le calcul d'un géoïde gravimétrique qui n'est pas forcément optimal dans la zone en question, aux erreurs systématiques et aux inconsistances des datum inhérents aux différents types d'altitudes. En pratique, ces erreurs sont modélisées et absorbées par l'utilisation d'un *modèle paramétrique de surface de correction* dans l'ajustement combiné des réseaux GPS, nivellement et géoïde.

C'est justement l'objet de l'article de calculer un modèle paramétrique de surface de correction et d'en estimer sa qualité.

Evaluation du géoïde aux points GPS - nivelés : Modèles de surface de correction adoptés

L'évaluation de la qualité d'un géoïde local est basée généralement sur la comparaison des ondulations interpolées à partir de ce modèle avec celles obtenues par l'utilisation conjointe du GPS et du nivellement. Le modèle mathématique d'ajustement combiné des données GPS, nivellement et géoïde, proposé dans cet article, est donné par l'expression suivante :

$$h_{ei} - H_i - N_i^{GRAV} = N_i^{GPS} - N_i^{GRAV} = \Delta N_i = a_i^T x + v_i \quad (02)$$

N_i^{GPS} : Hauteur du géoïde obtenue par nivellement/GPS au point i

N_i^{GRA} : Hauteur du géoïde obtenue par voie gravimétrique au point i

x, a_i^T et v_i représentent respectivement le vecteur de $n \times 1$ paramètres inconnus, le tableau de $n \times m$ coefficients connus et le terme supposé comme étant un bruit aléatoire résiduel [Kotsakis, Sideris 1999]. Les modèles de surface de correction adoptés dans cet article sont les suivants.

■ Le modèle d'évaluation à quatre paramètres

Les modèles les plus utilisés dérivent d'une transformation par similitude à quatre, ou cinq paramètres pour les erreurs issues de grandes longueurs d'onde. Le modèle, à quatre paramètres habituel, appliqué et en coordonnées cartésiennes est comme suit [Jiang & Duquenne 1996] :

$$a_i^T x = \frac{X_i}{r} T_X + \frac{Y_i}{r} T_Y + \frac{Z_i}{r} T_Z + kr \quad (03)$$

Où r est valeur moyenne du rayon de la terre, T_X, T_Y, T_Z sont les translations et k correspond au facteur d'échelle.

Le modèle cartésien peut être représenté en coordonnées géographiques (l, j) de la manière suivante :

$$a_i^T x = \cos \varphi_i \cos \lambda_i T_X + \cos \varphi_i \sin \lambda_i T_Y + \sin \varphi_i T_Z + kr \quad (04)$$

Comme :

$$a_i^T x + v_i = \Delta N_i = N_i^{GPS} - N_i^{GRAV} = h_{ei} - H_i - N_i^{GRAV} \quad (05)$$

D'où le modèle de surface de correction à 4 paramètres [Heiskanen et Moritz 1967] :

$$\Delta N_i = a_0 + a_1 \cos \varphi_i \cos \lambda_i + a_2 \cos \varphi_i \sin \lambda_i + a_3 \sin \varphi_i + v_i \quad (06)$$

Avec : $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (k.r, T_X, T_Y, T_Z)$ les inconnues

■ Le modèle d'évaluation à cinq paramètres

Pour le cas du modèle à cinq paramètres donné aussi par [Heiskanen et Moritz 1967] :

$$\Delta N_i = N_i^{GPS} - N_i^{GRAV} = h_{ei} - H_i - N_i^{GRAV} \quad (07)$$

$$\Delta N_i = a_0 + a_1 \cos \varphi_i \cos \lambda_i + a_2 \cos \varphi_i \sin \lambda_i + a_3 \sin \varphi_i + a_4 \sin^2 \varphi_i + v_i \quad (08)$$

Remarque : L'adaptation se réalise par moindres carrés sur tous les points GPS - nivelés en ajustant les coefficients de transformations (a_0, a_1, a_2, a_3) ou $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$. Ces coefficients n'ont pas de signification précise, l'objectif étant seulement de mettre le mieux possible en correspondance les deux surfaces (géoïde obtenu par nivellement/GPS et géoïde obtenu par voie gravimétrique) à l'ensemble des points communs.

