Problèmes relatifs aux ombres d'objets élevés sur les photographies aériennes

Raymond D'HOLLANDER

Vue aérienne du château de Champs-sur-Marne

Les ombres des objets élevés sur les photographies aériennes à un axe vertical permettent de résoudre deux problèmes principaux : la détermination de la hauteur de ces objets et l'orientation de la photographie.

On suppose que la prise de vues a été effectuée par temps clair, le soleil n'étant pas voilé par des nuages, qu'on connaît le jour de la prise de vues et l'instant de celle-ci, qu'on connaît les coordonnées géographiques au moins approchées de l'objet : longitude par rapport à Greenwich et latitude.

La précision de la détermination de la hauteur *dn* de l'objet dépend de la distance zénithale du soleil au moment de la prise de vues : z ou de son complément la "hauteur" h = 90° - z.
Le cas le plus défavorable est celui où la prise de vue est faite au moment de la culmination du soleil au solstice d'été ; la déclinaison du soleil est alors :
d = 23°26' = 23,43°

Raisonnons sur un exemple en supposant que l'objet soit à la latitude $\varphi = 30°$ (au Maroc un peu au sud d'Agadir) et que la prise de vues ait été faite au solstice d'été le 21 juin, à midi vrai, alors que le soleil est à sa culmination.
On sait que la latitude φ est la hauteur du pôle au-dessus de l'horizon. Sur la coupe méridienne de la sphère céleste (figure 1) l'angle $\varphi = \widehat{H_N OP}$. Soit S la

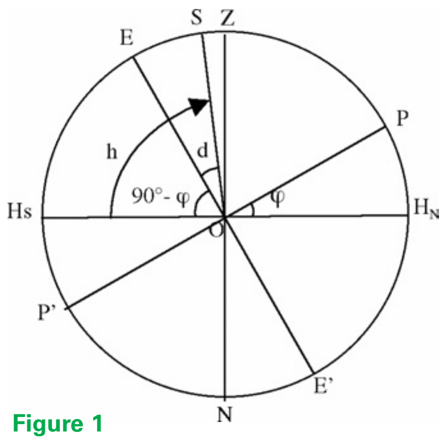


Figure 1

Z zénith
N nadir
NZ vertical du lieu
PP' axe des pôles
EE' équateur
HsHN horizon
φ latitude

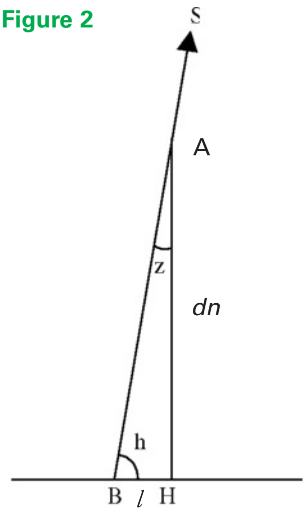
position du soleil,
telle que $\widehat{EOS} = d = 23{,}43°$

Comme $\widehat{HsOE} = 90° - \varphi$, la hauteur du soleil est : (1) $h = 90° - \varphi + d$,
c'est à dire pour $\varphi = 30°$, $d = 23{,}43°$: $h = 83{,}43°$, d'où $z = 90° - h = 6{,}57°$

Si HA = *dn* est la hauteur de l'objet et si l = HB est la longueur de l'ombre, on a (figure 2) :

$$\tan z = \frac{l}{dn} = 0{,}115 \quad \text{et} \quad \tan h = \frac{dn}{l} = 8{,}68$$

Figure 2



On conçoit la faible précision de l'opération, la quantité *dn* étant près de 9 fois plus grande que la longueur de l'ombre. Aux latitudes de la France, à midi vrai au solstice d'été, on est dans des conditions moins défavorables.
Si $\varphi = 45°$, $h = 45° + 23{,}43° = 68{,}43°$;

$$\tan h = \frac{dn}{l} = 2{,}53.$$

La hauteur de l'objet *dn* est environ 2,5 fois plus grande que la longueur de l'ombre.