En écrivant que $a_i^T x + v_i = \Delta N_i$ sous la forme :



Figure 2 : Réseau GPS /nivellement de la région d'Oran.

$$A.X + V = B \quad (09)$$

Où A est la matrice des coefficients, X le vecteur des inconnues, B le vecteur des observations et V le vecteur des résidus. La solution est donnée par la relation [10] :

$$X = (A^T.A)^{-1}.A^T.B \quad (10)$$

Avec $X = (a_0, a_1, a_2, a_3)^T$ pour 04 paramètres

Et $X = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)^T$ pour 05 paramètres

Application : région d'Oran (Algérie)

■ Présentation de la zone de travail

Plusieurs campagnes d'observations GPS et de rattachements aux points de nivellement ont été menées dans la région d'Oran. La zone de travail (figure 2) est située au nord ouest de l'Algérie entre les limites: $35^{\circ}30' \leq \varphi \leq 36^{\circ}07'$ et $-0^{\circ}55' \leq \lambda \leq 0^{\circ}10'$.

Un ensemble de 34 points a été observé par GPS en mode statique (entre 30 mn et 01 heure selon la longueur de base). Le point de référence (principal) de rattachement par GPS se trouve à Arzew. Ce dernier fait partie du réseau ALGEONET (Algerian Geodynamical Network). Le projet ALGEONET, mené conjointement par le CNTS et l'INCT (Institut National de Cartographie et de Télédétection), avait pour objectif la mise en place d'un réseau GPS précis, couvrant essentiellement la partie nord de l'Algérie, pour les applications géodynamiques. Il a été monté en 1998, ré-observé en 2002, après l'extension dès 1995 du projet TYRGEONET (Tyrhenian Geodetic Network - ING Italie) en Algérie.

Tous les points observés par GPS sont en majorité des repères de nivellement ou leurs points excentrés.

Les données utilisées dans le traitement sont constituées de 34 points doubles (30 points doubles après analyse statistique), dont 17 points d'appui et 13 points de contrôle, répartis sur la région d'Oran (Figure 2).

Le modèle de géoïde adopté à travers cette application est le géoïde gravimétrique local calculé à partir des données gravimétriques validées et fournies par le BGI en utilisant la méthode de collocation rapide en combinaison avec la technique de retrait - restauration.

Pour mener à bien le calcul du nivellement par GPS, plusieurs tâches et collecte des données ont été réalisées :

- Opérations de rattachement par nivellement direct (classique) des repères de nivellement non stationnés par GPS.
- Observations et traitement par GPS des repères nivelés ou stations excentrées.
- Collecte de la grille du géoïde gravimétrique local. Cette grille d'un pas de 5'x5' est disponible au niveau de la division de géodésie (CNTS - Arzew).
- Répertoire des altitudes des repères de nivellement.

■ Méthodologie de traitement adoptée

La solution est donnée par la combinaison des hauteurs ellipsoïdales obtenues par GPS, des altitudes orthométriques fournies par le nivellement de précision et du géoïde gravimétrique local.

La méthode suppose la parfaite détermination du nivellement sur les points de référence et des mesures de lignes de bases GPS. La relation [11] ne peut pas être affectée d'aucune erreur.

Les étapes de calcul sont les suivantes :

1^{re} étape : Calcul de l'ondulation du géoïde par GPS/Nivellement

$$N_i^{GPS} = h_{ei} - H_i \quad (11)$$

Avec : $1 \leq i \leq n$ où n représente le nombre de points GPS nivelés.