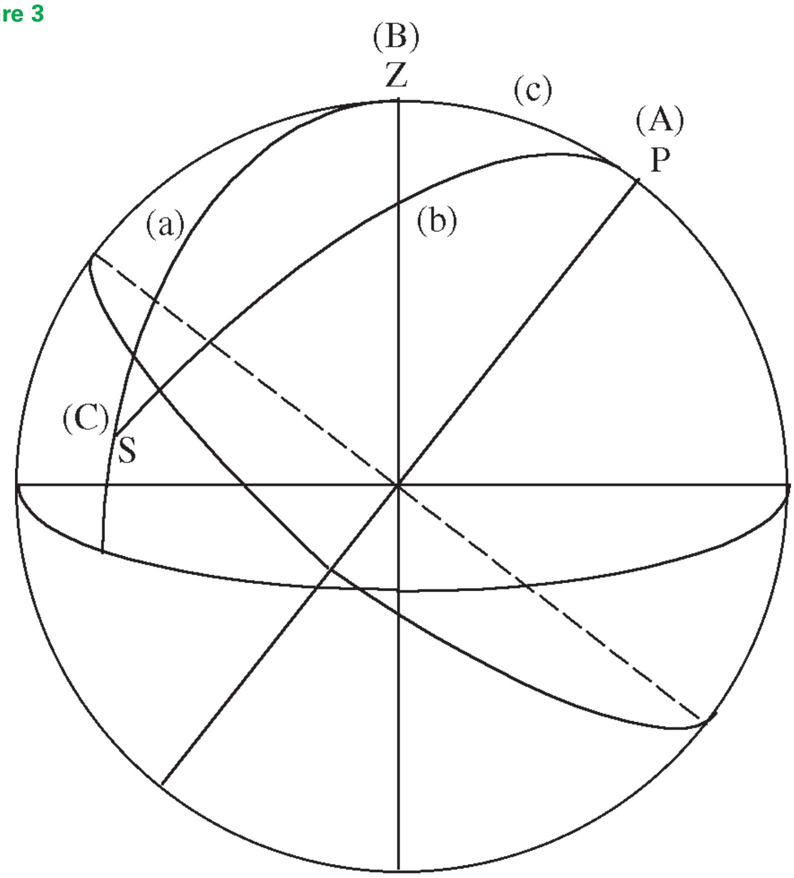
On aura des résultats satisfaisants pour des prises de vues faites en automne et en hiver avec une déclinaison négative du soleil et au début du printemps avec une déclinaison positive du soleil, mais faible ; on aura aussi une plus grande précision si la prise de vues est effectuée au moins à ± 2h par rapport au midi solaire.
On peut estimer être dans de bonnes conditions lorsque $h < 45°$, la hauteur de l'objet étant alors inférieure à la longueur de l'ombre.

Nous indiquons ci-après le mode opératoire de la détermination de la hauteur *dn* d'un objet, grâce à la longueur de l'ombre, dans un cas de précision satisfaisante.

Problème I

Calculer la hauteur du soleil h en un point de latitude $\varphi = 48{,}9°$, de longitude $\lambda = 3{,}1°$ Est de Greenwich, pour une prise de vues à axe vertical effectuée le 4 mars à 10h 10m heure légale française.
Le principe de la méthode consiste à calculer d'abord l'angle horaire H du soleil à l'instant considéré ; comme on connaît aussi la déclinaison du soleil le 4 mars, ainsi que la latitude du lieu, on est ramené au problème classique de l'astronomie de position, à savoir : calcul de la distance zénithale d'un astre connaissant l'heure de l'observation.
Dans le triangle de position PZS (figure 3),
on connaît le côté $ZP = 90° - \varphi$,
l'angle en P : - H, le côté $PS = 90° - d$.
Trois éléments de ce triangle étant connus, on peut déterminer le côté ZS = z, distance zénithale du soleil.

Figure 3



1 - calcul de l'angle horaire
La table ci-après indique les angles horaires du soleil à midi (12^h TU) à Greenwich tous les cinq jours de l'année.
Interpolons pour le 4 mars entre les valeurs données pour les 2 et 7 mars ;
$\delta = 357{,}2° - 356{,}9° = 0{,}3°$ pour 5 jours, soit 0,06° par jour et $0{,}12° \approx 0{,}1°$ pour 2 jours.
L'angle horaire le 4 mars à 12^h TU à Greenwich est donc : $H_{12} = 356{,}9° + 0{,}1° = 357°$.