2^e étape : Interpolation bilinéaire des ondulations du géoïde obtenues par voie gravimétrique sur les points GPS à partir d'une grille de géoïde local :

$$N_i^{GRAV} = \text{Interpolation_géoïde_gravimétrique}(\lambda_i, \varphi) \quad (12)$$

3^e étape : Calcul de la différence entre le géoïde obtenu par GPS/Nivellement et le géoïde gravimétrique local ou le géoïde global :

$$\Delta N_i = N_i^{GPS} - N_i^{GRAV} = h_{ei} - H_i - N_i^{GRAV} \quad (13)$$

4^e étape : Ajustement des paramètres de transformation par la méthode des moindres carrés :

$$X = (A^T.A)^{-1}.A^T.B \quad (14)$$

Avec : $X = (a_0, a_1, a_2, a_3)^T$ Ou $X = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)^T$

5^e étape : Evaluation de l'ondulation du géoïde corrigé sur les points nouveaux :

$$N_{\text{corrigé}} = N_{\text{GRAV}} + C \quad (15)$$

Où C est la correction qui représente la fonction des paramètres de transformation (a_0, a_1, a_2, a_3) ou $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ et des coordonnées géographiques (j, l) du point considéré.

6^e étape : Calcul de l'altitude orthométrique des points nouveaux :

$$H = h_e - N_{\text{corrigé}} \quad (16)$$

A partir d'une surface corrigée par GPS/nivellement du géoïde gravimétrique utilisé dans cette application, l'altitude orthométrique peut être évaluée de la manière suivante :

$$H_{\text{ortho}} = H_{e \text{ WGS84}} - (N_{\text{GRAV}} + C) \quad (17)$$

Modèle d'ajustement	Résidus			
	Min (m)	Max (m)	Moy. (m)	RMS (m)
Modèle à 4 paramètres	-0.034	0.047	0.000	0.026
Modèle à 5 paramètres	-0.036	0.042	0.000	0.025

Tableau 1 : Résidus obtenus après ajustement.

■■■ Avec :

- C : correction à apporter au géoïde gravimétrique, obtenue par le modèle de surface de correction à 4 ou 5 paramètres.
- h_{eWGS84} : hauteur ellipsoïdale (altitude GPS)
- N_{GRAV} : Hauteur du géoïde obtenue par voie gravimétrique.

■ Analyse des résultats obtenus

Le tableau suivant (1) résume les statistiques de l'adaptation du géoïde gravimétrique aux points GPS nivelés sur les 17 points d'appui.

L'écart type moyen des résidus après ajustement des paramètres de transformation est de l'ordre de 2.6 centimètres.

Test d'hypothèse : Le test d'hypothèse consiste à rejeter ou à accepter une hypothèse statistique, appelée hypothèse nulle (H_0). Les observations issues d'une population normale sont acceptées si $\chi^2_{n-m} < \chi^2_{\text{théorique}}$ où χ^2_{n-m} est la valeur de la distribution du (loi du Khi deux) à n-m degrés de liberté et un niveau de signification α .

La probabilité est donc : $\Pr(\chi^2_{\text{observé}} < \chi^2_{\text{théorique}}) = 1 - \alpha$ (18)

$\chi^2 = (n-m) \hat{\sigma}_0^2 / \sigma_0^2$ (19)

Avec : σ_0 écart type a priori pris égale à ± 05 cm en référence aux tests effectués sur 109 points de contrôle [Benahmed Daho, 2003].

Test de Student : L'observation est acceptée si

$(\bar{m} - t \cdot \hat{\sigma}_0 < V_i < \bar{m} + t \cdot \hat{\sigma}_0)$

où t est la valeur tabulée de la distribution de Student.

où $(\bar{m}, \hat{\sigma}_0)$ représentent respectivement moyenne et écart type du vecteur des résidus (V_i).

Suivant la distribution des écarts NGPS -Ngrav (tableau 1), nous constatons que:

- Les écarts ne dépassent pas 4.7 cm en valeur absolue.
- La moyenne des écarts est nulle.