L'instant $10^h\,10^m$ heure légale française correspond à TU = $9^h\,10^m$; soit $2^h\,50^m$ avant 12^hTU.

Convertissons $2^h\,50^m$ en degrés :

$$2h50m = \left(2 + \frac{50}{60}\right) \times 15° = 42{,}5° \; .$$

Donc à Greenwich à l'instant considéré, l'angle horaire est $H = 357° - 42{,}5° = 314{,}5°$.
Au même instant, au lieu considéré de longitude $\lambda = 3{,}1°$ Est de Greenwich, l'angle horaire du soleil est : $H = 314{,}5° + 3{,}1° = 317{,}6°$ ou $H = 317{,}6° - 360° = -42{,}4°$.

2 - Calcul de la déclinaison du soleil le jour de la prise de vues.
La déclinaison du soleil s'obtient par interpolation dans la table ci-après où les déclinaisons sont données de 5 en 5 jours. Pour le 2 mars d = -7,5°, pour le 7 mars d = - 5,5° ; δ = +2,0° pour 5 jours, soit 0,4° par jour et 0,8° pour 2 jours ; d = -7,5 + 0,8 = - 6,7°.

3 - Rappelons que la latitude du lieu est φ = 48,9°.

4 - Résolution du triangle de position
PZS tel que : - H = 42,4°
d = - 6,7°
φ = 48,9°
Plaçons A en P, B en Z, C en S ;
b = $\widehat{PS}$ = 90° - (- 6,7°) = 96,7°
c = $\widehat{ZP}$ = 90° - φ = 90° - 48,9° = 41,1°
A = - H = 42,4°

La formule fondamentale de la trigonométrie sphérique donne :
Cos a = cos z = cos b cos c + sin b sin c cos A
Cos z = cos 96,7° cos 41,1° + sin 96,7° sin 41,1° cos 42,4°
Cos z = - 0,0879 + 0,4821 = 0,3942
z = 66,8°
h = 90°-z = 23,2°

Nous négligeons la réfraction astronomique, qui pour cette hauteur h du soleil est d'environ 2' soit 3/100°.
On est dans des conditions favorables puisque $\tan h = \frac{dn}{l} = 0{,}42$ et que 0,42 <1

La hauteur dn de l'objet est 0,42 fois plus faible que la longueur de l'ombre.

<u>Application pratique :</u> Supposons qu'on ait mesuré la longueur l de l'ombre d'un peuplier ; compte tenu de la longueur graphique de l'ombre sur la photographie aérienne et de l'échelle de la photographie, on a obtenu : l = 33 m. La hauteur *dn* du peuplier est : *dn* = 33 x 0,42 ≈ 14 m

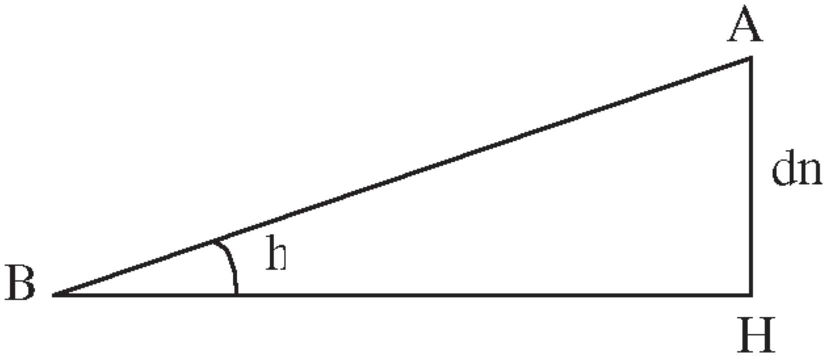


Figure 4

L'ESIEE & L'Axe de la Terre - Architecte : D. PERRAULT
Sculpteur : Piotr KOWALSK

Problème II

Avec les données du problème I, calculer l'azimut du soleil au moment de la prise de vues.
Le triangle de position est celui de la figure 3. Utilisons la relation des sinus :

$$\frac{\sin Az}{\sin PS} = \frac{\sin - H}{\sin z},$$

d'où

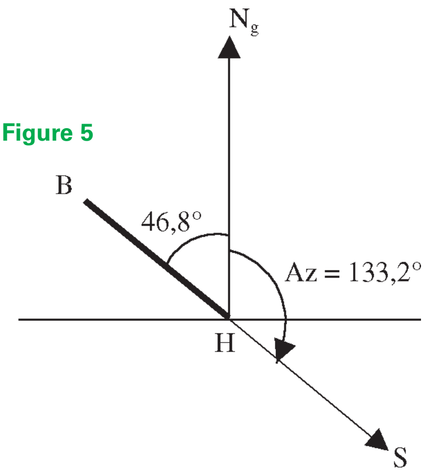
$$\sin Az = \frac{\sin 96{,}7° \times \sin 42{,}4°}{\sin 66{,}8°} = 0{,}7286$$

Il y a deux déterminations de Az, qui sont : 46,8°et 180° - 46,8° = 133,2°. Compte tenu de la figure 3, c'est la détermination : Az = 133,2° qui convient. L'azimut de l'ombre est Az_o = Az + 180° = 313,2° (Figure 5).

Si Ng correspond à la direction du Nord géographique, on a :

$$\widehat{N_gHB} = 180° - 133{,}2° = 46{,}8°$$

Figure 5



On peut ainsi orienter la photographie, c'est à dire tracer sur celle-ci la direction du nord géographique passant par le pied H de l'objet. On place le centre du rapporteur en H et on le tourne jusqu'à ce que la direction 46,8° se superpose à la direction de l'ombre.
La direction joignant H au zéro de la graduation du rapporteur donne la direction du nord géographique, que l'on peut tracer sur la photographie aérienne.

Les prises de vues aériennes à recouvrement stéréoscopique, effectuées en vue de levers topographiques, sont en général munies d'une horloge dont on enregistre sur chaque cliché l'heure et la minute de prise de vues, de sorte que dans ces conditions on peut résoudre ■■■

les deux problèmes I et II ci-dessus. Nous avons en effet supposé que l'instant de la prise de vues était 10^h 10^m heure légale française le 4 mars.
Il peut arriver qu'on dispose de photographies aériennes, dont on connaisse le jour de prise de vues, mais non l'instant précis de la prise de vues. Dans ce cas, il est impossible d'obtenir l'angle horaire du soleil à l'instant de prise de vues et les deux problèmes I et II ci-dessus ne peuvent être résolus.
Mais supposons qu'avec l'aide d'une carte topographique on puisse orienter la photographie aérienne, c'est-à-dire tracer sur celle-ci la direction du nord géographique. En traçant sur un calque la direction du nord géographique de la photographie et la direction de l'ombre, on peut mesurer au rapporteur l'azimut Az_o de l'ombre, dont on déduit l'azimut du soleil $Az = Az_o + 180°$.
Dans ces conditions on connaît encore dans le triangle de position trois éléments : l'azimut, le côté PZ = 90°- φ, le côté PS = 90° - d, d étant connu puisqu'on connaît le jour de la prise de vues. On peut ainsi résoudre le triangle de position et calculer la distance zénithale z du soleil à l'instant de la prise de vues.

Table donnant les angles horaires H et les déclinaisons d du soleil à 12 h TU à Greenwich