Modèle d'ajustement	Résidus Probabilité=95 % ($\alpha = 5\%$)							
	Degré de liberté	σ_0 à priori	$\hat{\sigma}_0$ à posteriori	$\chi^2_{\text{théorique}}$	$\chi^2_{\text{observé}}$	t-distribution (Student)	Test du khi deux	Test de Student
4 paramètres	13	0.05	0.026	22.3610	3.6058	1.7712	positif	0 observations suspectes
5 paramètres	12	0.05	0.025	21.0250	2.9775	1.7825	positif	0 observations suspectes

Tableau 2 : Tests obtenus sur les points d'appui.

Modèle d'ajustement	Ecart ΔH_{ortho}			
	Min (m)	Max (m)	Moy. (m)	RMS (m)
Modèle à 4 paramètres	-0.063	0.059	0.009	0.035
Modèle à 5 paramètres	-0.061	0.058	0.009	0.034

Tableau 3 : Statistiques des écarts aux points de contrôle.

Les tests statistiques, effectués sur notre zone d'étude, sont regroupés dans le tableau 2.

Le tableau 2 montre que le test du χ^2 avec un niveau de signification de 5%, est positif pour l'ensemble des modèles ; ceci signifie que les résidus suivent la loi normale et que le modèle d'ajustement ne présente pas des distorsions. L'hypothèse initiale (H_0) est donc acceptée avec un risque de 5 %. Le test de Student a révélé qu'aucune observation n'a été rejetée (tableau 2).

Cependant, l'écart quadratique moyen des résidus signifie uniquement que l'ajustement est optimum au sens des moindres carrés entre les hauteurs du géoïde gravimétrique et celles obtenues par la combinaison GPS/Nivellement. Il ne laisse à aucun cas penser que les altitudes orthométriques peuvent être déduites des observations GPS avec une précision de 2.6 cm. A cet effet, afin d'évaluer la précision réelle de l'ajustement, les altitudes orthométriques observées de 13 points de contrôle ont été comparées avec leurs homo-

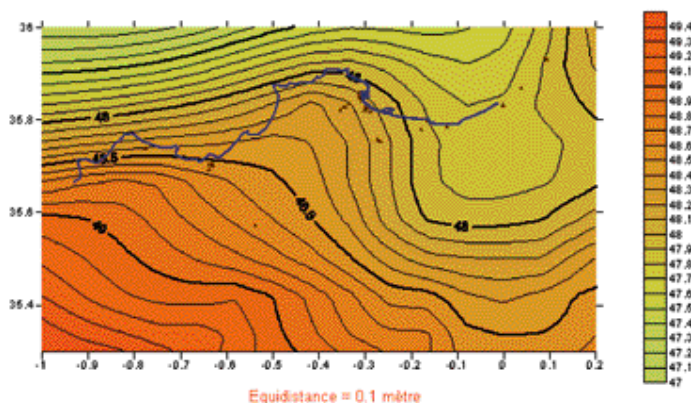


Figure 3 : Surface corrigée du géoïde gravimétrique (région d'Oran).

logues ajustées. Les statistiques de ces écarts sont résumées dans le tableau (3).

L'écart DH_{ortho} représente la différence entre les altitudes orthométriques calculées par les deux modèles (4 et 5 paramètres) et celle obtenue par nivellement de précision. D'après le tableau (3), nous constatons que la moyenne et l'écart type moyen des écarts DH_{ortho} obtenus, par les deux modèles d'ajustement (4 et 5 paramètres), sont identiques.

La figure suivante (3) représente la surface corrigée du géoïde gravimétrique obtenue par GPS/Nivellement au niveau de la région d'Oran.

Conclusion

Les travaux de nivellement par GPS menés par la division de géodésie (CNTS) avec des récepteurs bi fréquences ASH-TECH Z-XII, montrent que les résultats obtenus par l'intégration de données de nivellement de précision et du géoïde gravimétrique local, peuvent atteindre une précision centimétrique.

Le test statistique du χ^2 appliqué dans ce contexte, donne un jugement global sur la validité des modèles paramétriques utilisés. Afin de valider les résultats de l'ajustement et de se prononcer, ainsi, sur la qualité des données intégrées, il est nécessaire d'appliquer d'autres tests reposant sur la conformité des résidus normalisés à la loi normale centrée réduite (test de Tau),...

On notera que la précision sur les altitudes orthométriques déterminées par la technique GPS/Nivellement reste tributaire de :

- la fiabilité des données gravimétriques et du modèle de calcul du géoïde gravimétrique local.
- la précision des mesures GPS et la puissance du logiciel de traitement
- la qualité du réseau de nivellement (NGA) et de la précision hétérogène des altitudes (tout ordre confondu).
- du modèle de surface de correction ou d'adaptation du géoïde aux points GPS - nivelés
- les inconsistances des datum propres aux différents types d'altitudes
- la densité et la répartition géographique des points de référence.

La qualité de la transformation finale entre le GPS et les altitudes orthométriques pour la zone expérimentale est de ± 4 cm en moyenne, des forts pourcentages (plus de 75 %) des écarts se trouvent situés dans l'intervalle $[-3.8$ à $+3.5]$ cm. Le choix du modèle à cinq paramètres dans notre cas d'étude n'améliore rien la précision. ●

Références

S A Benahmed Daho [2000].

The new gravimetric geoid in Algeria.

IGeS Bulletin N°10 - ISSN 1128-3955 - [pp 85-90].

S A Benahmed Daho [2003].

Calcul des hauteurs orthométriques à partir des observations GPS : Cas d'étude : Nord de l'Algérie.

2^e Conférence Régionale (FIG). Marrakech, Maroc, Décembre 2-5, 2003.

W A. Heiskanen , H. Moritz[1967].

Physical geodesy. WH Freen and Co. SAN FRANCISCO 1967.

C. Kotsakis, M.G.Sideris [1999].

On the adjustment of combined GPS/levelling/geoid networks. Journal of Geodesy edition Springer Verlag 1999.

A.Zeggai [1996].

Intégration des données GPS en nivellement.

Thèse de Magister. CNTS ARZEW. juillet 1996.

Zhiheng Jiang and Henry Duquenne [1996].

On the combined adjustment of gravimetrically determined geoid and GPS levelling stations.

Journal of Geodesy edition Springer Verlag 1996.

Contacts

A. ZEGGAI - S.A BENAHMED DAHO

B. GHEZALI - A. AYOUAZ - H. TAIBI

R. AIT AHMED LAMARA

Division de géodésie

Centre National des Techniques Spatiales.

BP 13 Arzew - 31200 Algérie

ABSTRACT

Keywords: levelling, geoid, orthometric one, ellipsoid height, GPS, collocation

The goal of this work is to determine with what accuracy one will be able to transform an ellipsoidal height into orthometric one in a test zone located in the north west of Algeria. In this context a set of the 34 GPS levelled points, as well as the local model of the gravimetric geoid computed by the division of Geodesy (Centre National des Techniques Spatiales), from the validated terrestrial gravimetric data and supplied by the Bureau Gravimétrique International (B.G.I.), have been integrated in this comparison. This geoid, of resolution 5'x5', has been computed by the fast collocation method for the national territory between limits $[20^\circ, 37^\circ]$ in latitude and $[-10^\circ, 7^\circ]$ in longitude while using the remove-restore technique [Benahmed Daho, 2000]. Otherwise, and in order to minimize discrepancies between undulations interpolated from the gravimetric geoid model with those derived from the GPS and levelling, we tested the parametric models using four and five parameters to select the optimum model in the study zone. The accuracy of obtained results, after adaptation, is about ppm and that remains tributary of the quality and the density of data used in this adaptation.