Dates	H12	d	Dates	H12	d
1 janvier	359° 2	- 23° 0	5 juillet	358° 9	22° 8
6 janvier	358° 6	- 22° 6	10 juillet	358° 7	22° 3
11 janvier	358° 0	- 21° 9	15 juillet	358° 5	21° 6
16 janvier	357° 6	- 21° 0	20 juillet	358° 4	20° 8
21 janvier	357° 2	- 20° 0	25 juillet	358° 4	19° 8
26 janvier	356° 9	- 18° 8	30 juillet	358°.4	18° 7
31 janvier	356° 6	- 17° 6	4 août	358° 5	17° 4
5 février	356° 5	- 16° 1	9 août	358° 6	16° 0
10 février	356° 4	- 14° 5	14 août	358° 8	14° 6
15 février	356° 4	- 12° 9	19 août	359° 1	13° 0
20 février	356° 5	- 11° 1	24 août	359° 4	11° 3
25 février	356° 7	- 9° 3	29 août	359° 7	9° 6
2 mars	356° 9	- 7° 5	3 septembre	0° 1	7° 8
7 mars	357° 2	- 5° 5	8 septembre	0° 5	5° 9
12 mars	357° 5	- 3° 5	13 septembre	0° 9	4° 0
17 mars	357° 8	- 1° 6	18 septembre	1° 4	2° 1
22 mars	356° 2	+ 0°3	23 septembre	1° 8	0° 2
27 mars	358° 6	+ 2° 3	28 septembre	2° 3	- 1° 8
1 avril	359° 0	+ 4° 3	3 octobre	2° 7	- 3° 7
6 avril	359° 3	+ 6°2	8 octobre	3° 0	- 5° 6
11 avril	359° 7	+ 8° 1	13 octobre	3° 4	- 7° 5
16 avril	0° 0	+ 9° 9	18 octobre	3° 7	- 9° 4
21 avril	0° 3	+ 11° 6	23 octobre	3° 9	- 11° 2
26 avril	0° 5	+ 13° 3	28 octobre	4° 0	- 12° 9
1 mai	0° 7	+ 14° 9	2 novembre	4° 1	- 14° 5
6 mai	0° 8	+ 16° 3	7 novembre	4° 1	- 16° 1
11 mai	0° 9	+ 17° 7	12 novembre	3° 9	- 17° 5
16 mai	0° 9	+ 18° 9	17 novembre	3° 8	- 18° 8
21 mai	0° 9	+ 20° 0	22 novembre	3° 5	- 20° 0
26 mai	0° 8	+ 21° 0	27 novembre	3° 1	- 21° 0
31 mai	0° 6	+ 21° 8	2 décembre	2° 7	- 21° 8
5 juin	0° 4	+ 22° 5	7 décembre	2° 2	- 22° 5
10 juin	0° 2	+ 23° 0	12 décembre	1° 6	- 23° 0
15 juin	359° 9	+ 23° 3	17 décembre	1° 0	- 23° 3
20 juin	359° 7	+ 23° 4	22 décembre	0° 4	- 23° 4
25 juin	359°4	+ 23° 4	27 décembre	359° 8	- 23° 3
30 juin	359° 1	+ 23°1			

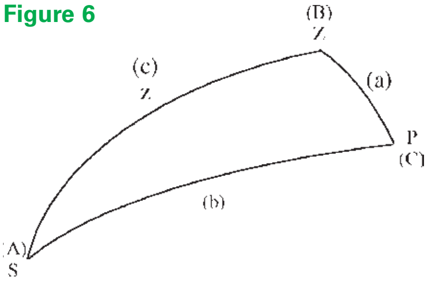
Problème III

Sur une photographie aérienne prise le 4 mars à la latitude φ = 48,9°, on a mesuré l'azimut $Az_o = 313{,}2°$ de l'ombre du soleil.
Calculer la distance zénithale du soleil à l'instant de la prise de vues.

Reprenons le triangle de position de la figure 3 en y portant les trois valeurs connues (voir fig.6).

- L'azimut du soleil $Az = Az_o - 180° = 133{,}2°$ que nous désignerons par B.
- Le côté $\widehat{ZP} = 90° - φ = 41{,}1°$ que nous désignerons par a.
- Le côté $\widehat{PS} = 90° - d = 96{,}7°$ que nous désignerons par b ; en effet le 4 mars la déclinaison du soleil est - 6,7°.

Figure 6



Calculons l'angle à l'astre en S que nous désignerons par A.
On a par la relation des sinus :

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b}$$ Or B = 133,2°, a = 41,1°, b = 96,7°.

On en déduit :

$$\sin A = \frac{\sin 41{,}1° \times \sin 133{,}2°}{\sin 96{,}7°} = 0{,}4825$$

d'où : A = 28,85°.
Appliquons la 1ère analogie de Neper :

$$\tan\frac{a+b}{2} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\tan\frac{c}{2},$$

d'où $\tan\frac{c}{2} = \tan\frac{z}{2} = \dfrac{\tan\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}$

On obtient :

$$\frac{a+b}{2} = 68{,}9^c \qquad \tan\frac{z}{2} = 0{,}6596$$

$$\frac{A+B}{2} = 81{,}02^c \qquad \frac{z}{2} = 33{,}4^c$$

$$\frac{A-B}{2} = -52{,}175^c \qquad z = 66{,}8°$$

On retrouve le résultat obtenu au problème I.